ALFRED SCHREIBER

SILVULA MATHEMATICA

ALFRED SCHREIBER

SILVULA MATHEMATICA

Artikel und Studien zur Elementarmathematik und Erkenntnistheorie

KAISER 言 PRESSE

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Alfred Schreiber: ›Silvula mathematica‹
4., durchgesehene und erweiterte Ausgabe
Buchsatz aus der Linux Libertine mit LaTeX 2_ε und MikTeX
im Selbstverlag des Autors (www.kaiserpresse.de)

Druck: epubli, Berlin

Vorwort zur vierten Ausgabe

Diese Fassung der ›Silvula mathematica‹ unterscheidet sich von ihrer Vorgängerin einzig dadurch, dass eine weitere Abteilung ›Funktionen aus algebraischer Sicht‹ sowie einige im Zentralblatt für Mathematik erschienene Referate hinzugekommen sind.

Vorwort zur dritten Ausgabe

Dies ist die Nachlese einer Nachlese. Während die zweite Ausgabe dieses Bändchens sich von dessen erster Fassung lediglich dadurch unterschied, dass eine Reihe von drucktechnischen und redaktionellen Fehlern beseitigt wurden, ist die vorliegende Ausgabe das Ergebnis einer tiefer eingreifenden Umgestaltung. Etliche ›Blätter‹ wurden aussortiert (insgesamt mehr als hundert Druckseiten). Zudem schien es mir geraten zu sein, die frühere, etwas summarische Gliederung aufzugeben zugunsten einer Einteilung in thematisch besser akzentuierte Gruppen. Auch die chronologische Anordnung habe ich nicht beibehalten.

Aus dem Vorwort zur ersten Ausgabe

Iam efficaci do manus scientiæ
Horaz, Epod. XVII,1

Die Blätter des hier zugänglich gemachten »mathematischen Wäldchens« stammen von ganz unterschiedlichen Bäumen und aus teils weit auseinander liegenden Zeitabschnitten. Neben veröffentlichten Beiträgen findet sich allerlei bislang unpubliziertes Material, meistens solches, das ich in Lehrveranstaltungen oder in Vorträgen verwendet habe. [...] Die Texte wurden in allen [...] Abteilungen in der Zeitfolge ihrer Entstehung angeordnet. Wo es mir geraten schien, habe ich die ursprünglichen Fassungen (meist nur geringfügig) überarbeitet.

Alfred Schreiber

Inhalt

I. Geometrie und Begründungsfragen **1**

Äquatorbänder – Stadionbahnen – Meilenzonen 2
Eine ›pythagoreische‹ Ungleichung 7
Ebene Polygone und ihre Schachtelung 11
Bemerkungen zur Dreiecksungleichung 37
Beleuchtung einer Tischplatte 44
Nacherfindung der Parabel 49
Eine einfache Charakterisierung von Kreis und Kugel 51
Anmerkungen zum Parallelenpostulat 53
Ideen in der Geometrie 60
Hugo Dinglers Prinzip der konvergenten Genauigkeit 64
Ein Diskussionsbeitrag, Göttingen 1977 68
Das Ende der ›Protogeometrie‹ als »Theorie räumlicher Figuren« 70

II. Wahrscheinlichkeit und Mittelwerte **93**

Spiele und ihre Theorie 94
Spiele mit Quoten als Unterrichtsgegenstand 100
Subjektive Wahrscheinlichkeit und Gesetz der großen Zahlen . . . 105
Eine Ungleichung für das Sicherheitsäquivalent 111
Probleme bei der Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs . . . 115
Auswertung statistischer Daten am didaktischen Beispiel 132
Vergleichbarkeit quasi-arithmetischer Mittel 134
Notiz über eine interpolierende Folge von Mittelwerten 151

III. Funktionen aus algebraischer Sicht **153**

Aufbau eines Funktionenkalküls 154
Factorial polynomials and associated number families 210
Note on expanding implicit functions 219
On the formal power series of involutory functions 226
Bibliographie zu Teil III 237

IV. Erkenntnistheoretische Studien 241

Ein von Peirce vorgetragenes Argument 242
Fichtes transzendentale Paradoxie des Wissens 244
Transzendentale Logik und Kybernetik 246
Notizen zu Merleau-Pontys Phänomenologie der Wahrnehmung . 252
Ein Diskussionsbeitrag, Göttingen 1977 259
Aporetische Charaktere der Gegenständlichkeit 265
Eine Bemerkung über abgeschlossene Wortmengen 276
Was ist unter Idealisierung zu verstehen? 280

V. Referate 287

Bloch: Jorge Borges' Inescapable Labyrinth 288
Mortillaro: 3D Anamorphic Sculpture and the S-Cylindrical Mirror 289
Christopoulou: On the synthetic content of implicit definitions . . 289
Kornmesser: A frame-based approach for theoretical concepts . . 291
Molinini et al.: Indispensability and explanation 293
Bühler: Musikalische Skalen bei Naturwissenschaftlern der frühen Neuzeit. Eine elementarmathematische Analyse 294
Falguera / Donato-Rodríguez: Incommensurability, Comparability, and Non-reductive Ontological Relations 296
Orlofsky: »A different sort of bird« 298
Schroeder-Heister: Popper's Structuralist Theory of Logic 299
Prado et al.: Temporal Network Analysis of Literary Texts 300
Tysse: Irish Dancing Groups 302
Baldwin: Explanatory role of mathematical induction 303
Priest: What If? The Exploration of an Idea 304
Aharoni: Mathematics, Poetry, and Beauty 306
Zheng; Li: Bivariate extension of Bell polynomials 308
Chamizo: Sumando de la W a la Z (Spanish) 309
Oh; Park: Necklaces and slimes 310
Boyadzhiev: New Series Identities with Cauchy, Stirling, and Harmonic Numbers, and Laguerre Polynomials 311

Teil I.
Geometrie und Begründungsfragen

Äquatorbänder - Stadionbahnen - Meilenzonen[1]

Zusammenfassung. Bei dem folgenden Ausflug in die Geometrie schildere ich drei kleine Probleme, die einen gemeinsamen Kern besitzen. Dieser hat mit Parallelität zu tun und wird danach soweit betrachtet, wie es für einen Unterricht in der Sekundarstufe I möglich und nötig erscheint.

Drei Aufgaben

Aufgabe 1. Das Band um den Erdäquator. — Diese Aufgabe ist wirklich ein alter Hut, der sich in vielen Denksportbüchern findet, etwa in der folgenden Form: Angenommen, ein Band ist um den Äquator der Erde gelegt.[2] Nun wird das Band verlängert, sagen wir durch Einfügen eines 10 m langen Stücks. Schließlich denken wir uns das verlängerte Band parallel zum Äquator gespannt. Der Denksportautor fragt jetzt, wie groß die entstandene Lupfhöhe sei. Welchen Abstand also hat das Band vom Äquator? Was könnte wohl unter dem Band herkriechen? Eine Ameise, eine Maus, ein Hund? Man kann es sich zunächst nur schwer vorstellen. Was machen schon 10 m gegenüber 40 000 000 m aus?

Aufgabe 2. Wettläufe auf der Stadionbahn. — Diese erfordern in manchen Fällen ein Laufen in parallelen Bahnen, z. B. beim 400 m-Lauf. Der Teilnehmer auf einer inneren Bahn darf natürlich keinen kürzeren Weg haben als seine Konkurrenten auf den äußeren Bahnen; daher erhalten diese einen Vorsprung. Aber welchen? Und gibt es zwischen verschiedenen Nachbarbahnen auch unterschiedliche Vorsprünge?

Aufgabe 3. Eine N-Meilenzone um Piscinien. — Eine solche Zone wird für hinreichend großes N von der insularen Regierung zum Schutz der nationalen Fischerei verordnet. Piscinien besitzt eine mehr oder weniger zerklüftete Küste und beauftragt nun eine Kommission von Landvermessern, Topographen und Geometern mit der Findung der geforderten Grenzlinie. Diese Aufgabe entspricht allgemein bekannten Realitäten, d. h. den da und dort geltenden 12- oder 15-Meilenzonen entlang nationaler Küsten.

---

[1] In: *mathematiklehren* 17 (August 1986), 38-41.

[2] Was für eine Annahme! Man diskutiere das einmal mit einer Klasse der Mittelstufe!

Zu Aufgabe 1

Das Beispiel sollte man zunächst seiner speziellen Zahlenwerte entkleiden. Der Äquatorkreis habe den Radius r, der unbekannte Abstand des Bandes betrage a (Abb. 1). Dann ergeben sich zwei konzentrische Kreise mit den Umfängen $2\pi r$ bzw. $2\pi(r + a)$.

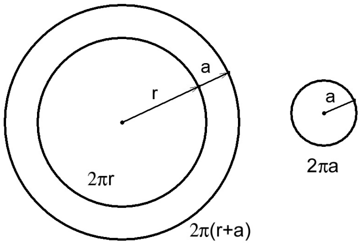


Abb. 1

Deren Differenz ($2\pi a$) ist gerade die Größe d des Verlängerungsstücks. Ganz gleich, ob man nun an einzelnen Zahlenbeispielen oder allgemein rechnet, das Ergebnis ist bemerkenswert: Erstens hängt der Abstand a überhaupt nicht vom Radius, z. B. des Äquatorkreises, sondern einzig von der Verlängerung d des Umfangs ab. Wie groß oder klein der innere Kreis auch sein mag, die gefragte Lupfhöhe a beträgt stets $d/2\pi$.

Das hat die Konsequenz, dass die Lösung der Äquatoraufgabe, nämlich $d \approx 1{,}59$ m, ungewöhnlich groß anmutet; man glaubt ja typischerweise im ersten Moment, die Größe des Äquators habe etwas mit dem Resultat zu tun. Genausogut kann man gleich aus dem Verlängerungsstück einen Kreis formen, und dessen Radius ist dann die Lupfhöhe (Sonderfall $r = 0$). Etwas später werden wir diesem Kreis wiederbegegnen, er heißt dann *Mehrwegkreis*, ein Ausdruck, den sich Schüler einer 7. Klasse ausgedacht haben, allerdings in einem anderen, besseren Kontext.

In der Tat empfehle ich nicht, im Unterricht den Ausflug ins Reich der Parallelfiguren mit der Geschichte vom Äquatorband zu beginnen (auch wenn ich gleich hier dagegen verstoßen habe). Die Aufgabe ist etwas isoliert und wirkt mit ihrem Knalleffekt leicht gewollt, zumal sie nicht in einem sinnvollen Zusammenhang steht. Einen besseren Einstieg bieten Aufgabe 2 oder Aufgabe 3; sicherlich ist Aufgabe 2 der einfachere Start ins Thema.

Zu Aufgabe 2

Am besten beginnt man mit einem Gespräch über Schnelligkeitswettbewerbe. Welche Formen von Bahnen werden dabei benutzt? Schon hierbei taucht eine Fülle von Gesichtspunkten auf, die dann im weiteren Verlauf eine Rolle spielen.

Die Kinder nennen mühelos typische Disziplinen wie Laufen, Autorennen, Pferderennen, Radfahren, Schwimmen und dgl. mehr. Auch die ungefähren Bahnformen sind ihnen größtenteils geläufig. Meistens sind es keine von der Natur ›geschaffenen‹, sondern von Menschen planvoll angelegte Bahnen. Beim Schwimmen etwa kommen Kurven nicht in Frage, bei Laufwettbewerben (außer Marathon und Querfeldein) sollte das Publikum die Teilnehmer dauernd beobachten können, und beim Autorennen braucht man eine Mindestanzahl von ›Kurvenschikanen‹ (beim alten Nürburgring waren es auf einer Länge von ca. 28 km 89 Links- und 85 Rechtskurven). Beim Pferderennen (wie auch beim Laufen im Leichtathletik-Stadion) sind zu enge Kurven und Einbuchtungen (nicht-konvexe Bahnen) zu vermeiden. Auch sollten gerade Bahnabschnitte vorhanden sein, damit man sich schneller fortbewegen kann.

Es lohnt sich, ausführlicher über die Form der gewöhnlichen Stadionbahn (Leichtathletik-Kampfbahn) zu diskutieren. Viele Schüler, so zeigt sich, sind mit deren Form keineswegs so vertraut wie sie ursprünglich selbst glaubten. Sie sprechen von »Oval« und zeichnen eiförmige Kurven oder Rechtecke mit abgerundeten Ecken. Natürlich scheiden solche Formen schon aus einfachsten Gründen aus. Trotzdem bleibt meist noch eine Unsicherheit bezüglich der Gestalt der beiden gegenüberliegenden ›Kurven‹. Dass sie zweckmäßig als Halbkreise angelegt werden, ist eine Überlegung wert. Es würde einen Läufer stören, wenn er eine ungleichmäßig gekrümmte Kurve zu durchlaufen hätte. Ein Halbkreis ist zudem am einfachsten herzustellen.

Naheliegende Fragen: Wie groß ist der Durchmesser dieses Halbkreises? Und wie lang sind die jeweils einander gegenüberliegenden Kurven und Geradenstücke? Da die Innenbahn 400 m lang ist, veranschlagt man jeden der vier Bahnabschnitte auf je 100 m Länge. In Wirklichkeit ist die gerade Strecke jedoch mit ca. 85 m beträchtlich kürzer und der Durchmesser (zugleich die kurze Seite des inneren Rechtecks) dafür länger, nämlich 73 m anstelle von 63,6 m (vgl. Abb. 2).

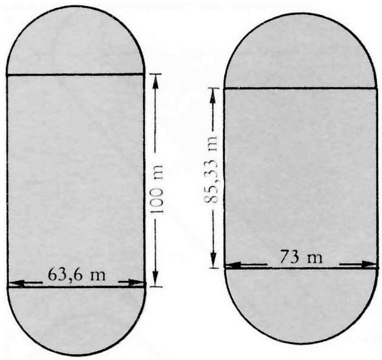


Abb. 2

Trotzdem können 100 m-Laufwettbewerbe stattfinden, da man die fehlenden 15 m durch gerade Rückwärtslängerung der Bahn(en) in die Umfläche des Halbkreises gewinnt.

Mehrweg entsteht offensichtlich nur in den Kurven; zusammengeschoben schließen diese sich – das Innenrechteck denken wir uns zuvor herausgenommen – zu einem Vollkreis. Da eine Bahn 1,22 m breit ist, ergibt sich der Vorsprung eines 400 m-Läufers in Bahn 2 vor seinem Konkurrenten in Bahn 1 als Umfangsdifferenz zweier konzentrischer Kreise angenähert zu $3{,}14 \cdot (73 + 1{,}22 + 1{,}22)\,\text{m} - 3{,}14 \cdot 73\,\text{m} \approx 7{,}66\,\text{m}$.

Man rechnet leicht nach, dass dasselbe auch für Bahn 3 in Bezug auf Bahn 2 gilt, usw. Tatsächlich ist es gleichgültig, wie lang (und sogar: wie geformt) die Bahn ist. Der Umfang des kleinen Kreises vom Radius a in Abb. 1 verkörpert in jedem Fall gerade diesen Vorsprung (Mehrweg), der bei der Bahnbreite a entsteht. Rollen wir zudem diesen ›Mehrwegkreis‹ auf einem Kreis oder auf dem Rand irgendeiner konvexen (ebenen) Figur $\mathcal{F}$ ab, so beschreibt sein Mittelpunkt (im Abstand a vom Abrollrand) gerade eine Bahn, die um den Mehrweg $2\pi a$ länger ist als der Umfang von $\mathcal{F}$.[3]

[3] Dies findet sich im Einzelnen für den Unterricht ausgearbeitet in meinem Beitrag ›Parallelfiguren‹, *Didaktische Schriften zur Elementarmathematik*, Logos-Verlag: Berlin 2014, 74-91, sowie in Abschnitt 4.3 von Bender / Schreiber, *Operative Genese der Geometrie*, Wien und Stuttgart 1985, Wiederabdruck: epubli 2012.

Zu Aufgabe 3

Bei konvexen Figuren ist das Abrollen eines Mehrwegkreises immer möglich. Deshalb könnte man so auch Pisciniens N-Meilenzone in einem maßstabsgerechten Modell abgrenzen, vorausgesetzt die Insel hat konvexen Grundriss. – Was macht man jedoch bei Einbuchtungen? Immerhin kann es auch da geschehen, dass ein Kreis in einer Einbuchtung abgerollt werden kann, wenn nur sein Radius hinreichend klein gegenüber der Breite der Einbuchtung ist. Wir werfen einen Blick auf einige Fälle (Abb. 3). In der Figur a) stellt die Einbuchtung kein Hindernis zur Erzeugung einer parallelen Abrollkurve dar. Auch bei b) gibt es Abroll-Parallelen, allerdings nur im Abstand $a \leq r$. Im Fall c) ist es die innere Spitze der Einbuchtung, die verhindert, dass der Mittelpunkt eines abrollenden Kreises sich in ihrer Umgebung überall in gleichem Abstand vom Rand bewegen kann.

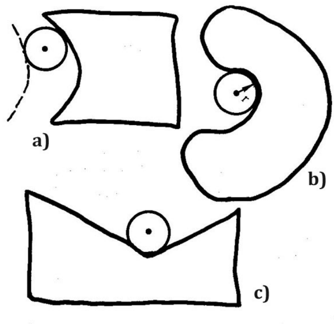


Abb. 3

Bei einer N-Meilenzone wird freilich nur verlangt, dass ein bestimmter Abstand nicht unterschritten wird. Eine solche Grenze lässt sich einfach realisieren. Der Mehrwegkreis wird dazu gewissermaßen wieder entmaterialisiert. Anstatt ihn auf dem Rand abzurollen (was ja nicht geht), schlägt man ihn mit dem Zirkel um jeden Punkt der Küstenlinie – und natürlich *in praxi* nicht wörtlich um *jeden* Punkt, sondern um so viele wie nötig sind, um eine Einhüllende zu erkennen (Abb. 4).


Abb. 4: Pseudoparallelen in verschiedenen Abständen zu unterschiedlichen Küstenstreifen

Je größer der Abstand, desto glatter wird die Parallelfigur. Diese sollte angemessener *Pseudoparallele* heißen, da Parallelität im Sinne von Gleichabständigkeit dabei nur noch als Sonderfall vorkommt. Ist speziell die Figur konvex, so ist das Ergebnis dasselbe wie beim Abrollen des Mehrwegkreises. Mit wachsendem Abstand ähnelt dann die Parallelfigur immer mehr einem Kreis.

Eine ›pythagoreische‹ Ungleichung[1]

In diesem kurzen Beitrag wollen wir Ungleichungen in einen Zusammenhang mit dem Satz des Pythagoras bringen. Die Überlegungen übersteigen nicht das Niveau der Sekundarstufe I, und Schüler sollten mit etwas Anleitung durch den Lehrer das Thema als kleines Forschungsproblem durchführen können. – Für die an einer Stelle benutzte Dreiecksungleichung verweisen wir unsere diesem Artikel unmittelbar folgenden ›Bemerkungen zur Dreiecksungleichung‹.

Spezialfälle der Jensenschen Ungleichung lassen sich häufig dazu verwenden, Extremwertprobleme ohne Differenzialrechnung zu lösen. An einem einfachen Beispiel, das die Quadratfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, verwendet, hatten wir am Ende unseres Beitrags über die Jensensche Ungleichung (in diesem Heft)[2] die typische Vorgehensweise verdeutlicht. Hier soll uns im Weiteren nur die Ungleichung interessieren, die sich (nach Jensen) aus der Konvexität von f ergibt:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \le \frac{a^2+b^2}{2}, \qquad \text{d. h.} \qquad a^2+b^2 \ge \frac{(a+b)^2}{2}. \tag{1}$$

Algebraische Umformungen liefern die äquivalente Aussage

$$ab \le \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}. \tag{2}$$

Bei näherer Betrachtung von (2) fallen die vorkommenden Produkte auf; man kann sie leicht als Flächeninhalte von Rechteck (ab) und Quadraten

[1] Zusammen mit Emese T. Vargyas, in: *Der Mathematikunterricht*, Jg. 55, Heft 5 (2009), 42-44.

[2] Wiederabgedruckt in: A. Schreiber, *Didaktische Schriften zur Elementarmathematik*. Logos-Verlag: Berlin 2014, S. 205-229.

(a^2, b^2) auffassen. Somit liegt es nahe, die Konvexität der Quadratfunktion ohne Rückgriff auf die Jensensche Ungleichung direkt auf geometrischem Weg zu begründen.

Für alles Folgende setzen wir $a, b > 0$ voraus und nehmen ohne Einschränkung $a \leq b$ an. Abb. 1 zeigt das größere Quadrat $ABCD$ mit Seitenlänge b und ihm eingelagert das kleinere Quadrat $APSR$ mit Seitenlänge a. Die große Quadrathälfte (das Dreieck BCD) hat das Bild PQT unter der Verschiebung $\overrightarrow{BP}$. Man sieht sofort: Das Produkt ab ist der Flächeninhalt des Rechtecks $APQD$; $\frac{a^2}{2}$ und $\frac{b^2}{2}$ sind die halben Flächen der Quadrate $APSR$ und $ABCD$, und es gilt: $\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} = \frac{\mathcal{F}_{APSR}}{2} + \frac{\mathcal{F}_{ABCD}}{2} = \mathcal{F}_{APR} + \mathcal{F}_{PQT} \geq \mathcal{F}_{APQD} = ab$. – Der Gleichheitsfall (genau bei $a = b$) sei dem Leser überlassen.

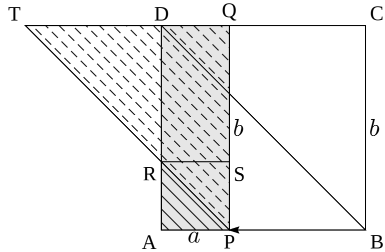


Abb. 1

Liegt nun ein Dreieck ABC (mit Seitenlängen a, b, c) vor, so könnten wir die Dreiecksungleichung $(c \leq a + b)$ mit der allgemeingültigen „Konvexitätsungleichung“ (1) kombinieren. Schätzt man in (1) $a + b$ auf diese Weise durch c nach unten ab, so ergibt sich sofort

$$\frac{c^2}{2} \leq a^2 + b^2. \tag{3}$$

Diese Ungleichung gilt *für alle* Dreiecke. Sie ist freilich sehr grob; das stellt sich bei kritischer Betrachtung schnell heraus.

Anmerkung. — Grund dafür ist die Dreiecksungleichung. Ersetzen wir nämlich in (1) $a+b$ nicht durch c, sondern durch den gleichgroßen Wert $u-c$, worin $u = a+b+c$ den Umfang des Dreiecks bezeichnet, so ergibt sich nach kurzer Rechnung

$$u\left(\frac{u}{2} - c\right) + \frac{c^2}{2} \leq a^2 + b^2. \tag{4}$$

Offenbar steht in (4) das Gleichheitszeichen genau dann, wenn es in (1) steht, und das heißt: bei $a = b$. In dem Fall kann aber in (3) noch Ungleichheit bestehen. Erst wenn $\frac{u}{2} - c$ verschwindet, ist der Gleichheitsfall in (3) möglich. Nun besagt aber $u = 2c$ dasselbe wie $a + b = c$, das Dreieck ist also ausgeartet. Damit ist auch klar, dass C in der Mitte der Strecke $\overline{AB}$ liegt, denn aus $a + b = c$ und $a = b$ folgt sofort $a = b = c/2$.

Anknüpfend an (3) wollen wir nun der Frage nachgehen, ob sich die betreffende Ungleichung erweitern bzw. verschärfen lässt. Wie könnte dabei die Seite c ins Spiel kommen? Zumindest sollte sich in diesem Zusammenhang der Sonderfall $a^2 + b^2 = c^2$ und damit der Satz des Pythagoras aufdrängen. Der Sachverhalt ist hier sehr einfach: Liegt die Ecke C auf dem Halbkreis (Thaleskreis) über der Seite $\overline{AB}$, so ist das Dreieck ABC rechtwinklig, und wir erhalten $a^2 + b^2 = c^2$.

Es ist nun klar, dass man noch zwei Fälle zu untersuchen hat: C liegt 1) außerhalb oder 2) innerhalb des Thaleskreises.

Fall 1): Es liege C außerhalb des Thaleskreises über $\overline{AB}$.

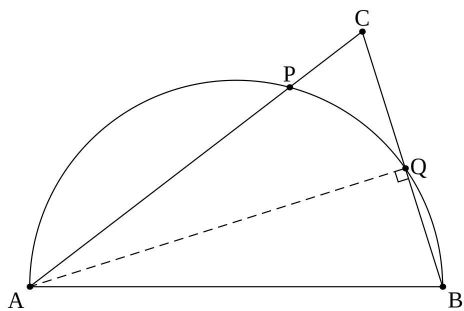


Abb. 2

Hat das Dreieck ABC mit dem Halbkreis zwei weitere Punkte P und Q gemeinsam (wie in Abb. 2), so gilt aufgrund der Rechtwinkligkeit der Dreiecke ΔAQC und ΔBQA:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= |BC|^2 + |AC|^2 = (|BQ| + |QC|)^2 + (|AQ|^2 + |QC|^2) \\ &= |BQ|^2 + |AQ|^2 + 2|BQ| \cdot |QC| + 2|QC|^2 \\ &= |AB|^2 + 2|QC| \cdot (|BQ| + |QC|) \\ &= c^2 + 2|QC| \cdot (|BQ| + |QC|). \end{aligned}$$

Laut Voraussetzung sind $|QC|$ und $|QB|$ beide positiv, deswegen gilt $a^2 + b^2 > c^2$.

Wir nehmen nun an, das Dreieck ΔABC schneide den Halbkreis in nur einem weiteren Punkt P (Abb. 3).

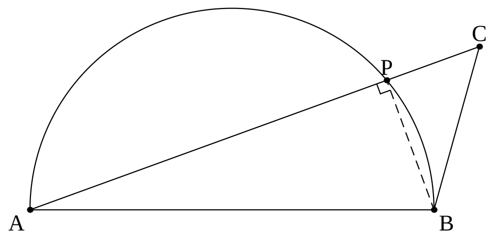


Abb. 3

Aufgrund der Rechtwinkligkeit von ΔCPB und ΔBPA ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= |BC|^2 + |AC|^2 = |BC|^2 + (|AP| + |PC|)^2 \\ &= |BP|^2 + |PC|^2 + |AP|^2 + 2|AP| \cdot |PC| + |PC|^2 \\ &= |AB|^2 + 2|AP| \cdot |PC| + 2|PC|^2 \\ &= c^2 + 2|PC| \cdot (|AP| + |PC|). \end{aligned}$$

Da $|PC| > 0$ gilt (C liegt außerhalb des Kreises), ergibt sich ebenfalls $a^2 + b^2 > c^2$. Fazit: *Liegt die Ecke C außerhalb des Halbkreises über $\overline{AB}$, so erfüllen die Seiten des Dreiecks die Ungleichung $a^2 + b^2 > c^2$.*

Fall 2): Es liege nun C innerhalb des Thaleskreises über $\overline{AB}$. Die Verlängerung der Strecke $\overline{AC}$ schneide den Kreis im Punkt P:
Dann gilt unter Beachtung von $|AC| > 0, |CP| > 0$ sowie der Rechtwinkligkeit von ΔBPC:

$$\begin{aligned} c^2 &= |AB|^2 = |AP|^2 + |PB|^2 = (|AC| + |CP|)^2 + \left(|BC|^2 - |CP|^2\right) \\ &= |AC|^2 + 2|AC| \cdot |CP| + |BC|^2 > |AC|^2 + |BC|^2 = b^2 + a^2. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt: *Liegt die Ecke C innerhalb des Halbkreises über $\overline{AB}$, so erfüllen die Seiten des Dreiecks die Ungleichung $a^2 + b^2 < c^2$.*

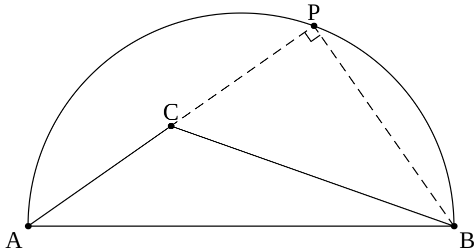


Abb. 4

Folgerung: $a^2 + b^2 = c^2 \iff C$ *liegt auf dem Thaleskreis über* $\overline{AB}$.

In den vorangegangenen Überlegungen wurde mehrfach vom Satz des Pythagoras Gebrauch gemacht. Aus der Folgerungsrichtung „$\Longrightarrow$“ erhalten wir, als Nebenprodukt, nun auch seine Umkehrung (die allerdings auf anderem Wege leichter zu gewinnen wäre).

Liegt C auf dem Thaleskreis über $\overline{AB}$ oder in dessen Innerem, so lässt sich mit der Ungleichung (1) für die Summe $a + b$ auch eine obere Schranke finden:

$$\frac{(a+b)^2}{2} \leq a^2 + b^2 \leq c^2.$$

Daher gilt $a + b \leq c\sqrt{2}$ für alle Dreiecke, die in C einen rechten oder stumpfen Winkel haben.

Ebene Polygone und ihre Schachtelung[1]

Zusammenfassung. – Vieleckschachtelungen, als Phänomen und als Begriff, bilden auf dem Niveau der Sekundarstufe II ein reichhaltiges Erkundungsfeld. Eine Reihe von Aufgaben wird angeboten, mit denen sich Stoffe aus der Linearen Geometrie wiederholen und problembezogen anwenden lassen. In den Beispielen verbinden sich der ästhetische Reiz der Figuren, der Kontext bekannter Sätze der Schulgeometrie und der experimentelle Umgang mit der Schachtelungsiteration (z. B. unter Einsatz eines Kleincomputers).

[1] In: *mathematica didactica* 8 (1985), 21-44.

1. Schachtelungen

Verschachtelte Gebilde besitzen eine merkwürdige Faszination. Man denke z. B. an die Babuschkas, hölzerne russische Großmütterchen, von denen die jeweils kleinere im Hohlraum der nächst größeren aufgestellt ist. Oder an das Experiment, sich mit einem Spiegel in der Hand zu spiegeln, der wiederum dieses Spiegelbild wiedergibt, und so weiter fort. Natürlich genügt es auch zu denken, dass ich denke, dass ich denke, dass usw.

Unabhängig vom Niveau der Abstraktion verkörpern solche Prozesse die Idee des Unendlichen, und das macht gewiss einen Teil ihres Reizes aus. Schachtelungen sind aber auch ein Beispiel für die Idee der Iteration, die in vielen grundlegenden Begriffsbildungen und Verfahren der Mathematik eine Rolle spielt (vgl. hierzu [14]). Fundamental ist z. B. die Intervallschachtelung zur Bestimmung einer reellen Zahl oder zur Einführung ihrer Gesamtheit.

Optisch interessant ist die Schachtelung von (ebenen) Figuren. Wenn wir aus den Seitenmittelpunkten eines Quadrats ein neues Quadrat bilden und diese Konstruktion fortsetzen, so bekommen wir schon nach wenigen Schritten ein ansprechendes Muster (Abb. 1). Ähnlich kann man mit anderen Vielecken verfahren, wobei die Einlagerung auch asymmetrisch, d. h. an Teilungspunkten mit einem anderen Teilverhältnis erfolgen mag.

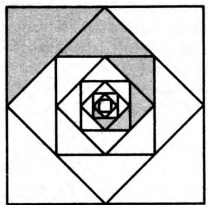


Abb. 1

Wenn wir zum Beispiel sechs schief verschachtelte Folgen gleichseitiger Dreiecke in geeigneter Weise um ein Zentrum herum aneinanderlegen, so ergibt sich eine nunmehr von Hüllkurven beherrschte hexagonale Figur (Abb. 2). Die ›Op Art‹ der 1950er und 1960er Jahre machte solche (in der Mathematik allerdings schon längst bekannte) Muster beliebt und trug durch zahlreiche Designs zu ihrer Verbreitung bei.

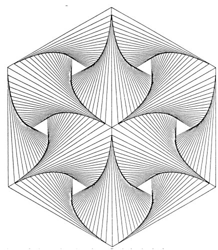


Abb. 2

Angesichts verschachtelter Vielecke lassen sich eine Fülle mathematischer Fragen aufwerfen: Wird, wie bei Intervallschachtelungen, immer ein bestimmter Punkt eingeschachtelt, und wenn ja, welcher? Was passiert, wenn die neuen Ecken nicht auf der Mitte der alten Seite liegen? Wie ändert sich die Größe der Figur nach einem Schachtelungsschritt? Wann entstehen ähnliche Figuren? Was geschieht bei komplizierteren, z. B. nicht-konvexen Polygonen oder gar solchen mit sich überschneidenden Seiten? Warum entstehen manchmal gekrümmte Linien, und um welche Kurven handelt es sich dabei? und dgl. mehr.

Ein Teil dieser Fragen soll im Folgenden durch geeignete Übungen erschlossen werden. Dabei beschränke ich mich auf die Ebene und wähle als mathematischen Rahmen ein Stück Lineare Algebra, wie man es etwa zur Darstellung affiner Sachverhalte braucht, einschließlich des Rechnens mit Matrizen. Dies ist auch der Schulstoff, an den die betreffenden Aufgaben anzuschließen wären. Gelegentlich wird das Rechnen mit Punkten / Vektoren der Ebene durch analytische Aspekte ergänzt, z. B. durch ihre komplexe Multiplikation oder Darstellung in Polarkoordinaten; und natürlich sollte man sich immer ein wenig an Analysis und Geometrie erinnern.

2. Ebene Vielecke

Die Figuren, die im Folgenden erzeugt und untersucht werden, denken wir uns sämtlich im 2-dimensionalen reellen Vektorraum $\mathbb{E}$ (cartesischer Koordinatenraum $\mathbb{R}^2$) gegeben.

(1): Konstruiere zu $p, q \in \mathbb{E}$ den Punkt (Vektor) $p - q \in \mathbb{E}$.

Die von (p, q) gebildete ›Seite‹ ist gleichgerichtet zu der von $(p-q, 0)$ gebildeten ›Seite‹ und kann daher durch $p - q$ repräsentiert werden; $p - q$ heißt deswegen auch *Seitenvektor* zu p, q. Der *Abstand* zweier Punkte / Vektoren $p = (x, y)$, $q = (x', y')$ wird definiert als Länge des zugehörigen Seitenvektors $p - q = (x - x', y - y')$:

$$d(p, q) := \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

Für beliebiges $v \in \mathbb{E}$ gilt $d(p + v, q + v) = d(p, q)$ (Translationsinvarianz des Abstands), und insbesondere: $d(p, q) = d(p-q, 0)$. Man definiert ferner den *Betrag* von $p \in \mathbb{E}$ als $|p| := d(p, 0)$.

Sei $N > 1$ eine ganze Zahl; dann heißen die N-Tupel $(e_1, \ldots, e_N) \in \mathbb{E}^N$ *N-Ecke* in $\mathbb{E}$ (*Vielecke / Polygone mit den Ecken* $e_1, \ldots, e_N$). Polygone, deren Ecken sämtlich zusammenfallen, heißen *trivial*.

(2): Wie viele 3-Ecke kann man aus drei (paarweise verschiedenen) Ecken bilden?

Beim Bearbeiten dieser Aufgabe fällt sofort auf, dass z. B. die Dreiecke $(e_1, e_2.e_3)$ und (e_2, e_3, e_1) formal als verschieden anzusehen sind, obwohl wir sie vom Standpunkt der Geometrie aus identifizieren (wie ganz allgemein alle N-Ecke, die aus einem gegebenen N-Tupel durch zyklische Vertauschungen hervorgehen). Nach dieser Identifizierung würden von den 6 möglichen Dreiecken noch zwei übrig bleiben, nämlich gerade die Repräsentanten für die beiden Orientierungen der Ebene $\mathbb{E}$.

(3): Gib eine Übersicht über alle möglichen Fälle von N-Ecken in $\mathbb{E}$ für $N = 1, 2, 3$.

(4): Wann genau stellt $(e_1.e_2.e_3)$ ein nicht-ausgeartetes Dreieck dar?

Lösung: Die Seitenvektoren $e_1 - e_2,\ e_2 - e_3$ sind linear unabhängig.

(5): Bestimme $(x, y) \in \mathbb{E}$ derart, dass $((1, 0), (0, 1), (x, y))$ ein gleichseitiges Dreieck wird.

Lösung: $x = y = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ oder $x = y = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

(6): Welche Typen von Vierecken sind möglich?

Lösung: Unter anderen folgende: Ausartungen zum Punkt (4-fach), Doppelpunktpaar, ›Dreieck‹ mit einer doppelten Ecke, Viereck mit einspringender Ecke, mit zwei sich überschneidenden Seiten, ohne eine einspringende Ecke (konvex, siehe unten).

(7): Wann stellen vier Punkte ein nicht-ausgeartetes Viereck dar?

Lösung: Je drei der Punkte bilden ein nicht-ausgeartetes Dreieck.

(8): Definiere, wann das Quadrupel (e_1, e_2, e_3, e_4) ein Parallelogramm genannt werden soll.

Lösung: Zwei gegenüberliegende Seiten, z. B. (e_1, e_2) und (e_3, e_4), müssen gleichgerichtet sein, d. h. nach der Bemerkung im Anschluss an Aufgabe (1): $e_1 - e_2 = e_4 - e_3$ (Abb. 3), also $e_1 - e_2 + e_3 - e_4 = 0$.

(9): Welcher Punkt ergänzt $(1,3)$, $(-2,2)$, $(-4,-3)$ zum Parallelogramm?

Lösung: $(-1,-2)$.

(10): Wenn (e_1, e_2, e_3, e_4) ein Parallelogramm ist, was ist dann (e_1, e_2, e_4, e_3)?

(11): Gib (evtl. mit Hilfe der Abstandsfunktion) Definitionen vom Rhombus, Rechteck, Quadrat.

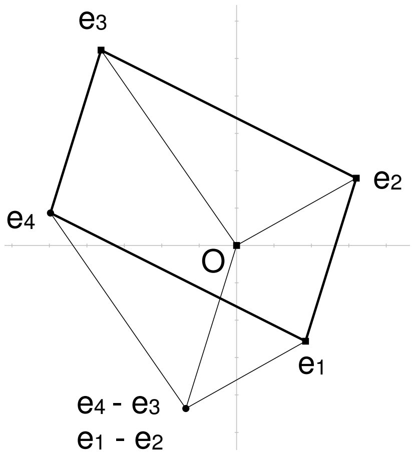


Abb. 3: Zur Definition des Parallelogramms

Sind komplexe Zahlen bekannt, so lassen sich z. B. die Ecken eines regelmäßigen Fünfecks über die komplexen Einheitswurzeln bestimmen:

$$e_k = \exp\left(\frac{2\pi ik}{5}\right) \qquad (k = 0, 1, 2, 3, 4).$$

(12): Wenn $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ ein regelmäßiges Fünfeck ist, was ist dann $(e_1, e_4, e_2, e_5, e_3)$?

Kommen wir noch kurz zum Fall $N = 6$. Ist $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$ ein regelmäßiges Sechseck mit dem Mittelpunkt p, so bildet p mit je drei aufeinanderfolgenden Ecken ein Parallelogramm. Diese Eigenschaft bleibt unter affinen Transformationen erhalten. Die affin-regulären Sechsecke (das sind die affinen Bilder regulärer 6-Ecke) lassen sich also ganz einfach nach Vorgabe dreier Ecken wie folgt aufbauen: Setze $p = e_1 - e_2 + e_3$ und bestimme anschließend e_k so, dass $(p, e_{k-2}, e_{k-1}, e_k)$ ein Parallelogramm wird $(k = 4, 5, 6)$.

(13): Ergänze die Ecken $e_1 = (0,0)$, $e_2 = (1,0)$, $e_3 = (2,1)$ zu einem affin-regulären 6-Eck (auch zeichnerisch darstellen).

Lösung: Es ist $p = (1,1)$, also $e_4 = p - e_2 + e_3 = (2,2)$ und entsprechend $e_5 = (1,2)$, $e_6 = (0,1)$ (Abb. 4).

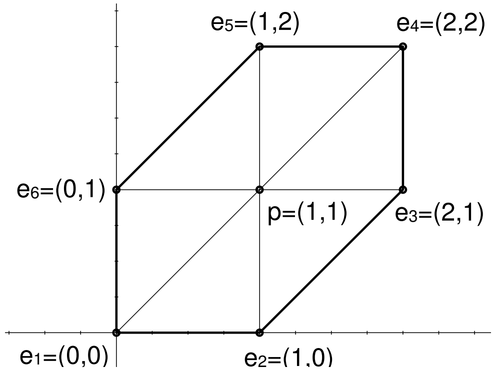


Abb. 4: Aufbau eines affin-regulären 6-Ecks aus Parallelogrammen

(14): Für die Ecken eines affin-regulären 6-Ecks gilt:
$e_1 - e_2 + e_3 - e_4 + e_5 - e_6 = 0.$

Lösung: Nach Konstruktion hat man $e_1 - e_2 + e_3 = e_4 - e_5 + e_6$, woraus die behauptete Gleichung folgt.

Zum Abschluss dieses Abschnitts sollen die Begriffe Teilverhältnis, Ähnlichkeit und Schwerpunkt noch kurz so weit wie nötig wiederholt werden.

Wenn $a, b, c \in \mathbb{E}$ auf einer Geraden liegen, also etwa $c = \lambda a + \mu b$ mit $\lambda + \mu = 1$, so sind natürlich auch $a - c, c - b$ linear abhängig. Im Falle $a - c = k(c - b)$ nennt man k das *Teilverhältnis* (TV) der Punkte a, b, c.

Hier gilt (bei $\lambda \neq 0$): TV $= (1-\lambda) : \lambda$. Für $\lambda = 1/2$ ist c der Mittelpunkt von (a, b), und das Teilverhältnis beträgt 1.

Ist $P = (e_1, \ldots, e_N)$ ein N-Eck in $\mathbb{E}$, so definieren wir zu reellem $\lambda \neq 0$ das Polygon $\lambda P := (\lambda e_1, \ldots, \lambda e_N)$. Die auf die Ecken ausgeübte Abbildung $z \longmapsto \lambda z$ ($z \in \mathbb{E}$) ist eine Streckung mit dem Zentrum 0 und dem Faktor λ.

(15): Bestimme zu $P = ((0,3), (-1,-2), (3,4))$ das 3-Eck λP für $\lambda = 2$ und $\lambda = -1$ (zeichnerische Darstellung).

Die Polygone P und λP sind ähnlich, und das wären sie auch dann noch, wenn z. B. λP zusätzlich gedreht und verschoben würde. Die allgemeinste Form der *Ähnlichkeit* ist eine Drehstreckung mit anschließender Verschiebung (als Abbildung der komplexen Ebene besonders einfach zu schreiben als $z \longmapsto az + b$, $a, b \in \circ$ mit $a \neq 0$).

Ist $P = (e_1, \ldots, e_N)$ ein Polygon in $\mathbb{E}$, so heißt

$$s = s(P) := \frac{1}{N}(e_1 + \cdots + e_N)$$

sein (*Ecken-*)*Schwerpunkt*. Der Schwerpunkt eines 2-Ecks (Seite, Strecke) ist sein Mittelpunkt.

(16): In einem nicht-ausgearteten Dreieck $P = (e_1, e_2, e_3)$ schneiden sich die drei Seitenhalbierenden im Schwerpunkt $s(P)$. Das Teilverhältnis der Punkte $e_1, (e_2 + e_3)/2, s(P)$ beträgt $2 : 1$. Dasselbe gilt jeweils für das TV von $e_2, (e_3 + e_1)/2, s(P)$ sowie $e_3, (e_1 + e_2)/2, s(P)$.

Lösung: Der Schwerpunkt eines Dreiecks lässt sich trivialerweise wie folgt schreiben: $s(P) = \frac{1}{3} \cdot e_1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{e_2+e_3}{2}$.

(17): Wo liegt der Schwerpunkt eines Parallelogramms?

Lösung: Für ein Parallelogramm $P = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ gilt $e_1 + e_3 = e_2 + e_4$, also $s(P) = (e_1 + e_2 + e_3 + e_4)/4 = (2e_1 + 2e_3)/4 = (e_1 + e_3)/2$; entsprechend $s(P) = (e_2 + e_4)/2$. Der Schwerpunkt von P ist also Mittelpunkt der Diagonalen von P. Zugleich ist damit gezeigt, dass sich die Diagonalen im Parallelogramm halbieren.

3. Quadrate

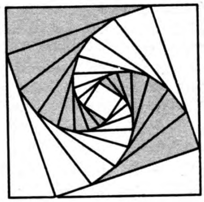


Abb. 5

Es empfiehlt sich, das Studium der Vieleckschachtelungen bei den Quadraten zu beginnen. Eine schöne Übung ist das Zeichnen der Figuren, die bei Menninger [12] »Quadrat-Schnecke« (Abb. 1) und »Quadrat-Fächer« (Abb. 5) heißen. Der Fächer entsteht dadurch, dass die Ecken der Nachfolgequadrate die Seiten ihrer unmittelbaren Vorgänger in einem TV$\neq$ 1 teilen.

(18): Zeichne Quadrat-Schnecke und Quadrat-Fächer. Lässt sich durch Aneinanderlegen von Quadrat-Fächern ein Muster erzeugen analog zu der aus Dreiecken aufgebauten Abb. 2?

Man kann natürlich noch ganz andere Figuren aus einer Quadratschachtelung gewinnen. Der Künstler Kunibert Fritz schuf seine ›Degressive Rotation‹ (schwarz-weiß linear, 60×60 cm, Acryl auf Nessel, 1971) durch das Löschen bestimmter Seiten aus vier Quadratschachtelungen zum Teilverhältnis 1 : 1 (Abb. 6).

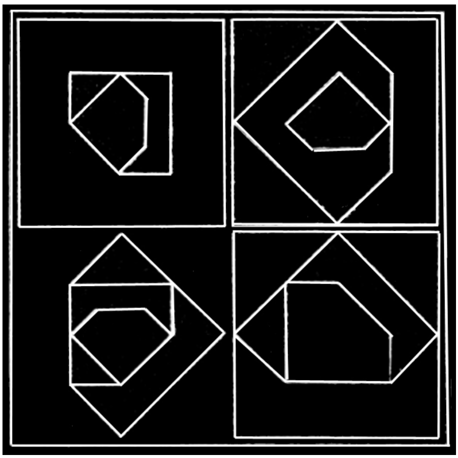


Abb. 6

Wir nehmen für das Folgende an, dass der Schwerpunkt der Quadrate im Ursprung $(0, 0)$ liegt. Dann ist ein Quadrat bereits durch Vorgabe einer seiner Ecken bestimmt.

(19): Sei $Q = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ ein Quadrat und $e_1 = (a, b) \in \mathbb{E}$. Bestimme die übrigen Ecken e_2, e_3, e_4.

Lösung: $e_2 = (-b, a)$, $e_3 = (-a, -b)$, $e_4 = (b, -a)$.

Um einen Schachtelungsschritt zu untersuchen, gehen wir von dem Quadrat mit der Ecke $(a, 0)$ ($a > 0$ fest) aus.

(20): Konstruiere das Quadrat Q mit der Ecke $(a, 0)$ ($a > 0$) und das in Q eingeschachtelte Quadrat Q', dessen Ecken die Seiten von Q im Verhältnis $(1 - \lambda) : \lambda$ mit $0 < \lambda < 1$ teilen.

Lösung: Siehe Abb. 7.

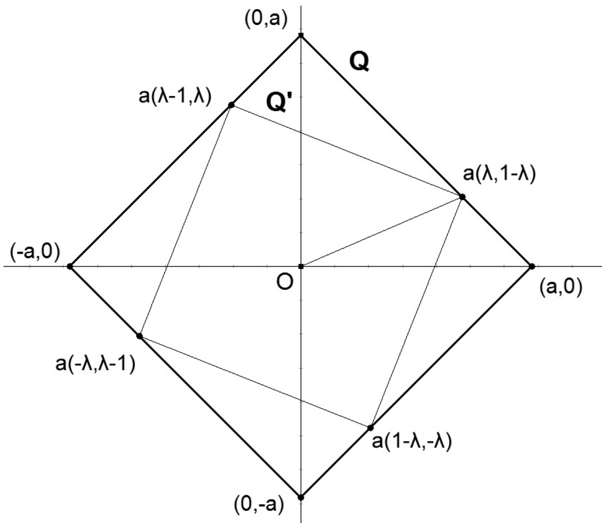


Abb. 7: Erster Schachtelungsschritt beim Quadrat mit TV= $(1 - \lambda) : \lambda$

(21): Welchen Wert hat das Verhältnis der aufeinanderfolgenden 1) Seitenlängen, 2) Radien (= halbe Diagonalen)?

Lösung: Das Verhältnis der Seitenlängen stimmt mit dem der Radien überein. Ist r_0 der Radius von Q, r_1 der Radius von Q', so gilt

$$\frac{r_1}{r_0} = \frac{|a(\lambda, 1-\lambda)|}{|(a,0)|} = \sqrt{1-2\lambda+2\lambda^2}.$$

(22): Folgere aus (21) für $0 < \lambda < 1$ die Ungleichung $2^{-1/2} \leq {r_1}/{r_0} < 1$.

Lösung: Die Funktion $f(\lambda) := 1 - 2\lambda + 2\lambda^2$ hat ein relatives Minimum bei $\lambda = 1/2$, und es gilt $f(1/2) = 1/2$ sowie $f(0) = f(1) = 1$. Für $0 < \lambda \leq 1/2$ ist f streng monoton fallend, für $1/2 \leq \lambda < 1$ streng monoton wachsend.

Bei Fortsetzung der Schachtelung entsteht nach n Schritten ein Quadrat, dessen Ecken von $(0,0)$ den Abstand $r_n = r_{n-1} f(\lambda)^{1/2} = r_0 f(\lambda)^{n/2} = r_0 ({r_1}/{r_0})^n$ besitzen. Die r_n bilden eine geometrische Folge, und nach (22) gilt $r_n \to 0$ für $n \to \infty$, d. h. die Quadratschachtelung konvergiert für $0 < \lambda < 1$ gegen den Schwerpunkt (Mittelpunkt des Quadrats).

Auf welcher Kurve, genauer: auf welchem Streckenzug wandern die Quadratecken gegen den Schwerpunkt ? Eine charakteristische Eigenschaft besteht darin, dass sämtliche Winkel $\delta = \angle(0, e', e)$ ($e =$ alte Ecke, $e' =$ neue Ecke) gleich groß sind. Die Radien schneiden somit den Streckenzug unter konstantem Winkel $\alpha = 180° - \delta$ (Abb. 8).

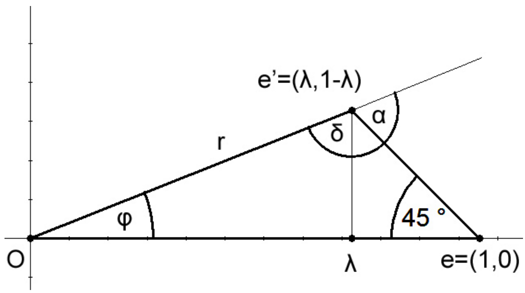


Abb. 8

(23): Bestimme α in Abhängigkeit von λ.

Lösung: Es ist $\alpha = \varphi + 45°$ und $\tan\varphi = (1-\lambda)/\lambda$ (= TV), also

$$\tan\alpha = \tan(\varphi + 45°) = \frac{\tan\varphi + 1}{1 - \tan\varphi} = \frac{1}{2\lambda - 1}$$
$$\alpha = \arctan\frac{1}{2\lambda - 1}, \quad \text{wobei } \lambda \neq \frac{1}{2}.$$

Für $\lambda = \frac{1}{2}$ ist $\alpha = 90°$ (Quadrat-Schnecke in Abb. 1).

Je näher λ bei 1 liegt (und damit TV bei 0), desto besser approximiert der Streckenzug eine Kurve, die sämtliche Radien unter demselben Winkel $\alpha = \arctan 1 = 45°$ schneidet. Es handelt sich dabei um eine *logarithmische Spirale*. In der Natur kommt sie häufig vor (z. B. an den Windungen von Muscheln und Schnecken, in der Anordnung von Pflanzensamen, bei Spinnennetzen). Sie entsteht auch als Bewegungsspur jener berühmten fiktiven Käfer der Unterhaltungsmathematik, die in den Ecken eines regelmäßigen Polygons hocken und dann plötzlich ihrem jeweiligen ›Vordermann‹ hinterherlaufen.

(24): Wie groß ist der Schnittwinkel α der logarithmischen Spirale beim regelmäßigen N-Eck?

Lösung: α = halber Innenwinkel $= 90° \cdot \frac{N-2}{N}$.

Man kann zeigen, dass für eine logarithmische Spirale mit dem Schnittwinkel α und dem Anfangsradius r_0 folgende Darstellung in Polarkoordinaten (r, φ) gilt:

$$r = r_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\varphi}{\tan\alpha}}.$$

Das geometrische Abnehmen der Radien geht also bei kleiner werdendem Teilverhältnis in ein stetiges exponentielles Abnehmen über.

4. Schachtelungstransformation

Unter der allgemeinen Schachtelungstransformation ist der Übergang von einem Polygon $P = (e_1, \ldots, e_N)$ zu einem Polygon $P' = (e'_1, \ldots, e'_N)$ zu verstehen, dessen Ecken e'_k die Seiten $(e_k, e_{(k \bmod N)+1})$ in einem vorgegebenen Verhältnis $\mu : \lambda$ mit $\mu = 1 - \lambda$ teilen ($1 \leq k \leq N$). Das heißt ausgeschrieben:

$$
\begin{aligned}
e_1' &= \lambda e_1 + \mu e_2, \\
e_2' &= \lambda e_2 + \mu e_3, \\
&\vdots \\
e_N' &= \lambda e_N + \mu e_1.
\end{aligned}
$$

Schreibt man N-Ecke als Spaltenvektoren, so lassen sich diese Gleichungen leicht als eine einzige Gleichung in Matrixform notieren:

$$
\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ \vdots \\ e_N' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \mu & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ \mu & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_N \end{pmatrix}.
$$

Die hier vorkommende Matrix nennt man *zyklisch*, da ihre Zeilen nacheinander aus ihrer ersten Zeile durch zyklisches Verschieben um eine Spaltenposition nach rechts entstehen. Man kann also eine zyklische Matrix Z einfach schon durch Angabe ihrer ersten Zeile festlegen, hier etwa ausgedrückt mittels der Notation

$$
Z = Z(\lambda, \mu, 0, \dots, 0).
$$

(25): Was ist $Z(1, 0, \dots, 0)$?

(26): Welcher Eintrag steht in Zeile j und Spalte k von $Z(a_1, a_2, \dots, a_N)$?

Lösung: a_{k-j+1} (die Indizes als kleinste positive Reste modulo N zu nehmen).

(27): Berechne das Matrixprodukt $Z(1, 2, 3) \cdot Z(1, -2, 3)$.

Lösung: $Z(1, 9, 2)$.

(28): Das Produkt zweier zyklischer Matrizen ist wieder eine zyklische Matrix.

Die Matrixschreibweise erweist sich als praktisch, wenn eine Schachtelung (zum selben TV) wiederholt durchzuführen ist; nach n Schritten entsteht dann das Polygon

$$P^{(n)} := Z(\lambda, \mu, 0, \dots, 0)^n P,$$

dessen Ecken wir im Folgenden mit $e_k^{(n)}$ bezeichnen. Man kann also relativ einfach die Koordinaten der neuen Ecken rechnerisch bestimmen.

(29): Bestimme bis zur Wiederholungszahl $n = 5$ die Übergangsmatrizen beim N-Eck für $N = 3, 4, 5$ sowie für die Teilverhältnisse $1 : 1$ und $1 : 2$.

Lösung: Bei TV $= 1 : s$ lautet die Matrix der Schachtelungstransformation

$$\frac{1}{s+1} Z(s, 1, 0, \dots, 0).$$

Es genügt also, die Potenzen von $Z(s, 1, 0, \dots, 0)$ zu berechnen. Die nachstehende Tabelle enthält jeweils die erste Matrixzeile von $Z(s, 1, 0, \dots, 0)^n$ für TV $= 1 : 1$ in der oberen und für TV $= 1 : 2$ in der unteren Feldhälfte.

N			3				4					5
$n = 1$	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0
	2	1	0	2	1	0	0	2	1	0	0	0
$n = 2$	1	2	1	1	2	1	0	1	2	1	0	0
	4	4	1	4	4	1	0	4	4	1	0	0
$n = 3$	2	3	3	1	3	3	1	1	3	3	1	0
	9	12	6	8	12	6	1	8	12	6	1	0
$n = 4$	5	5	6	2	4	6	4	1	4	6	4	1
	24	21	24	17	32	24	8	16	32	24	8	1
$n = 5$	11	10	11	6	6	10	10	2	5	10	10	5
	72	66	69	42	81	80	40	33	80	80	40	10

(30): $s(P') = s(P)$

Lösung: Wir erhalten nach Definition des Schwerpunkts:

$$s(P') = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} e'_k = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(\lambda e_k + \mu e_{k+1})$$
$$= \frac{1}{N}\left(\lambda \sum_{k=1}^{N} e_k + \mu \sum_{k=1}^{N} e_k\right) = \frac{\lambda+\mu}{N}\sum_{k=1}^{N} e_k = s(P).$$

Es ergibt sich sofort: Alle in P eingeschachtelten Polygone $P^{(n)}$ haben denselben Schwerpunkt wie P. Man kann zudem zeigen, dass für wachsendes n die Ecken von $P^{(n)}$ gegen $s(P)$ wandern, genauer: $d(s(P), e_k^{(n)}) \to 0$ für $n \to \infty$ ($k = 1, 2, \ldots, N$) (vgl. [11]). An Quadraten haben wir dies schon gesehen, und im Folgenden verifizieren wir es an einem weiteren Sonderfall.

5. Dreiecke

Wir betrachten zunächst beliebige Dreiecke $D = (e_1, e_2, e_3)$, für die wir ohne Einschränkung $s(D) = 0$, d. h. $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ voraussetzen.

(31): Für TV$= 1 : 1$ gilt: $(e'_1, e'_2, e'_3) = -\frac{1}{2}(e_3, e_1, e_2)$.

Lösung: $(e'_1, e'_2, e'_3) = \left(\frac{e_1+e_2}{2}, \frac{e_2+e_3}{2}, \frac{e_3+e_1}{2}\right) = \frac{1}{2}(-e_3, -e_1, -e_2)$.

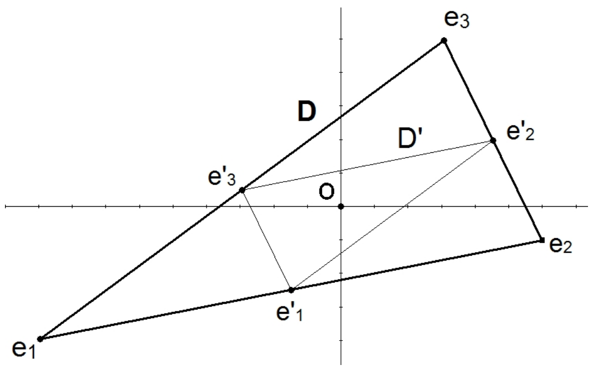


Abb. 9: Dreieck D mit Seitenmittendreieck D'

Die Ecken von D' entstehen aus den Ecken von D durch Punktspiegelung zusammen mit einer Stauchung zum Faktor 1/2; also ist D' zentrisch ähnlich zu (e_3, e_1, e_2), was nach zyklischer Vertauschung der Ecken identisch ist mit D (vgl. dazu Aufgabe (2)).

(32): Die Seite (e_1', e_2') ist gleichgerichtet (und damit parallel) zur Seite (e_1, e_3) und halb so lang wie diese.

Lösung: $e_1' - e_2' = \frac{1}{2}(e_1 + e_2) - \frac{1}{2}(e_2 + e_3) = \frac{1}{2}(e_1 - e_3)$.
Auf ähnlich einfache Weise lassen sich noch weitere Eigenschaften an der Figur von Abb. 9 entdecken.

(33): Suche weitere Paare gleichgerichteter Seiten. – Zeige, dass (e_1, e_1', e_2', e_3') ein Parallelogramm ist. Gibt es noch mehr Parallelogramme? – Suche noch andere Dreiecke (mit Ecken aus e_k, e_k'), die zu D ähnlich sind. – Zeige: Umfang von $D' = (1/2)\times$ Umfang von D.

Aus der letzten Behauptung von (33) ergibt sich durch Induktion sofort: Umfang von $D^{(n)} = 2^{-n}\times$ Umfang von D. Also konvergiert der Umfang von $D^{(n)}$ gegen 0 für $n \to \infty$; damit gilt auch $|e_k^{(n)}| \to 0$ für $n \to \infty$ $(k = 1, 2, 3)$.

(34): Konstruiere die Dreiecke $Z(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)^2 D$ und $Z(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)^3 D$; untersuche ferner den Einfluss des Exponenten n auf die Art der Ähnlichkeit von $D^{(n)}$ zu D.

(35): Untersuche die Schachtelung $Z(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)^n D$

Lösung: Zunächst fertigt man eine entsprechende Zeichnung an (Abb. 10). Zwei Klassen jeweils untereinander ähnlicher Dreiecke entstehen, die eine gebildet aus den Dreiecken $D, D^{(2)}, D^{(4)}, \ldots$, die andere aus den $D^{(1)}, D^{(3)}, D^{(5)}, \ldots$. Mit den Werten aus der Tabelle auf S. 23 lässt sich das genauer verifizieren, z. B.:

$$\begin{pmatrix} e_1^{(2)} \\ e_2^{(2)} \\ e_3^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4e_1 + 4e_2 + e_3 \\ e_1 + 4e_2 + 4e_3 \\ 4e_1 + e_2 + 4e_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} e_3 \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix},$$

d. h. $D^{(2)}$ und D sind (zentrisch) ähnlich zum Faktor $1/3$. Ferner sind z. B. die Seiten (e_1, e_2) und $(e_3^{(2)}, e_2^{(2)})$ gleichgerichtet, da

$$e_3^{(2)} - e_2^{(2)} = \frac{1}{9}(4e_1 + e_2 + 4e_3 - e_1 - 4e_2 - 4e_3) = \frac{1}{3}(e_1 - e_2).$$

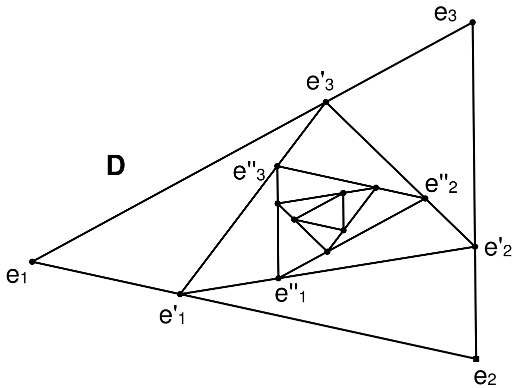


Abb. 10: Dreieckschachtelung zum TV $= 1 : 2$

Die Ergebnisse zu (31) und (35) könnten einen zu der Vermutung verleiten: Eine Dreieckschachtelung zu TV $= 1 : s$ erzeugt s Ähnlichkeitsklassen (mit dem Faktor $1/s+1$).

(36): Ist die Vermutung richtig für $s = 3$, für $s = 4$?

Lösung: Der Lösung zu (35) lässt sich entnehmen, dass genau 2 Elemente einer Zeile von $Z(\frac{s}{s+1}, \frac{1}{s+1}, 0)^n$ übereinstimmen müssen, damit $D^{(n)}$ und D ähnlich sind. Bei $s = 3$ erhalten wir aber

$$Z(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0)^3 = Z(0.4375, 0.421875, 0.140625),$$

die Dreiecke D und $D^{(3)}$ sind demnach bloß ›angenähert ähnlich‹. Die Abweichung ist in einer Zeichnung nur schwer auszumachen, und sie schwindet bei zunehmender Schachtelungstiefe:

$$Z(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0)^6 = Z(0.31005859, 0.38891602, 0.30102539).$$

Die Vermutung ist also für TV $= 1 : 3$ zwar falsch, aber approximativ richtig, d. h. es entstehen 3 Klassen von ›im Limes ähnlichen‹ Dreiecken: $D^{(k)}, D^{(k+3)}, D^{(k+6)}, \ldots$ für $k = 0, 1, 2$.

Im Fall TV $= 1 : 4$ treffen wir ebenso nur auf approximative Ähnlichkeit:

$$Z(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, 0)^4 = Z(0.4352, 0.4112, 0.1536),$$
$$Z(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, 0)^8 = Z(0.31571968, 0.38150144, 0.30277888).$$

Nicht nur beim Dreieck, auch bei anderen Polygonen ist dies der Normalfall. Eine Ausnahme bilden die regulären N-Ecke, wo die Schachtelungstransformation zu jedem Teilverhältnis wieder reguläre N-Ecke hervorbringt (vgl. als Beispiel dazu etwa Abb. 19).

(37): Bestimme das gleichseitige Dreieck $D_0 = (e_1, e_2, e_3)$ mit $e_1 = (1, 0)$, dessen Schwerpunkt im Nullpunkt liegt.

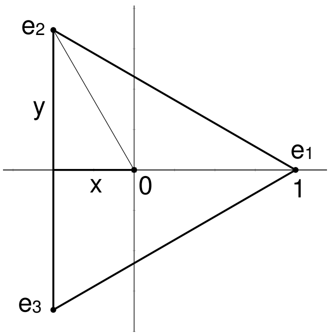


Abb. 11

Lösung: Wir schreiben ansatzweise $e_2 = (x, y)$. Nach (16) ist dann $|x| = 1/2$, und aus $x^2 + y^2 = |e_2|^2 = 1$ folgt $y = \sqrt{3}/2$. Also erhalten wir $e_2 = (-1/2, \sqrt{3}/2)$ und $e_3 = (-1/2, -\sqrt{3}/2)$ (vgl. Abb. 11). Die Eckpunkte des so bestimmten Dreiecks D_0 sind im Komplexen nichts anderes als die 3-ten Einheitswurzeln w^0, w^1, w^2, wobei

$$w = \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{3}} = \cos 120^\circ + i \cdot \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

(38): Bestätige die Gleichseitigkeit von $D_0' = Z(\lambda, \mu, 0)D_0$.

Lösung: Die Ecken von D_0' berechnet man direkt:

$$\begin{aligned} e_1' &= \frac{1}{2}(3\lambda - 1, -\lambda\sqrt{3} + 3), \\ e_2' &= \frac{1}{2}(-1, 2\lambda\sqrt{3} - 3), \\ e_3' &= \frac{1}{2}(-3\lambda + 2, -\lambda\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$d(e_1', e_2') = d(e_2', e_3') = d(e_3', e_1') = \sqrt{g(\lambda)} \cdot \sqrt{3},$$

wobei $g(\lambda) := 1 - 3\lambda + 3\lambda^2$. Da $\sqrt{3}$ die Seitenlänge von D_0 ist, haben wir in $g(\lambda)^{1/2}$ gerade den Ähnlichkeitsfaktor der Transformation $Z(\lambda, 1-\lambda, 0)$; es gilt damit auch $|e_k'| = g(\lambda)^{1/2}|e_k|$ und $|e_k^{(n)}| = g(\lambda)^{n/2}|e_k|$. Eine Diskussion von $g(\lambda)$ analog zu der von $f(\lambda)$ in Aufgabe (22) liefert dann auch hier wieder die Konvergenz der Ecken gegen den Schwerpunkt.

Die Regularität eines Dreiecks lässt sich auch auf andere Weise ausdrücken (durch Zurückführung auf das gleichseitige Dreieck D_0):

(39): (e_1, e_2, e_3) bildet ein gleichseitiges Dreieck genau dann, wenn $e_1 + e_2 w + e_3 w^2 = 0$.

Lösung: 1. Ein beliebiges gleichseitiges Dreieck (e_1, e_2, e_3) geht aus dem ›Prototyp‹ $D_0 = (1, w, w^2)$ durch eine geeignete Ähnlichkeitsabbildung $z \mapsto az + b$ mit $a, b \in \circ$, $a \neq 0$, hervor. Das betreffende Bild von D_0 hat demnach die Ecken $e_1 = a + b$, $e_2 = aw + b$ und $e_3 = aw^2 + b$. Für diese e_k rechnet man $e_1 + e_2 w + e_3 w^2 = 0$ unmittelbar nach, indem man $1 + w + w^2 = 0$ beachtet. – 2. Gelte nun umgekehrt $e_1 + e_2 w + e_3 w^2 = 0$. Wir subtrahieren diese Gleichung jeweils von $e_1 + e_1 w + e_1 w^2 = 0$ und $e_2 + e_2 w + e_2 w^2 = 0$ und erhalten $e_2 - e_1 = (e_1 - e_3)w$ bzw. $e_2 - e_1 = (e_3 - e_2)w^2$; es ist also $d(e_1, e_2) = |e_2 - e_3| \cdot |w| = d(e_1, e_3)$ und aus der zweiten Identität entsprechend $d(e_1, e_2) = |e_3 - e_3| \cdot |w^2| = d(e_2, e_3)$.

6. Vierecke

Betrachten wir zunächst die Schachtelung bezüglich der Seitenmitten eines beliebigen Vierecks. Abb. 12 zeigt ein nicht-konvexes Viereck P zusammen mit seinem Seitenmittenparallelogramm P' sowie zwei weiteren Nachfolgern:

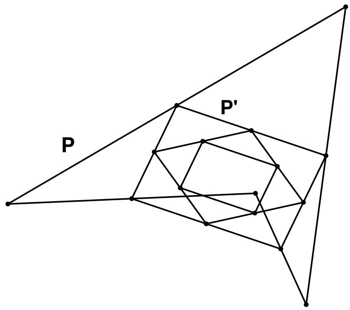


Abb. 12

(40): Das Seitenmittenviereck P' eines beliebigen Vierecks P ist ein Parallelogramm (Satz von Varignon).

Lösung: $e_1'-e_2'+e_3'-e_4' = \frac{1}{2}((e_1+e_2)-(e_2+e_3)+(e_3+e_4)-(e_4+e_1)) = 0$, also ist $P' = (e_1', e_2', e_3', e_4')$ ein Parallelogramm (nach Aufgabe (8)).

Hieraus folgt übrigens die bekannte Tatsache, dass man mit kongruenten Kopien eines beliebigen Vierecks die Ebene pflastern kann (Hinweis von A. Speiser auf dem Convegno Matematico in Rom 1942). In das vorgegebene Viereck P konstruieren wir das Varignon-Parallelogramm P' (schraffiert) und parkettieren mit seinen Kopien die Ebene. Die weißen Felder dieses Schachbrettmusters setzen sich (bei konvexem P) aus den Teilen von P zusammen, die das innere Parallelogramm überragen. Beim Zeichnen erweisen sich die Ecken des Parallelogramm-Parketts als hilfreich.

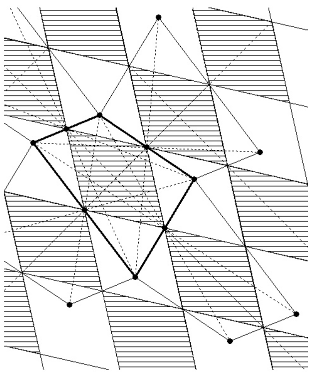


Abb. 13

Kommen wir wieder zurück zur Schachtelung selbst. Um ihren weiteren Effekt auf ein Viereck zu erkennen, genügt natürlich jetzt die Betrachtung von Parallelogrammen. Was wir hier zu erwarten haben, zeigt bereits eine grafische Realisierung der ersten paar Nachfolger (siehe Abb. 12).

(41): Bei einem Parallelogramm P erzeugt eine Schachtelung zum Teilverhältnis $1 : 1$ zwei Klassen untereinander (zum Faktor 1/2) ähnlicher Parallelogramme: $P, P^{(2)}, P^{(4)}, \ldots$ und $P^{(1)}, P^{(3)}, P^{(5)}, \ldots$.

Lösung: Wie bei den Dreiecken setzen wir ohne Einschränkung $s(P) = 0$ voraus und entnehmen der Tabelle auf S. 23:

$$\begin{pmatrix} e_1^{(2)} \\ e_2^{(2)} \\ e_3^{(2)} \\ e_4^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e_1 + 2e_2 + e_3 \\ e_2 + 2e_3 + e_4 \\ e_1 + e_3 + 2e_4 \\ 2e_1 + e_2 + e_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_1 \end{pmatrix}.$$

Was passiert bei einem anderen Teilverhältnis, z. B. TV$= 1 : 2$? – In einer Schachtelung am Dreieck entstehen zwei Ähnlichkeitsklassen (vgl. (35)), am Viereck entstehen drei solcher Klassen, allerdings gilt auch hier die Ähnlichkeit nur ›im Limes‹. Man erkennt dies andeutungsweise schon anhand der Zeile $n = 3$ von Spalte $N = 4$ der erwähnten Tabelle.

Was geschieht schließlich mit nicht-konvexen Vierecken? – Von einer bestimmten Schachtelungstiefe an sind sämtliche Nachfolger konvex. Natürlich gilt allgemein: Ist P ein konvexes Polygon, so ist auch sein Nachfolger P' konvex.

7. Andere Polygone

Für Polygone der Eckenzahl ≥ 5 werden die Verhältnisse komplizierter, und es lassen sich neue Erkenntnisse gewinnen. Schon 5-Ecke sind alles andere als harmlos.

(42): Sei P ein Pentagramm. Was ist dann P' (bezüglich TV$= 1 : 1$)?

Lösung: $P = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ ist ein Pentagramm, wenn die Eckenfolge $(e_1, e_4, e_2, e_5, e_3)$ ein regelmäßiges 5-Eck bildet (siehe Aufgabe (12)). Es lässt sich zeigen, dass dann auch $(e'_1, e'_4, e'_2, e'_5, e'_3)$ ein regelmäßiges 5-Eck ist. Der Nachfolger P' ist daher ein Pentagramm (Abb. 14). Dieses Phänomen läuft der intuitiven Einsicht zuwider, wonach die Schachtelungstransformation die Polygone glättet (vgl. Abb. 15).

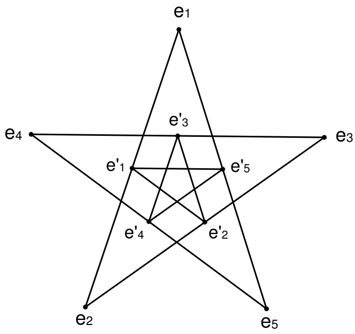


Abb. 14

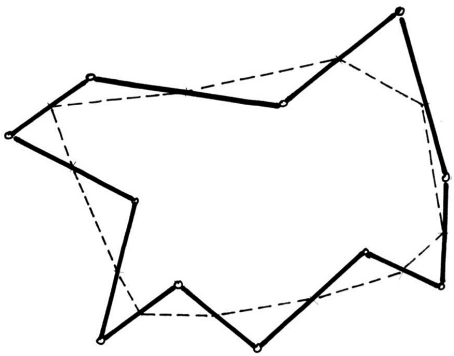


Abb. 15: Glättende Schachtelung

Das folgende Beispiel (Aufgabe (43)) zeigt, dass ein solches Verhalten nicht notwendig voraussetzt, dass das Ausgangspolygon sich überschneidende Seiten besitzt (siehe dazu Abb. 16).

(43): Konstruiere das Fünfeck $P = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ mit $e_k = (x_k, y_k)$, $1 \leq k \leq 5$, und $x_1 = x_3 = 0$, $x_4 = x_5 = 1$, $x_2 = (1 + \sqrt{5})/2$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_4 = (7 - \sqrt{5})/2$ und $y_5 = (1 + \sqrt{5})/4$. Untersuche die Schachtelung zum TV $= 1 : 1$.

Lösung: Sind p_1, p_2, p_3 der Größe nach die Projektionen (parallel zur y-Achse) der Ecken auf die x-Achse, so gilt $\mathrm{TV}(p_1, p_2, p_3) = (1 + \sqrt{5})/2$.

P hat diese Eigenschaft, und sie vererbt sich auf sämtliche Nachfolger; beispielsweise rechnet man leicht nach, dass

$$\frac{x_1' - x_3'}{x_4' - x_1'} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ferner hat $P^{(n)}$ sich überschneidende Seiten genau dann, wenn n ungerade ist. Die Schachtelung führt somit niemals zu einer Glättung.

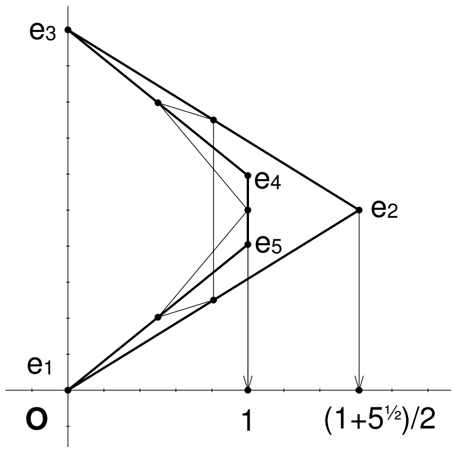


Abb. 16

Solche Beispiele sind allerdings die Ausnahme. In den meisten Fällen werden die Nachfolger irgendwann konvex und dem affinen Bild eines konvexen regulären N-Ecks immer ähnlicher (vgl. Abb. 17, Abb. 20). Ein hinreichendes und notwendiges Kriterium dafür ist bekannt (vgl. [4]); es liegt aber nicht im Rahmen der hier verwendeten elementaren linearen Geometrie.

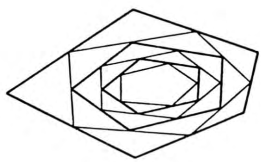


Abb. 17

(44): Kennzeichne die Nachfolger eines affin-regulären 6-Ecks unter der Schachtelungstransformation $Z(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0)$.

Lösung: Es entstehen zwei Ähnlichkeitsklassen. Sei $P = (e_1, \ldots, e_6)$ ein affinreguläres 6-Eck und $p = e_1 - e_2 + e_3$ sein Mittelpunkt (vgl. (13)). Dann sind $(p, e_{k-2}, e_{k-1}, e_k)$ $(k = 3, 4, 5, 6)$ Parallelogramme. Da zudem $(p, e'_{k-2}, e'_{k-1}, e'_k)$ Parallelogramme sind, ist P' ebenfalls affinregulär. Hier etwa der Nachweis für $k = 3$: Aus $p = e_1 - e_2 + e_3$ und $p = e_2 - e_3 + e_4$ folgt $p = \frac{e_1+e_4}{2}$. Damit ergibt sich $p - e'_1 + e'_2 - e'_3 = p - \frac{e_1}{2} - \frac{e_4}{2} = 0$.

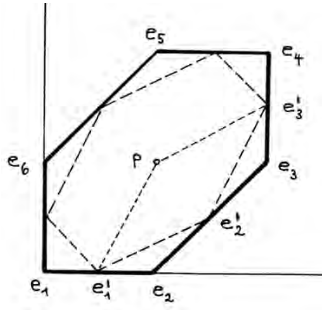


Abb. 18

In diesem Stadium der Problemerkundung ist die Darstellung der Figuren auf einem grafischen Bildschirm vorteilhaft. Die meisten der heute [1983] verbreiteten Mikrocomputer verfügen über entsprechende Grafikfunktionen, mit denen sich ästhetisch anmutende Schachtelungsformen realisieren und Schachtelungen an komplizierteren Polygonen bequem verfolgen lassen.

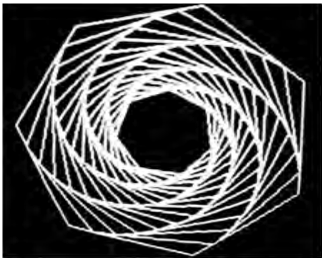


Abb. 19

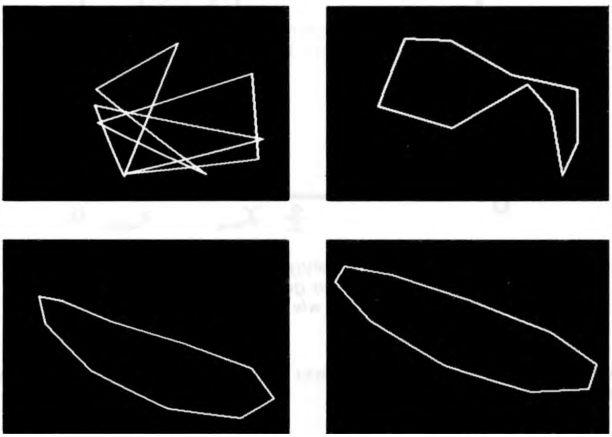


Abb. 20

Abb. 19 (Schachtelung am regulären 7-Eck mit TV = 1 : 5) und Abb. 20 (Etappen in der Entwicklung eines zufallserzeugten 10-Ecks unter $Z(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \ldots))$ sind mit Hilfe eines PASCAL-Programms für den Apple II entstanden.[2] Da die bei wiederholtem Schachteln entstehenden Figuren mitunter sehr schnell schrumpfen, muss eine Lupenfunktion implementiert werden, die es gestattet, ein beliebiges Polygon in maximaler Größe auf den Bildschirm zu bringen. Dies ist eine lehrreiche Übung in linearer Geometrie.

(45): Sei R das Rechteck (der ›viewport‹ des Bildschirms) mit den Ecken $(0,0)$, $(a,0)$, (a,b), $(0,b)$ und $P = (e_1, \ldots, e_N)$ ein ganz in R gelegenes Polygon mit $e_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Gesucht ist ein zu P (drehungsfrei) ähnliches Polygon $\overline{P}$ in R mit möglichst großem Streckungsfaktor k.

Lösung: Wir schließen P in das kleinstmögliche Rechteck R_0 ein:

$$R_0 = ((x_{\min}, y_{\min}), (x_{\max}, y_{\min}), (x_{\max}, y_{\max}), (x_{\min}, y_{\max})), \quad \text{wobei}$$
$$x_{\min} = \min x_i, \quad y_{\min} = \min y_i, \quad x_{\max} = \max x_i, \quad y_{\max} = \max y_i.$$

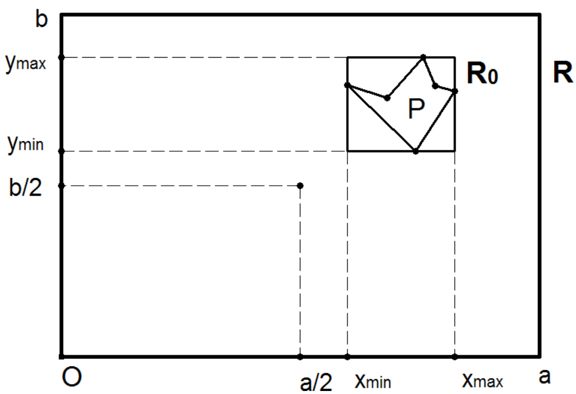


Abb. 21

Der Streckfaktor k soll nun möglichst groß und so gewählt werden, dass $k \cdot R_0$ noch ganz in R liegt. Dazu verschieben wir zunächst den Schwerpunkt

[2] Die Software wurde am Seminar für Mathematik und ihre Didaktik (Pädagogische Fakultät der RWTH Aachen) entwickelt.

von P nach $(0, 0)$ und strecken anschließend um den Faktor

$$k := \min\left(\frac{a}{x_{\max} - x_{\min}}, \frac{b}{y_{\max} - y_{\min}}\right).$$

Der Mittelpunkt von R_0 befindet sich jetzt in $k \cdot (s(R_0) - s(P))$; wenn wir nun noch in den Mittelpunkt von R verschieben, so ergeben sich insgesamt die Transformationsgleichungen ($1 \leq i \leq N$):

$$\begin{aligned}\overline{e}_i &= k \cdot (e_i - s(P)) - \left[k \cdot (s(R_0) - s(P)) - \frac{1}{2}(a, b)\right] \\ &= \frac{1}{2}(a, b) + k \cdot (e_i - s(R_0)).\end{aligned}$$

Ausführlicher erhalten wir in Koordinatenschreibweise:

$$\begin{aligned}\overline{x}_i &= \frac{a}{2} + k \cdot \left(x_i - \frac{x_{\min} + x_{\max}}{2}\right), \\ \overline{y}_i &= \frac{b}{2} + k \cdot \left(y_i - \frac{y_{\min} + y_{\max}}{2}\right).\end{aligned}$$

Es ist $\overline{P} = (\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_N)$ das gesuchte vergrößerte Polygon.

Hinweise zur Literatur

Polygone als zyklisch geordnete N-Tupel von Punkten werden (vor allem für $N = 3, 4, 6$) von Bachmann/Boczek in [1] untersucht. In [2] findet man dann eine entsprechende Theorie mit elementaren algebraischen Mitteln entwickelt. Eine Fülle (gelöster) einschlägiger Konstruktionsaufgaben enthält [10]. Für die standardmäßigen affinen Begriffe und Sätze verweise ich auf Coxeter [8] (besonders S. 98 ff, 182 f, 241 f, 258 ff), und für den Schwerpunktsbegriff auf [10], S. 71 ff.

Zu den schönen Schachtelkonstruktionen mit Quadraten regen [3] und [12] an. Das ausführliche Buch [9] von Davis enthält u. a. zahlreiche Aufgaben zum Dreieck; instruktiv sind darin ferner die Illustrationen, vor allem die Nachfolgersequenz eines ziemlich irregulären Vielecks (S. 126-130). Gute Abbildungen finden sich auch bei Cadwell [5], [6].

Zur mathematischen Analyse der Vieleckschachtelung haben mehrere Autoren (wie es scheint häufig unabhängig voneinander) Beiträge geliefert. Huston [11] beweist auf einfache Weise die Konvergenz der Seitenmittelpunktspolygone gegen den Schwerpunkt. Schoenberg [13] stellt die Ecken eines N-Ecks als endliche Fourierreihe nach den N-ten Einheitswurzeln dar und gewinnt damit ein hinreichendes und notwendiges Konvergenzkriterium für den allgemeineren Fall, dass das Nachfolgerpolygon durch eine beliebige zyklische Transformation entsteht. In diese Richtung geht auch Cadwell [5] und [6], wobei hier zusätzlich noch die Ähnlichkeitsverhältnisse studiert werden (vgl. dazu auch die neuere Arbeit von Clarke [7]). Einer der am besten lesbaren Aufsätze zu dem Thema ist [4]. Die Autoren geben eine vollständige Antwort auf die Frage, welche Polygone konvexe Nachfolger besitzen. Davis [9] hat die bisher bekannten Ergebnisse dargestellt und zum Teil noch weiter verallgemeinert. Die neueste Arbeit stammt von Shapiro [15]; sie enthält eine vollständige Analyse des Zusammenhangs zwischen dem Teilverhältnis einer Schachtelung und den Ähnlichkeitsbeziehungen.

Literatur

1. Bachmann, F. / Bozeck, J.: Punkte, Vektoren, Spiegelungen. In: Behnke / Bachmann / Fladt (Hrsg.), *Grundzüge der Mathematik*, Bd. II, Teil A, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1967, S. 30-65.
2. Bachmann, F. / Schmidt, E.: *n-Ecke.* Bibliographisches Institut: Mannheim; Wien; Zürich 1970.
3. Baravalle, H. von: *Geometrie als Sprache der Formen.* Verlag Freies Geistesleben: Stuttgart 1963.
4. Berlekamp, E. R. / Gilbert, E. N. / Sinden, F. W.: A Polygon Problem. In: *Amer. Math. Monthly* 72 (1965), 233-241.
5. Cadwell, J. H.: A Property of Linear Cyclic Transformations. In: *The Mathematical Gazette* 37 (1953), 85-89.
6. Cadwell, J. H.: *Topics in Recreational Mathematics.* Cambridge University Press 1970 (darin Kapitel 3: Nested Polygons).
7. Clarke, R. J.: Sequences of Polygons. In: *Math. Magazine* 52 (1979), 102-105.
8. Coxeter, H. S. M.: *Unvergängliche Geometrie.* Birkhäuser: Basel und Stuttgart 1963.

9. Davis, Ph. J.: *Circulant Matrices.* John Wiley & Sons, Inc.: New York; Toronto 1979.
10. Golowina, L. I. / Jaglom, I. M.: *Vollständige Induktion in der Geometrie.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften: Berlin 1973.
11. Huston, R. E.: ›Solution‹ für Problem 3547 (von M. Rosenman). In: *Amer. Math. Monthly* 40 (1933), 184-185.
12. Menninger, K.: *Zwischen Raum und Zahl. Mathematische Streifzüge.* Ullstein: Frankfurt am Main 1960.
13. Schoenberg, I. J.: The Finite Fourier Series and Elementary Geometry. In: *Amer. Math. Monthly* 57 (1950), 390-404.
14. Schreiber, A.: Iterative Prozesse. In: *Mathematische Semesterberichte* 31/1 (1984), 95-119 [in überarbeiteter Fassung wiederabgedruckt in A. Schreiber, *Didaktische Schriften zur Elementarmathematik*, Logos-Verlag: Berlin 2014].
15. Shapiro, D. B.: A Periodicity Problem in Plane Geometry. In: *Amer. Math. Monthly* 91 (1984), 97-108.

Bemerkungen zur Dreiecksungleichung[1]

Die Dreiecksungleichung (DU) besagt, dass zwei Seiten eines beliebigen Dreiecks zusammen nicht länger sind als die dritte. Daneben gibt es eine ebenfalls DU genannte Ungleichung für die Betragsfunktion. Manchmal ist nicht wirklich klar, was beide Beziehungen miteinander zu tun haben. Dies wollen wir kurz erläutern. Wir berühren ferner die Frage, ob und inwieweit die DU (für Dreiecke) zu beweisen sei; auch auf Anwendungsaufgaben zur DU wird hingewiesen.

Die DU lässt sich verschärfen, wenn man eine Höhe im Dreieck ins Spiel bringt. Es ergeben sich einfache Ungleichungen (in Form von Abschätzungen) für den Überschuss $(a + b) - c$ zweier Dreiecksseiten über die dritte. Im allgemeinen Fall erhält man eine notwendige Bedingung mit Hilfe der Jensen-Ungleichung. Dieses Thema eignet sich daher (erst) für die Sekundarstufe II.

---

[1] Zusammen mit Emese T. Vargyas, in: *Der Mathematikunterricht*, Jg. 55, Heft 5 (2009), 59-63.

Die Dreiecksungleichung

Die bekannte DU für die Betragsfunktion ist eine allgemeingültige Beziehung für beliebige reelle Zahlen x, y:

$$|x + y| \leq |x| + |y|. \tag{1}$$

(1) wird häufig durch direkten Rückgriff auf die Definition des Absolutbetrags hergeleitet. Auf den ersten Blick ist noch gar nicht zu sehen, was diese Ungleichung mit Dreiecken zu tun haben könnte. Um diesen einfachen Zusammenhang aufzudecken, soll zunächst einmal die DU im engeren Sinn der Elementargeometrie (der Ebene) formuliert werden.

Dazu denken wir uns ein beliebiges Dreieck ABC gegeben und dessen Seiten(längen) wie üblich mit a, b, c bezeichnet. Dann gilt:

$$c \leq a + b. \tag{2}$$

In bündiger Wortfassung: Die Summe zweier Dreiecksseiten ist größer oder gleich der dritten Seite. – Der Gleichheitsfall tritt genau dann ein, wenn $C \in \overline{AB}$, d. h. C auf der Strecke $\overline{AB}$ liegt.

Tatsächlich lässt sich (1) aus (2) gewinnen (und die Bezeichnung als Dreiecksungleichung somit rechtfertigen). Dazu schreibt man (2) in rechtwinkligen Koordinaten auf:

$$\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \;\leq\; \sqrt{(c_1 - b_1)^2 + (c_2 - b_2)^2} \;+ \sqrt{(a_1 - c_1)^2 + (a_2 - c_2)^2} \tag{3}$$

Man beachte den Zusammenhang mit der Minkowski-Ungleichung, die (3) auf den Tupelraum $\mathbb{R}^n$ verallgemeinert. Für unsere Zwecke wird dieser Sachverhalt aber nicht benötigt; es ist völlig ausreichend, (3) über Koordinaten auf (2) zurückzuführen.

Von (3) nach (1) gelangen wir nun einfach durch die Annahme dreier Punkte $A = (a_1, 0)$, $B = (b_1, 0)$ und $C = (c_1, 0)$ auf einer Geraden (hier der x-Achse).

Setzt man diese Koordinaten in (3) ein und beachtet tunlichst, dass $\sqrt{u^2} = |u|$ (für jede reelle Zahl u) gilt, so ergibt sich:

$$|a_1 - b_1| \leq |c_1 - b_1| + |a_1 - c_1|. \tag{4}$$

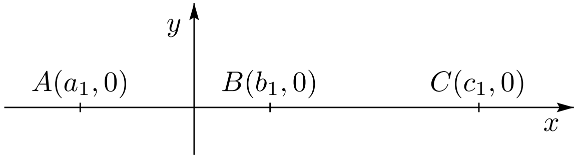


Abb. 1

Führen wir hier noch die vorzeichenbehafteten ›Abstände‹ $x = c_1 - b_1$ (von C, B) sowie $y = a_1 - c_1$ (von A, C) ein, so geht (4) ohne weiteres in (1) über.

Die gerade angestellten Überlegungen zeigen, dass man die beiden DU-en (1) und (2) durch Spezialisierung aus der Minkowski-Ungleichung gewinnen könnte, doch wäre das nur ein besonders krasser Fall, in dem mit Kanonen auf Spatzen geschossen würde. Fragen wir daher umgekehrt: Ist Ungleichung (2) nicht bereits für sich genommen plausibel und anschaulich einleuchtend? Das ist sie gewiss; aber ist sie es in genügendem Maße? Für den Unterricht empfiehlt [Schupp 1984], »die DU den unmittelbar einsichtigen Grundannahmen zuzuordnen«. Didaktisch fragwürdig wäre es, eine Aussage, die (wie die DU) »den Schülern in der Tat trivial erscheint«, auf womöglich weniger evidente Sachverhalte zurückzuführen. Im Übrigen verwenden Systeme, die direkt mit dem Begriff des metrischen Raums arbeiten, die DU ohne weiteres als Axiom.

Trotzdem wollen wir hier nicht ausschließen, dass es auch didaktisch sinnvoll sein kann, die DU auf einfachere oder zumindest im geometrischen Unterrichtsstoff sehr geläufige Sachverhalte zurückzuführen. Zu diesen gehört wohl die Aussage, dass im Dreieck dem größeren Winkel die längere Seite gegenüberliegt und daher speziell im rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse die längste Seite ist. Ein Beweis von (2) könnte dann wie folgt aussehen:

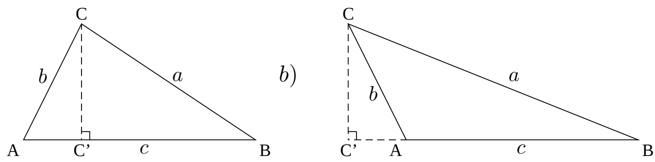
Beweis: Im Fall $A = B$ ist $c = 0$ und die Behauptung selbstverständlich. Sei nun $A \neq B$ und C ein beliebiger Punkt der Ebene. Es bezeichne C' den Fußpunkt des Lots von C auf AB. Dann gilt $a = |BC| \geq |BC'|$ und $b = |CA| \geq |C'A|$. Gleichheit gilt in beiden Beziehungen nur für $C = C'$.

Nach Addition beider Ungleichungen ergibt sich

$$a + b = |BC| + |CA| \geq |BC'| + |C'A|. \tag{5}$$

Ist $C' \in \overline{AB}$, d. h. $|BC'| + |C'A| = |AB| = c$ (siehe Abb. 2.a)), so resultiert (2) sofort aus (5).

Abb. 2 a) b)



Ist dagegen $C' \notin \overline{AB}$, so liegt C' entweder links von A oder rechts von B. Ohne Einschränkung können wir annehmen, C' befinde sich links von A (siehe Abb. 2.b)), d. h. A liegt zwischen C' und B. In diesem Fall gilt $|C'A| + |AB| = |C'B|$. Ungleichung (5) liefert dann

$$a + b = |BC| + |CA| \geq |BC'| + |C'A| > |BC'| > |AB| = c.$$

Der Gleichheitsfall kann hier nicht eintreten, da $C' \notin \overline{AB}$ und infolgedessen $|C'A| > 0$ und $|BC'| > |AB|$ ist.

Mehr als durch Beweise lässt sich das Verständnis der DU durch ihre Anwendungen entwickeln und schärfen. In [Schupp 1984] werden dazu zahlreiche elementargeometrische Extremwertaufgaben vorgestellt, bei deren Lösung die DU eine Schlüsselrolle spielt.
Als Beispiel geben wir hier die Aufgabe:
Sei ABC ein beliebiges Dreieck und D ein Punkt in seinem Innern. Es soll gezeigt werden, dass der Weg von A nach B über D kürzer ist als der Weg von A nach B über C, d. h. $|AD| + |DB| \leq |AC| + |CB|$. Wird diese Aufgabe im Unterricht diskutiert, so darf in der anfänglichen Planfigur (nach Abb. 3) selbstverständlich keine

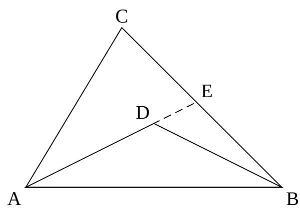


Abb. 3

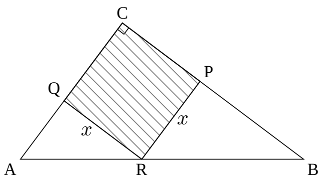
Hilfslinie von D aus gezeichnet werden (auch der Punkt E ist zu unterdrücken). Dann hat man ein Problem, das vielfältigen heuristischen Aktivitäten Raum bietet. Eine Lösung findet man bei [Schupp 1984, 7].

Wir geben eine weitere Aufgabe, deren Lösung dem Leser überlassen bleibt: Man zeige (mit Bezug auf Abb. 3) die Ungleichung: $\frac{a+b+c}{2} \leq |DA| + |DB| + |DC| \leq a + b + c$.

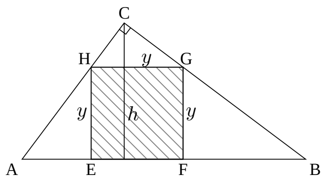
Eine verschärfte Dreiecksungleichung

Im Folgenden sei ABC zunächst als rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenusenlänge c vorausgesetzt. Ihm soll ein Quadrat einbeschrieben werden. Abb. 4 zeigt zwei Möglichkeiten, dies zu tun.

Abb. 4 a)



b)



Sind die beiden Quadrate kongruent? Um diese Frage zu beantworten, müssen wir die Seitenlängen x und y miteinander vergleichen. Mit h bezeichnen wir die Höhe auf der Hypotenuse. Links (Abb. 4a) folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke PRB und CAB:

$$\frac{a-x}{x} = \frac{a}{b} \quad , \text{ d. h.} \quad x = \frac{ab}{a+b}. \tag{6}$$

Auch rechts (Abb. 4b) sind die Dreiecke CHG und CAB ähnlich:

$$\frac{h-y}{y} = \frac{h}{c} \quad , \text{ d. h.} \quad y = \frac{hc}{c+h}. \tag{7}$$

Da das Dreieck bei C einen rechten Winkel hat, gilt $ab = hc$ und $a^2 + b^2 = c^2$. Damit erhalten wir $(c+h)^2 - (a+b)^2 = h^2 > 0$ sowie die Ungleichung

$$c + h > a + b. \tag{8}$$

Aus (6), (7) und (8) ergibt sich nach kurzer Rechnung $\frac{1}{y} > \frac{1}{x}$, mithin $x > y$.

In (8) fällt auf, dass in der DU die Richtung der Ungleichheit wechselt, wenn man sie durch Hinzunahme der Höhe zur Hypotenuse „verschärft". Ist hingegen das Dreieck nicht rechtwinklig und gilt darüberhinaus $c \leq a$ oder $c \leq b$, so erhält man (wegen $h \leq a$ und $h \leq b$) die anders gerichtete Ungleichung $c + h \leq a + b$.

Nun wollen wir die Voraussetzung fallen lassen, dass das Dreieck rechtwinklig ist. Wir nehmen aber an, dass c die größte Seitenlänge ist und h die auf der Seite $\overline{AB}$ stehende Höhe. Gibt es unter diesen Dreiecken solche, die die Ungleichung $c + h \leq a + b$ erfüllen? In diesem Fall hätten wir für $(a+b)-c$ eine bessere untere Schranke als 0 (der Wert, den die DU (2) liefert). Mit Hilfe des Additionstheorems für den Sinus ergibt sich (Abb. 5):

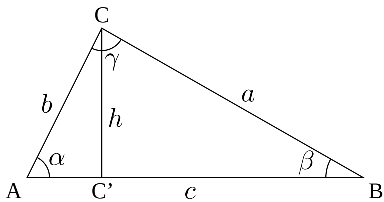


Abb. 5

$$\begin{aligned}
a + b - c &= \frac{h}{\sin\beta} + \frac{h}{\sin\alpha} - \frac{ab\sin\gamma}{h} \\
&= \frac{h}{\sin\beta} + \frac{h}{\sin\alpha} - \frac{h^2\sin\gamma}{h\sin\beta\sin\alpha} \\
&= \frac{h}{\sin\beta} + \frac{h}{\sin\alpha} - \frac{h\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta\sin\alpha} \\
&= h\left(\frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\alpha} - \frac{\cos\beta}{\sin\beta} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) \\
&= h\left(\frac{1-\cos\beta}{\sin\beta} + \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) \\
&= h\left(\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2}\right).
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} a+b \geq c+h \quad &\Longleftrightarrow \quad h\left(\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\right) \geq h \\ &\Longleftrightarrow \quad \tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2} \geq 1. \end{aligned} \tag{9}$$

Nach Voraussetzung gilt $a < c$ und $b < c$ und somit $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Auf dem Intervall $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ist die Funktion $f(x) = \tan x$ konvex und die Jensensche Ungleichung liefert:

$$\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2} \geq 2\tan\frac{\alpha+\beta}{4} = 2\tan\frac{\pi-\gamma}{4} = 2\frac{1-\tan\frac{\gamma}{4}}{1+\tan\frac{\gamma}{4}}.$$

An (9) lesen wir ab: Die Ungleichung $a+b \geq c+h$ ist erfüllt, wenn $\frac{1-\tan\frac{\gamma}{4}}{1+\tan\frac{\gamma}{4}} \geq \frac{1}{2}$, was gleichbedeutend ist mit $\tan\frac{\gamma}{4} \leq \frac{1}{3}$ bzw. $\gamma <\approx 74°$.

Literatur

1. Bailey, H. R.; Bannister, R.: A Stronger Triangle Inequality. *College Math. J.*, **28** (1997), 182-186
2. Klamkin, M. S.: A Sharp Triangle Inequality. *College Math. J.*, **29** (1998), 33
3. Schupp, H.: Extremwertbestimmungen mit Hilfe der Dreiecksungleichung. *Der Mathematikunterricht*, Heft 6/1984, 6-21

Beleuchtung einer Tischplatte. Anmerkungen zu einer Extremwertaufgabe[1]

Ein seit langem bekanntes elementares Beispiel einer angewandten Optimierung ist die folgende photometrische Aufgabe: Über der Mitte einer kreisförmigen Tischplatte ist eine Lampe anzubringen. In welcher Höhe muss sie aufgehängt werden, damit der Tischrand möglichst hell beleuchtet ist?

Eine einfache Planskizze (Abb. 1) möge den Sachverhalt im Seitenriss verdeutlichen:

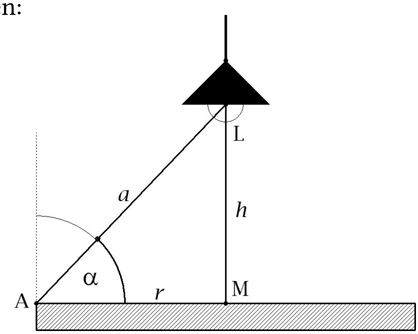


Abb. 1

Die Lichtquelle L werde als praktisch punktförmig vorausgesetzt, der von ihr ausgehende Lichtstrom als von konstanter Lichtstärke (der Einfachheit halber auf 1 normiert). Es genügt aus Symmetriegründen, eine beliebige Stelle A auf dem Tischrand zu betrachten. Nach dem Lambertschen Cosinus-Gesetz beträgt dann die dort vorhandene Beleuchtungsstärke

$$\frac{1}{a^2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{a^2} \cdot \sin\alpha = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{h}{a} = \frac{h}{a^3}. \tag{1}$$

Da das Dreieck LMA bei M einen rechten Winkel hat, gilt $a^2 = h^2 + r^2$.

Dörrie [1] entwickelt (dem Inhalt seines Lehrbuchs entsprechend) eine rein algebraische Lösung. Er bildet dazu das Quadrat $q = a^{-6}h^2 = a^{-6}(a^2 - r^2)$ des zu maximierenden Ausdrucks (1) und gewinnt aus ihm

[1] Erschienen in: WURZEL, 52. Jahrgang, Heft 3/4 (2018), 77–81.

mit der Substitution $x = a^2$ die kubische Gleichung

$$qx^3 - x + r^2 = 0.$$

Da sie außer einer negativen auch eine positive Lösung (nämlich $x = a^2$) besitzt, gilt für ihre Diskriminante: $D = q(4 - 27qr^4) \geq 0$, und damit $q \leq 4/27r^4$. Für das maximale $q = q_{\max} := 4/27r^4$ verschwindet D, und man erhält die positive Doppelwurzel $x = 1/\sqrt{3q_{\max}} = 3r^2/2$. Daraus ergibt sich für die zugehörige optimale Höhe der Lichtquelle L:

$$h_{\max} = \sqrt{a^2 - r^2} = \frac{r}{\sqrt{2}}. \tag{2}$$

Die Aufgabe lässt sich selbstverständlich auch ohne derartige Kunstgriffe als klassisches Extremwertproblem der Differentialrechnung behandeln, so geschehen etwa bei Sirk [3] (in [2] etwas verwickelter durch die Lagrange-Methode mit Nebenbedingung). Ausgehend von (1) bilden wir dazu durch Eliminierung des Abstands a die Funktion

$$F(h) := \frac{h}{(h^2 + r^2)^{3/2}}.$$

$F(h)$ liefert die in A vorhandene Beleuchtungsstärke in Abhängigkeit von der Lampenhöhe h. Aus der Gleichung

$$F'(h) = \frac{r^2 - 2h^2}{(h^2 + r^2)^{5/2}} = 0$$

ergibt sich unmittelbar die Lösung (2) als mögliche Stelle eines relativen Extremums. Tatsächlich liegt hier wegen $F''(r/\sqrt{2}) < 0$ ein Maximum vor (sogar ein absolutes, wie sich bei genauerer Betrachtung des Funktionsverlaufs herausstellt).

Es liegt nahe, die Aufgabe auf den Fall einer quadratischen Tischplatte zu erweitern. Zu Vergleichszwecken werde das Quadrat dabei so gewählt, dass der zuvor betrachtete Kreisrand zum Quadrat-Inkreis wird und A zum Mittelpunkt einer Quadratseite (Tischkante von Ecke zu Ecke, vgl. die Aufsicht in Abb. 2). Im Unterschied zum Kreis variiert die Beleuchtungsstärke auf dem Rand der quadratischen Fläche. Es ist daher sinnvoll, die über den gesamten Tischrand gemittelte Beleuchtungsstärke zu maximieren. Bei der kreisförmigen Platte war das explizit nicht erforderlich, weil alle ihre Randpunkte ohnehin die gleiche Beleuchtungsstärke aufweisen. Beim Quadrat genügt es, die Strecke von A bis zu einer benachbarten Ecke E zu untersuchen. Der Rand des Tisches besteht aus 8 solchen Abschnitten gleicher Länge, welche jeweils die gleiche Verteilung der Beleuchtungsstärke aufweisen.

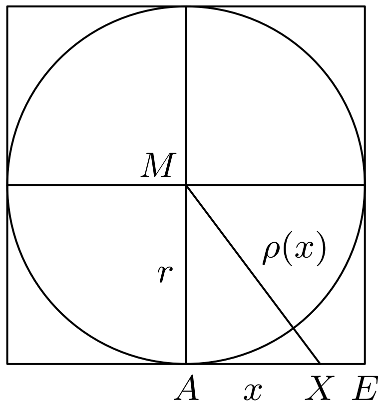


Abb. 2

Wir betrachten nun einen beweglichen Punkt X, der bei A beginnend die Strecke AE durchläuft. Das Dreieck LMA wird auf diese Weise zu einem veränderlichen, ebenfalls rechtwinkligen Dreieck LMX. Aus seinen Abmessungen soll ein Ausdruck gewonnen werden, welcher der in X vorhandenen Beleuchtungsstärke proportional ist.

Es werde dazu mit x der Abstand des Randpunktes X von A bezeichnet. Weitere von x abhängige Größen des Dreiecks LMX sind seine Hypotenuse $a(x)$, die in der Tischebene liegende Kathete $\rho(x)$ sowie der Winkel $\alpha(x) := \angle$LXM. Sobald X nicht mit A zusammenfällt, entsteht in der Tischebene ein weiteres Dreieck MAX mit einem rechten Winkel bei A. Es gilt also nach zweimaliger Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes: $a(x)^2 = h^2 + \rho(x)^2 = h^2 + r^2 + x^2$. Somit lässt sich die in X vorhandene Beleuchtungsstärke durch folgende ›Erweiterung‹ der oben definierten Funktion F wiedergeben:

$$\widetilde{F}(h,x) := \frac{h}{(h^2 + r^2 + x^2)^{3/2}}. \tag{3}$$

Es ist nicht nötig, die Extremwertbestimmung mit diesem $\widetilde{F}$ zu wiederholen. Denn nach der bereits bekannten Lösung erhalten wir im Punkt X das

Maximum der Beleuchtungsstärke, wenn die Lampe L im Abstand

$$h_{\max}(x) := \frac{\rho(x)}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{r^2 + x^2}{2}}$$

über dem Mittelpunkt M aufgehängt wird. Die optimale Aufhänghöhe erscheint hier als das quadratische Mittel von r und x.

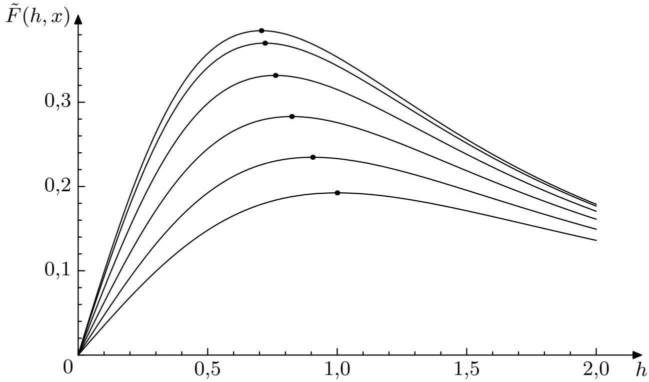


Abb. 3

Abbildung 3 zeigt die Verläufe der Beleuchtungsstärke (als Funktion von h) an sechs äquidistanten Punkten X auf AE, wobei $r = 1$ gesetzt wurde und die oberste Kurve zu A ($x = 0$), die unterste zur benachbarten Tischecke E ($x = r$) gehört. Die jeweiligen Maxima sind markiert.

Es soll nun die an der halben Tischkante AE vorhandene mittlere Gesamtbeleuchtungsstärke in Abhängigkeit von h berechnet werden. Sie ergibt sich als

$$\begin{aligned} G(h) &:= \frac{1}{r}\int_0^r \widetilde{F}(h,x)\,dx = \frac{1}{r}\cdot \frac{hx}{(h^2+r^2)\sqrt{h^2+r^2+x^2}}\bigg|_0^r \\ &= \frac{h}{(h^2+r^2)\sqrt{h^2+2r^2}}. \end{aligned}$$

Die als notwendige Bedingung für ein relatives Extremum zu diskutierende Gleichung

$$G'(h) = -\frac{2(h^4 + h^2 r^2 - r^4)}{(h^2+r^2)^2(h^2+2r^2)^{3/2}} = 0$$

hat genau eine positive reelle Lösung:

$$h = \frac{r}{\sqrt{\tau}} \quad \text{mit } \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339.$$

Hier ist τ die Teilungszahl des ›goldenen Schnitts‹, ein in diesem Zusammenhang überraschend auftauchender Wert.

Wegen $G''(r/\sqrt{\tau}) = -16\left(3+\sqrt{5}\right)^{-5/2}\left(\sqrt{5}-1\right)^{1/2} r^{-4} < 0$ liegt an dieser Stelle ein Maximum vor.

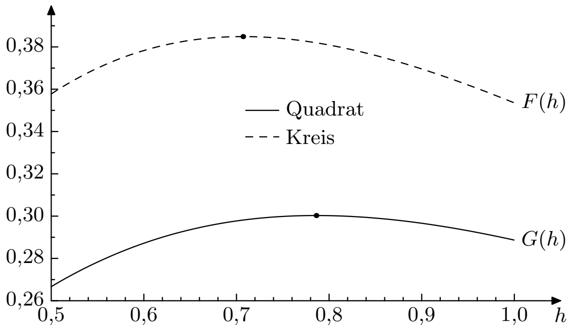


Abb. 4: Die mittleren Beleuchtungsstärken zu Kreis und Quadrat im Vergleich

Abbildung 4 zeigt die mittlere Beleuchtungsstärke auf dem Einheitskreis und auf dem ihm umschriebenen Quadrat jeweils als Funktion der Aufhänghöhe h. Das optimale h über einer kreisförmigen Platte liefert auf deren Rand die maximale Beleuchtungsstärke

$$F\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}\cdot r} \approx \frac{0{,}3849}{r^2}.$$

Beim Übergang zur quadratischen Tischplatte muss die Lampe etwa um das Stück $0{,}079 \cdot r$ höher gehängt werden, damit sich das entsprechende Maximum auf dem Rand einstellt; dieses beträgt

$$G\left(\frac{r}{\sqrt{\tau}}\right) = \frac{2\sqrt{\sqrt{5}-2}}{(\sqrt{5}+1)r^2} \approx \frac{0{,}3003}{r^2},$$

liegt also ca. 22 Prozent unter dem Maximum auf der kreisförmigen Tischplatte.

Literatur

1. Dörrie, Heinrich: *Kubische und biquadratische Gleichungen*, Leibniz Verlag: München 1948.
2. Papula, Lothar: *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*, Band 2, 12. Auflage, Springer Vieweg: Wiesbaden 2009.
3. Sirk, Hugo: *Mathematik für Naturwissenschaftler und Chemiker*, 7., verb. Auflage, Verlag von Theodor Steinkopf: Dresden und Leipzig 1956.

Nacherfindung der Parabel[1]

Seit alters her kennt man die optische Eigenschaft der Parabel (und des aus Drehung um ihre Achse hervorgegangenen Rotationsparaboloids): Parallel zur Parabelachse einfallende Strahlen werden so reflektiert, dass sie durch einen festen Punkt F (*Brennpunkt* genannt) hindurchgehen. Diese Eigenschaft folgt leicht aus der üblichen Ortsdefinition der Parabel. Darüberhinaus ist sie sogar charakteristisch. Genauer lässt sich folgende Behauptung zeigen:

Jede in einer Ebene gelegene achsensymmetrische und differenzierbare Kurve, welche die Brennpunkt-Eigenschaft besitzt, ist eine Parabel.

Für den Beweis legen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Ursprung O zugrunde. Ohne Einschränkung werde vorausgesetzt, dass die fragliche Kurve $y = y(x)$ durch O geht und ihr Brennpunkt $\mathrm{F} = (0, f)$, $f > 0$, auf der y-Achse liegt, die zugleich ihre Symmetrieachse darstellt (Abb. 1). Wir betrachten nun einen beliebigen Punkt $\mathrm{P} = (x_0, y_0)$, in welchem die Kurve eine nicht-horizontale Tangente besitzt. Diese schneide die x-Achse im Punkt Q. Nach Voraussetzung wird ein parallel zur y-Achse einfallender Strahl an P so reflektiert, dass der ausfallende Brennstrahl durch

[1] Verfasst 2005; erschienen in: WURZEL, 53. Jahrgang, Heft 7 (2019), 162–164.

F geht. Infolgedessen stimmen nach dem Reflexionsgesetz der mit der Tangente gebildete Winkel α und der Winkel $\angle$QPF überein.

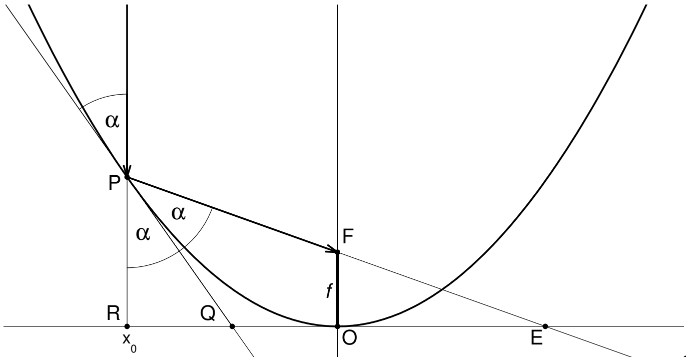


Abb. 1

Um die Brennpunkt-Eigenschaft bzgl. P analytisch auszudrücken, stellen wir die Gleichung der Geraden PF auf. Zunächst betrachten wir die Tangenten-Gleichung $t(x) = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$ und ermitteln aus $t(x) = 0$ die Abszisse von Q als $x_0 - y_0/y'(x_0)$. Daraus ergibt sich für den (von x_0 abhängigen) Reflexionswinkel α:

$$\tan\alpha = \frac{|\mathrm{QR}|}{|\mathrm{PR}|} = \frac{1}{y'(x_0)}. \tag{1}$$

Der Anstieg des Brennstrahls ist gleich dem Tangens des Winkels $\angle\mathrm{PER} = {}^{\pi}/_{2} - 2\alpha$; es gilt demnach für den Punkt $\mathrm{P} = (x_0, y_0)$ die lokale Reflexionsbedingung $y_0 = \tan({}^{\pi}/_{2} - 2\alpha)x_0 + f = (\cot 2\alpha)x_0 + f$. Machen wir schließlich diese Bedingung für alle Kurvenpunkte (x, y) geltend, deren Tangente nicht horizontal verläuft, so erhalten wir

$$y = (\cot 2\alpha)x + f = \left(\frac{\cot\alpha - \tan\alpha}{2}\right)x + f, \quad \text{also mit (1):}$$

$$y = \frac{x}{2}\left(y' - \frac{1}{y'}\right) + f. \tag{2}$$

(2) ist eine gewöhnliche Differentialgleichung vom D'Alembertschen (oder Lagrangeschen) Typ. Sie lässt sich durch Differentiation in eine lineare Dif-

ferentialgleichung für $p = y'$ transformieren:

$$\begin{aligned} p &= \frac{d}{dx}\,\frac{x}{2}\left(p - \frac{1}{p}\right) \\ &= \frac{p}{2} - \frac{1}{2p} + \frac{x}{2}\frac{dp}{dx} + \frac{x}{2p^2}\frac{dp}{dx}. \end{aligned}$$

Nach dp/dx aufgelöst erhalten wir die Gleichung $dp/dx = p/x$ mit der vollständigen Lösung $y(x) = C_1 x^2 + C_2$. Wegen $y(0) = 0$ ist $C_2 = 0$. Setzt man schließlich $y = C_1 x^2$ in (2) ein, so ergibt sich $C_1 = {}^1\!/_{4f}$. Die gesuchte Kurve hat somit die Gleichung einer Parabel:

$$y(x) = \frac{1}{4f}x^2.$$

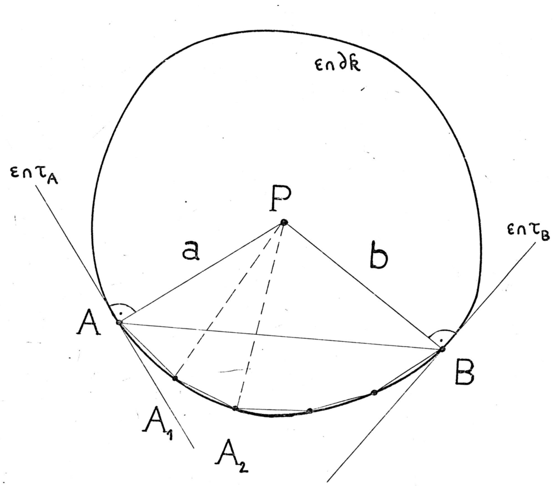
Bemerkung. — Die soweit skizzierte Überlegung, ausgehend von einem vorgegebenen praktischen Zweck eine dazu passende Form aufzusuchen, mag als nachträgliche Ergänzung zu Abschnitt 2.3.11 von P. Bender, A. Schreiber, *Operative Genese der Geometrie*, Wien/Stuttgart 1985 (Reprint 2012), S. 150-159, verstanden werden.

Eine einfache Charakterisierung von Kreis und Kugel[1]

Die Normalen einer Kugel schneiden sich in ihrem Zentrum; dasselbe gilt auch vom Kreis. Im Folgenden beweise ich die Umkehrung dieser Behauptung in der Form, dass die Kugel der einzige glatt berandete Eikörper ist, dessen Normalen sich sämtlich in einem Punkt seines Inneren schneiden. Eine entsprechende Aussage gilt auch vom Kreis.

Eine Teilmenge $\mathcal{K}$ des 3-dimensionalen euklidischen Raumes E_3 heißt *Eikörper*, wenn $\mathcal{K}$ konvex und kompakt ist sowie innere Punkte besitzt. Gibt es in jedem Punkt $A \in \partial\mathcal{K}(=$ Rand von $\mathcal{K})$ genau eine Stützebene an $\mathcal{K}$, so heißt $\mathcal{K}$ *glatt* (*berandet*).

[1] Unveröffentlicht, 1979.



Planfigur 1

Zum Beweis der obigen Behauptung bezeichne τ_S die in $S \in \partial\mathcal{K}$ eindeutig bestimmte Stützebene (Tangentialebene) an $\mathcal{K}$. Sei P ein (nach Voraussetzung existierender) innerer Punkt von $\mathcal{K}$ mit $PS \perp \tau_S$ für alle $S \in \partial\mathcal{K}$. Es genügt zu zeigen, dass für beliebige Punkte $A, B \in \partial\mathcal{K}$, die nicht mit P auf einer Geraden liegen (und deren Stützebenen daher nicht parallel verlaufen), die Strecken $\overline{PA}$ und $\overline{PB}$ gleichlang sind. Es sei ϵ die durch A, B, P bestimmte Ebene; in ihr betrachten wir die Planfigur 1.

Es soll $|a - b|$ nach oben abgeschätzt werden, wobei $a = l(\overline{PA}) =$ Länge von $\overline{PA}$ und $b = l(\overline{PB})$. Aufgrund der Konvexität von $\mathcal{K}$ (Stützeigenschaft der Tangente $\epsilon \cap \tau_B$ im Punkt B) hat man $\measuredangle PBA \leq \pi/2$ und damit $\cos \measuredangle PBA \geq 0$. Der Kosinussatz für das Dreieck ABP liefert dann

$$|a^2 - b^2| = |l(\overline{AB})^2 - 2b \cdot l(\overline{AB}) \cos \measuredangle PBA| \leq l(\overline{AB})^2.$$

Ist d der Abstand des Punktes P von $\partial\mathcal{K}$, so gilt: $a + b \geq 2d > 0$. Daraus ergibt sich die Abschätzung

$$|a - b| = \left| \frac{a^2 - b^2}{a + b} \right| \leq \frac{l(\overline{AB})^2}{2d}. \tag{1}$$

Zu beliebiger ganzer Zahl $n \geq 1$ denken wir uns nun den kürzeren Bogen von $\epsilon \cap \partial\mathcal{K}$ über der Sehne $\overline{AB}$ durch eine Punktfolge $A_0 = A, A_1, \ldots, A_n, A_{n+1} = B$ derart zerlegt, dass A_j zwischen A_i und A_k liegt für $0 \leq i < j < k \leq n+1$ und

$$\lambda(n) := \max_{0 \leq \nu \leq n} l(\overline{A_\nu A_{\nu+1}}) \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \to \infty. \tag{2}$$

In allen Randpunkten A_ν steht laut Voraussetzung $\overline{PA_\nu}$ senkrecht auf der Tangentialebene τ_{A_ν} und damit auch senkrecht auf der Tangente $\epsilon \cap \tau_{A_\nu}$. Daher lässt sich (1) auf alle Punktepaare $(A_\nu, A_{\nu+1})$, $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$ anwenden, was nach Abschätzung mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} |a-b| &\leq \sum_{\nu=0}^{n} |l(\overline{PA_\nu}) - l(\overline{PA_{\nu+1}})| \\ &\leq \sum_{\nu=0}^{n} \frac{l(\overline{A_\nu A_{\nu+1}})^2}{2d} \leq \frac{\lambda(n)^2}{2d} \end{aligned}$$

ergibt. Aus der letzten Ungleichung folgt durch Verfeinerung der Zerlegung (d. h. $n \to \infty$ in (2)), dass $a = b$ sein muss.

Anmerkungen zum Parallelenpostulat[1]

Im dritten vorchristlichen Jahrhundert entstanden die so genannten *Elemente* des Euklid. Dieses Werk fasst das gesamte Wissen der damaligen Mathematik in einem aus dreizehn Büchern bestehenden System zusammen. An den Anfang seiner Untersuchung stellt Euklid gewisse Prinzipien, die – zumindest der Absicht nach – möglichst schon für sich genommen einleuchtend sein sollen. Darüber hinaus sollen sie so beschaffen sein, dass man sich allein auf sie stützend die wahren Sätze der Mathematik mit den Mitteln des logischen Schließens herleiten kann. Dieses Ziel hat Euklid

[1] Unveröffentlicht, 1972.

nicht ganz erreicht, aber doch für damalige Verhältnisse sehr weitgehend und noch für weitere zweitausend Jahre unüberboten.

Euklids Prinzipien zerfallen in drei Gruppen: Definitionen, Postulate und Axiome. Die Definitionen sind von ungleicher Natur, nämlich teils anschaulich-beschreibend und teils begrifflich-setzend. Die anschaulich-beschreibenden Definitionen, in denen Euklid die geometrischen Gegenstände wie Punkt, Gerade oder Ebene bestimmen will, sind (vielleicht bis auf wenige Ausnahmen) unzulänglich. Euklid selbst macht von ihnen an späterer Stelle gar keinen Gebrauch. Anders die begrifflich-setzenden Definitionen, die tatsächlich verwendet werden und überdies auch dem entsprechen, was man sich heute unter einer sinnvollen Definition vorstellt. Als Beispiel sei die dreiundzwanzigste Definition genannt:

> Parallel sind gerade Linien, die in derselben Ebene liegen und dabei, wenn man sie nach beiden Seiten ins Unendliche verlängert, auf keiner einander treffen.

Die Prinzipien, die bei Euklid Axiome heißen, haben, mit einer Ausnahme, weniger geometrischen als eher gleichheitstheoretischen Charakter. Ihre Aufzählung dürfen wir zumindest teilweise mit der Diskussion um die Probleme des Kontinuierlichen in Zusammenhang bringen, die von der eleatischen Philosophie (Zenon) ausgegangen war. Nicht diese Axiome, sondern vielmehr die Euklidischen Postulate entsprechen dem, was man heute gewöhnlich als Axiom bezeichnet. Die Postulate sind im wesentlichen Existenzforderungen. Die ersten drei sichern die Möglichkeit von Fundamentalkonstruktionen mit Zirkel und Lineal (Verbindung zweier Punkte durch eine Gerade, Verlängerung einer Geraden, Konstruktion eines Kreises mit vorgegebenem Mittelpunkt und Radius). Das vierte Postulat verlangt die Gleichheit aller rechten Winkel und bereitet damit wohl das fünfte Postulat vor, in dem gefordert wird:

> Schneidet eine Gerade zwei andere Geraden so, dass die innen auf derselben Seite entstehenden Winkel zusammen kleiner als zwei rechte werden, dann haben die zwei Geraden auf der Seite, auf der die Winkel liegen, einen gemeinsamen Schnittpunkt.

Dieses Postulat ist einer anderen Aussage logisch gleichwertig, die man ›Parallelenaxiom‹ oder ›Parallelenpostulat‹ nennt: In einer Ebene gibt es zu einer Geraden g und einem nicht auf ihr gelegenen Punkt P genau eine zu g parallele Gerade durch den Punkt P.

Weder in der einen noch in der anderen Form ist das fünfte Postulat unmittelbar einleuchtend. Dazu hat man sich zunächst einmal zu vergegenwärtigen, dass für die griechischen Mathematiker die Existenz geometrischer Objekte aus einer Konstruktionsvorschrift hervorzugehen hatte. Wenn wir beispielsweise davon überzeugt sind, dass durch zwei vorgegebene Punkte stets eine Gerade verläuft, so doch deshalb, weil wir die verlangte Gerade, zumindest lokal, konstruieren können. Mit dem fünften Euklidischen Postulat verhält es sich aber anders: Ob die konvergierenden Geraden einen Schnittpunkt besitzen, bleibt ungewiss, weil es mehr als zweifelhaft ist, dass wir ihn durch eine Konstruktion einfangen können; schließlich kann er außerhalb jeder Einschränkung des uns anschaulich zugänglichen Raumgebiets liegen. — Ähnliche Bedenken erheben sich gegen die Fassung als Parallelenpostulat. Selbst wenn es möglich ist, eine durch P verlaufende Parallele zu g zu konstruieren: die Existenz weiterer Parallelen kann dabei nicht von vornherein ausgeschlossen werden, weil wir eben keineswegs das globale Verhalten der durch P verlaufenden Geraden übersehen.

Tatsächlich waren sich auch die griechischen Geometer der Evidenz des Parallelenpostulates durchaus nicht sicher. Das wissen wir beispielsweise von Proklos, dem ersten Euklid-Kommentartor. Ohne eine Begründung, so führt Proklos aus, bleibe die Behauptung des Parallelenpostulates nur wahrscheinlich; notwendig sei sie nicht. Aber was heißt hier ›Begründung‹? Proklos hat vermutlich an einen Beweis gedacht, natürlich dann an einen Beweis auf der Grundlage anderer Prinzipien. Wenn nun aber die übrigen Prinzipien, die Euklid in seinen *Elementen* zusammengestellt hat, zu einem solchen Beweis nicht hinreichen, was sollen wir dann unter einer Begründung des Parallelenpostulates verstehen? Hier liegt ein Problemkomplex, der die Mathematik zwei Jahrtausende lang in Atem halten konnte und der als eine der ergiebigsten Quellen der neueren Grundlagentheorie angesehen werden darf.

Aus der heute möglichen Distanz zu diesem Problem der Parallelen lassen sich angesichts der von Proklos aufgeworfenen Begründungsfrage in erster Näherung drei Teilfragen unterscheiden:

(1) Ist das Parallelenpostulat von den übrigen Prinzipien der Euklidischen Geometrie abhängig, d. h. lässt es sich aus diesen mittels logischer Schlüsse ableiten?
(2) Ist das Parallelenpostulat gültig in der wirklichen Welt (im Sinne einer Geometrie des realen Raumes)?
(3) Lässt sich das Parallelenpostulat noch auf andere Weise rechtfertigen, etwa als anschaulich gewisse Erkenntnis oder zumindest als zweckmäßige Forderung?

Eine solche Aufgliederung des Parallelenproblems ist vor allem deshalb möglich, weil man sich der mühsam erkämpften Fortschritte auf diesem Gebiet nachträglich bedienen darf. So ist es beispielsweise ein Ergebnis erst dieser Bemühungen, dass man die Frage (1) von der Frage (2) abgetrennt hat. Zuvor war niemand auf den Gedanken verfallen, zwischen der Evidenz und der Beweisbarkeit geometrischer Aussagen aus evidenten Prinzipien auf der einen Seite sowie der Gültigkeit dieser Aussagen in der wirklichen (oder einer idealen, aber immerhin noch erkennbaren) Welt zu unterscheiden. Diese anfängliche Konfusion der drei Teilfragen hat die Bearbeitung des Parallelenproblems ungemein erschwert. Man sollte sich aber stets vor Augen führen, dass die hier angedeutete Zerlegung des Problems in Teile erst dann notwendig, ja überhaupt erst sinnvoll und nachvollziehbar werden konnte, *nachdem* man auf der Grundlage der herkömmlichen Auffassung in ein bestimmtes kritisches Stadium der Problembearbeitung hineingeraten war.

Der Wendepunkt liegt in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts und ist mit den Namen Gauss, Lobatschewski und J. Bolyai verbunden. Bis dahin hatten zahlreiche Mathematiker eine Begründung des Parallelenpostulates dadurch versucht, daß sie ausgehend von der indirekten Annahme, das Postulat gelte nicht, einen Widerspruch zu den übrigen Euklidischen Axiomen herstellen wollten. Dies gelang entweder nicht oder nur scheinbar durch ausdrückliche, oft auch bloß stillschweigende Verwendung logisch gleichwertiger Prinzipien. Schließlich entdeckten die drei genannten Mathematiker, unabhängig voneinander, dass es sehr wohl möglich sei, eine Geometrie mit Einschluss des verneinten Parallelpostulats zu entwickeln. Spätestens durch die methodologisch ausgerichteten Untersuchungen Felix Kleins zur Geometrie war klar, dass die Frage (1) zu verneinen ist.

Wenn sich das Parallelenpostulat nicht aus den Prinzipien der Geometrie folgern lässt, welche Rolle, welcher Status kommt ihm dann überhaupt noch zu? Es ist immer wieder, vor allem von seiten der Philosophie, vorgebracht worden, das Parallelenaxiom sei trotz seiner logischen Unabhängigkeit gleichwohl ein *gültiger* Satz. Damit stehen wir bei der zweiten Teilfrage. Ihre Schwierigkeit liegt darin, dass sie den Begriff der Gültigkeit oder, was auf dasselbe hinausläuft: der Wahrheit, enthält. Nicht wenige Philosophen und Mathematiker haben einen Standpunkt vertreten, wonach sich die Aussagen der Geometrie auf einen Bereich von Dingen beziehen, die uns real oder zumindest als Idealisierung realer Objekte *gegeben* seien. So betrachtet müsste es also feststehen, ob der Sachverhalt, den das Parallelenaxiom ausspricht, an sich besteht oder nicht. Dass sie bestehen oder nicht, sind wir ja von den Sachverhalten unseres gewöhnlichen Lebens gewohnt. Wer so denkt, hat natürlich zu erklären, *wie* er das Bestehen oder Nichtbestehen von Sachverhalten in dem von ihm vorausgesetzten Dingbereich glaubt *erkennen* zu können. Handelt es sich um einen Bereich idealer Gegenstände (an den etwa Platon gedacht hat), so bedarf es einer besonderen Intuition, eines die sinnliche Wahrnehmung weit übersteigenden Einsichtsvermögens, um hierüber Erkenntnisse zu gewinnen. Aussichtsreicher scheint demgegenüber die Berufung auf die Verhältnisse im realen Raum zu sein; denn was sich im realen Raum befindet, ist immerhin wahrnehmbar (oder kann es grundsätzlich werden) und ist damit in einem viel fassbareren Sinne existent als bloß gedachte, genauer: durch Hypostasierung von Eigenschaften zustande gekommene Wesenheiten. Aber auch dieser empiristische Standpunkt liefert keine problemlose Antwort auf Frage (2). Der Grund ist einfach der: Im wirklichen Raum gibt es gar nicht jene Geraden, Ebenen und Punkte, von denen Euklid in seinen *Elementen* spricht. Sowohl was wir wahrnehmen wie auch was wir technisch realisieren können, bildet stets immer nur eine Annäherung an jene idealen Gebilde. Inwiefern soll es also möglich sein, den im Parallelenpostulat ausgesprochenen Sachverhalt im Bereich wirklicher physischer Gegenstände festzustellen? Ein mögliches Verfahren besteht darin zu erklären, wie wir die Euklidischen Grundbegriffe im realen Raum *interpretieren* wollen. Praktisch ist man, nach einem Vorschlag von Gauss, so vorgegangen, dass die Bahnen von Lichtstrahlen als Realisierung von Geradenstücken aufgefasst wurden.

Nun ist das Parallelenaxiom logisch gleichwertig mit der Aussage, dass die Winkelsumme im Dreieck zwei Rechte beträgt. Infolgedessen könnte eine empirische Ausmessung von (sehr großen) Dreiecken Aufschluss über die empirische Gültigkeit des Parallelenaxioms geben. Tatsächlich liegen aber alle bisher festgestellten Abweichungen noch im Rahmen der Messfehlerungenauigkeiten; es ergibt sich also daraus allenfalls ein vorläufiges, hypothetisches Argument für die empirische Gültigkeit der Euklidischen Geometrie. Allerdings ist bei allen derartigen Messungen zu bedenken, dass sie die Geradlinigkeit der Lichtstrahlen voraussetzen. Daher sind die Konsequenzen, die wir aus diesen (wie auch immer ausgefallenen) Meßergebnissen ziehen, stets nur *relativ* zu unseren Annahmen über die Natur der Lichtstrahlen bzw. allgemeiner über die Struktur unserer Messverfahren zu bewerten. Wie wenig ein so zu erzielender Gültigkeitsbefund absoluten Charakter besitzt, zeigt schon die Wahl einer nichteuklidischen Geometrie in Einsteins allgemeiner Relativitätstheorie. Eine solche Wahl ist keineswegs logisch oder empirisch zwingend, sondern bestenfalls zweckmäßig oder naheliegend im Hinblick auf die durch sie erzielte vereinfachte Formulierung der physikalischen Gesetze. Auf die Frage (2) gibt es daher kein eindeutiges Ja oder Nein als Antwort. Wir müssen uns, jedenfalls gegenwärtig, mit dem Umstand abfinden, dass sich die reale Welt im Prinzip durch unterschiedliche geometrische Systeme beschreiben lässt.

Halten wir also fest: Das Parallelenpostulat ist aus den übrigen Prinzipien der Euklidischen Geometrie nicht ableitbar, ferner ist es im physikalischen Sinne nur relativ zu vorher definierten Meßverfahren gültig (oder ungültig). Lässt es sich vielleicht nicht doch noch aus anderen Gründen rechtfertigen oder verwerfen? Man könnte geltend machen, dass das Parallelenaxiom nicht im Widerspruch zu geometrischen Sätzen steht, die ohne seine Hilfe bewiesen werden können. Aber dasselbe gilt auch von seiner Verneinung; eine Entscheidung können wir so nicht herbeiführen. Aus ähnlichem Grund scheitert auch der Versuch G. Hessenbergs (1903), das Parallelenaxiom durch den Hinweis zu rechtfertigen, mit ihm würde die übrige Geometrie vervollständigt. Tatsächlich vervollständigen ja auch andere die Winkelsumme im Dreieck betreffende Aussagen die Geometrie in dem Sinne, dass dann von jeder vorgelegten einschlägigen Aussage feststeht, ob sie aus dem ergänzten (vervollständigten) System der Geometrie logisch folgt oder nicht.

Hessenberg stand seinerzeit der sogenannten Neuen Friesschen Schule nahe, einem Kreis von Philosophen, Mathematikern und Naturforschern, der unter der Führung von Leonard Nelson jene Fortsetzung der Kantschen Philosophie betrieb, die Jakob Friedrich Fries in ausdrücklichem Gegensatz zum damaligen spekulativen Denken (vor allem Hegels und Schellings) eingeleitet hatte. Nelson hielt insbesondere an der von Kant aufgestellten Theorie fest, wonach die Sätze der Geometrie *synthetische Erkenntnisse a priori* wiedergeben. Dabei gilt eine Erkenntnis oder vielmehr ein sie aussprechendes Urteil als synthetisch, wenn wir es verneinen können, ohne auf logische Widersprüche zu stoßen. A priori ist eine Erkenntnis, wenn ihre Quelle nicht in der Erfahrung liegt. Anders als viele seiner Zeitgenossen sah Nelson diese Theorie durch die Auflösung der Parallelenfrage (1) nicht widerlegt, sondern vielmehr geradezu bestätigt. In der Tat, wenn das Parallelenpostulat verneint werden kann, ohne dass dadurch Widersprüche zur übrigen Geometrie entstehen, dann ist eine Negation erst recht *logisch* möglich. Das Parallelenaxiom stellt also ein synthetisches Urteil dar. Dass es aufgrund von Erfahrungen gewonnen wird, hat Nelson in seinen ›Bemerkungen über die nicht-euklidische Geometrie und den Ursprung der mathematischen Gewißheit‹ (1905/1906) ausführlich zu widerlegen versucht. Es wäre dies im Übrigen auch wenig plausibel nach allem, was hier zur Beantwortung von Frage (2) dargelegt wurde. Ist demnach das Parallelenaxiom als eine synthetische *Erkenntnis* a priori gerechtfertigt? Nicht so ohne weiteres. Wenn man nämlich – wie dies schon die griechischen Mathematiker zurecht taten – an der anschaulichen Gewissheit (Evidenz) dieses Axioms zweifelt, dann hat dies doch die naheliegende Konsequenz, dass wir ihm zwar nicht seine Apriorität und Synthetizität, durchaus aber bis zu einem gewissen Grade seinen *Erkenntnisgehalt* abstreiten können.

Hierdurch entsteht ganz offensichtlich eine schwierige Lage. Tatsächlich hat im Anschluss an Hilbert die formalistische Philosophie der Mathematik dieses Jahrhunderts den Standpunkt eingenommen, wonach allgemeiner *alle* geometrischen Aussagen des Erkenntnisgehalts entbehren. Die Tätigkeit des Mathematikers soll demzufolge darin bestehen, aus mehr oder weniger willkürlich angenommenen Axiomen mit den Mitteln der Logik die Theoreme der gewöhnlichen Mathematik herzuleiten. Er bedient sich dabei zwar noch der Anschauung, jedoch bloß noch als einer *Findungs-*

hilfe und nicht als eines Mittels zur Begründung seiner Lehrsätze. An dieser Betrachtungsweise ist sicher soviel brauchbar, als sie klar unterscheidet zwischen einerseits der Gültigkeit von Theoremen relativ zu den zugrunde liegenden Axiomen und andererseits der bloß hypothetischen Geltung der jeweiligen Grundannahmen. Dennoch neigt man hier leicht dazu, das Kind mit dem Bade auszuschütten. Weshalb denn soll es etwa nicht sinnvoll sein, danach zu fragen, ob sich die Euklidische oder eine andere Geometrie nicht doch von anders gearteten *inhaltlichen Erkenntnissen* ausgehend entwickeln lässt? Dieses sich an Frage (3) anschließende Nachfolgerproblem wird von Formalisten gemeinhin nicht in Angriff genommen, sondern gerne, vielleicht aus Gründen der Bequemlichkeit, als irrelevant für die Praxis der Mathematik angesehen. Unerledigt ist es allemal.

Ideen in der Geometrie[1]

Die folgende Notiz ist der Frage gewidmet: *Über welche Dinge spricht man in der Geometrie?* — Ganz einfach könnte ein Mathematiker antworten: über Punkte, Geraden, Ebenen und Konfigurationen aus diesen. Entsprechend redet man ja in der Mengenlehre über Mengen und in der Arithmetik über Zahlen. Aber so einfach liegen die Dinge doch nicht. Nehmen wir zum Beispiel die Arithmetik. Von den Zahlen, über die dort gesprochen wird, können wir uns immerhin im Prinzip eine anschauliche Vorstellung verschaffen: Einerseits ist ihre Rolle als Elemente eines Rechenkalküls vollkommen natürlich; andererseits hat eine Gleichung wie $5 + 7 = 12$ eine völlig adäquate bildlich-praktische Entsprechung darin, dass wir beim Zusammenlegen von zunächst fünf und dann sieben Hölzern auf insgesamt zwölf Hölzer kommen.

Eine solche Auffassung wäre der Geometrie aber wenig angemessen. Seit jeher ist es eine anerkannte Tatsache, dass wir in der Wirklichkeit niemals Punkte, gerade Linien oder ebene Flächen antreffen. Ecken, Kanten oder Oberflächen von physischen Körpern sind immer nur als angenäherte Realisierungen dessen zu verstehen, worüber man in der Geometrie spricht.

[1] Unveröffentlicht, 1973.

Hat die Geometrie also am Ende gar keinen Gegenstand? Dieser Schluss wäre sicherlich etwas voreilig. Einige Mathematiker und Philosophen haben nach dem Vorbild Platons behauptet, die Geometrie beziehe sich in Wahrheit auf etwas nur in Ideen Denkbares. Demnach wäre eine Gerade ein ideales Gebilde, das zwar nicht konkret als sinnlich wahrnehmbarer Gegenstand existiert, das aber gleichwohl Existenz besitzt: nämlich als geistiges Urbild der wirklichen, nur angenähert vollkommenen Geraden. Platon zufolge sind diese ideellen Urbilder wirklicher Dinge im Gegensatz zu den Dingen unwandelbar und wahrhaft seiend. Ihre Anwendung, insbesondere also auch die der Geometrie, erklärt er durch eine Teilhabe der Sinnendinge an den Ideen. Daher bedarf die geometrische Erkenntnis auch eines besonderen Vermögens, das uns den Zugang zu den Ideen verschafft und das bei Platon *Noesis* genannt wird.

Auch heute noch gibt man der Platonischen Auffassung immerhin zu, dass wir die Geometrie nicht durch Berufung auf die Erfahrung oder auf bloß anschauliche Evidenzen *begründen* können. Eine entsprechende Bemerkung ist etwa bei Hilbert und Bernays (*Grundlagen der Mathematik*, Band 1 (1934, 1968), S. 2 f) zu finden. Die von den Autoren dort eingeräumte *Idealisierung* soll aber nun nicht mehr eine noetische Erfassung idealer Gebilde erfordern. Stattdessen schlägt Hilbert vor, die Geometrie (und später die ›gesamte‹ Mathematik) von der inhaltlichen Betrachtungsweise zu befreien, und zwar folgendermaßen: In den üblichen Aussagen der Geometrie ersetze man alle Begriffsnamen (wie ›Punkt‹, ›Gerade‹, ›inzident‹, usw.) durch *bedeutungsfreie* Prädikatensymbole. Aus Aussagen werden so Aussageformen, aus Axiomen und Theoremen entsprechend Axiomen- und Theoremformen. In dieser Sicht fungieren die Axiomenformen lediglich als Regeln für den impliziten Gebrauch der in ihnen vorkommenden Begriffssymbole. Ihre Rechtfertigung geschieht nicht (mehr) durch Aufweis ihrer Evidenz oder Wahrheit, sondern durch den Nachweis ihrer Widerspruchsfreiheit (loc. cit. S. 3).

Die soweit angedeutete Auffassung der Geometrie ist aber nun keinesfalls das Patentrezept, als das sie heutzutage nicht selten gerne hingestellt wird. Einmal konfrontiert sie uns mit der Frage, warum sich gerade widerspruchsfreie (oder auch vollständige) Axiomensysteme als ›Grundlage‹ der Mathematik auszeichnen sollen. Ferner bleibt, noch mehr als aus Platons spekulativer Sicht, die Tatsache ungeklärt, dass und inwiefern sich eine nur noch formale Geometrie praktisch anwenden lässt. Darüber hinaus ist noch Weiteres zu bedenken. Die geometrische Axiomatik, die Hilbertsche ebenso wie die Euklidische, ist in erster Linie Ausdruck einer Kritik des von der Anschauung geleiteten Geometrietreibens. Axiome zu suchen ist so gesehen gleichbedeutend mit dem Analysieren von Aussagensystemen. So wertvoll die Ergebnisse der Analyse auch sein mögen, für das *Verständnis* der Geometrie reichen sie niemals völlig aus. Dazu – und damit zu den Grundlagen – gehören nämlich auch gewisse inhaltliche Vorstellungen beim Aufbau der Geometrie. Formalisten pflegen so etwas zu verdrängen und feiern ihre Haltung gelegentlich obendrein als ›Entontologisierung‹. Sie verweisen zurecht auf die Fehler und Vagheiten in gewissen Formulierungen, mit denen Euklid die geometrischen Grundbegriffe zu definieren suchte. Das ändert freilich nichts an der Tatsache, dass uns die Axiome als bloße Gebrauchsregeln keine zureichende inhaltliche Vorstellung der Grundbegriffe vermitteln, wenngleich es zutrifft, dass es einer solchen zum logischen Schließen nicht bedarf. Aber kein ernstzunehmender Mathematiker würde bestreiten, beim Betreiben von Geometrie von irgendeiner Form der Anschauung geleitet zu sein und seine formalen Deduktionen auf intuitiver Basis vorzubereiten.

Was ist nun diese Anschauung, vor allem: worauf beruht sie? Gewöhnlich zerbrechen sich Mathematiker ihren Kopf über andere Dinge. Sie wissen, es kann ihr Tun kaum beeinflussen oder gar in Frage stellen, wenn ihnen jemand den Gebrauch eines noetischen (oder sonstigen apriorischen) Vermögens nachwiese. Trotzdem wird man zugeben müssen, dass es nur theoretisch keine Rolle spielt, welche privaten Vorstellungen ein einzelner Geometer mit Punkt und Gerade verbindet. Denn schließlich gibt es anerkanntermaßen einen sich allzu großer Interpretationswillkür entziehenden Zusammenhang geometrischer Begriffe mit realen Erfahrungsobjekten. Zumindest die Didaktik der Mathematik müsste an einer Lösung der eingangs gestellten Frage nach dem Gegenstandsbereich der Geometrie interessiert sein, durch die ein Aufbau der Geometrie ermöglicht würde, in dem – wie Hugo Dingler in seinen *Grundlagen der Geometrie* von 1933 formulierte – »dessen Zusammenhang mit dem Realen unmittelbar gegeben ist« (S. 5). Allerdings ist das leichter gesagt als getan. Eine Definition der geometrischen Grundbegriffe wird man auch von Dingler nicht erwarten dürfen. Doch zeigt die von Paul Lorenzen revidierte Passung der Dinglerschen Geometrie, dass man sich berechtigte Hoffnung auf mehr machen darf als den bloßen Appell an anschaulich fundierte Evidenzen.

Es muss an dieser Stelle genügen, vorerst einmal allein die Richtung anzudeuten, in die der Vorschlag Dinglers zur Begründung einer inhaltlichen Geometrie geht. Auch Dingler geht davon aus, dass wir in der Natur keine eigentlichen geometrischen Formen finden. Streng genommen hat es nicht einmal Sinn, von den dort vorkommenden Flächen und Linien zu behaupten, sie seien angenäherte Realisierungen dieser Formen; dazu müssten wir nämlich schon ein Wissen um von Annäherungsfehlern freie Ebenen bzw. Geraden besitzen. Sicherlich nehmen wir aber dabei auch nicht irgendeine bestimmte Fläche oder Kante zum Vorbild, denn deren ›Unebenheiten‹ würden dadurch ein für alle Mal in die betreffenden Definitionen eingehen. Oft wird geltend gemacht, man müsse von jenen Unebenheiten absehen; die vollkommene Ebene etwa entstehe als bloß gedachte durch Abstraktion aus den vielerlei ungefähr ebenen Flächen. Gegen diese These von der Abstraktion wendet Dingler zurecht ein, dass ja überhaupt nicht klar sei, *wovon* denn eigentlich ›abstrahiert‹ werde. Wenn wir eine Ansammlung von Gegenständen vor uns haben, so können wir von der Natur der Objekte selbst absehen und so zur Anzahl der Ansammlung gelangen. Anzahlen kann man sich also durch Abstraktion entstanden denken. Liegt jedoch eine konkrete Fläche vor, so sind wir nur durch einen Willkürakt in der Lage zu entscheiden, ob diese Fläche noch ›eben‹ ist oder schon zu einer anderen Klasse von Flächen gehört. »Wird diese Frage irgendwie beantwortet, so ist dies nur möglich aufgrund einer *Idee*, die unbemerkt hinter dieser Antwort steckt.« [H. Dingler, *Die Ergreifung des Wirklichen* (1955), S. 135] Es ist bemerkenswert, dass uns gerade der Zusammenhang der geometrischen Begriffe mit der Lebenswelt, und darin einer durch Technik geprägten und vermittelten Erfahrung, wieder zum Konzept der geometrischen Ideen führt. Es sind dies allerdings keine Ideen im Sinne Platons, sondern begrifflich geprägte Normen, welche die technische Herstellung entsprechender Verkörperungen (Realisate) leiten. Eine mathematisch ausgearbeitete Lösung der damit verbundenen Begründungsaufgaben ist schwierig; bis heute sind nur Skizzen und in den Kinderschuhen stecken gebliebene Ansätze (wie etwa der P. Lorenzens) bekannt geworden.

Hugo Dinglers Prinzip der konvergenten Genauigkeit[1]

Zahlreiche Stellen in Dinglers Werken belegen seine Auffassung, wonach die Ideen der Geometrie (die für ihn die euklidische ist) in einem grundsätzlich unabschließbaren Prozess immer genauerer technischer Herstellung (»Exhaustion« genannt) zu eindeutig bestimmten Formen hinführen. In *Die Ergreifung des Wirklichen* (1955) spricht er von einem »*Prinzip der konvergenten Genauigkeit*« (S. 139). Ich bringe zur Verdeutlichung hier ein längeres Zitat (ebda. S. 155):

> Denken wir z. B. an die Idee der *Ebene*. Jede Realisierung dieser Idee gibt das Verhältnis wieder, wie es die Griechen meinten. Für uns aber ist diese Realisierung nur eine einzelne Etappe in einem *unendlichen Prozeß*. Dieser Prozeß führt zu immer besseren Realisierungen, ohne aber natürlich jemals die volle Realisierung der Idee zu erreichen. Hier besteht also nicht nur die Beziehung der Idee zu allerlei Einzeldingen, die alle einzeln an ihr teilhaben (wie es bei den Griechen war), sondern es besteht die Beziehung der Idee zu einer unendlichen, sozusagen linear geordneten Serie von vorhandenen und zukünftigen Realdingen, deren *Gesamtverlauf* erst die Realisierung der Idee darstellt. Das ist gegenüber den Griechen etwas Neues, das sie und Spätere niemals in Erwägung gezogen haben. Das ist deshalb verständlich, weil die Physik als Prozeß der Realisierung vorher noch nicht bekannt und nachgewiesen war.

Offensichtlich scheint Dingler stillschweigend anzunehmen, dass sich durch fortgesetzte ›reelle Exhaustion‹[2] jede beliebige Näherungsgüte bei den Realisaten erzielen lässt. Mit der Übernahme dieser alles andere als selbstverständlichen Prämisse stehen wir vor dem begriffslogischen Problem, ob und, wenn ja, wie ein solcher Konvergenzprozess im Gebiet realgegenständlicher Handlungen theoretisch präzise (oder zumindest präziser als bei Dingler selbst) gefasst werden kann. Praktisch hat man sich

[1] Unveröffentlicht, 1977.

[2] Dieser später in *OGG* = Peter Bender, Alfred Schreiber: *Operative Genese der Geometrie*, Wien/Stuttgart 1985, S. 344, eingeführte Terminus soll den Unterschied zu den *innerhalb* der Mathematik gebräuchlichen Exhaustions- bzw. Approximationsverfahren deutlich machen.

die potentiell beliebig fortsetzbare Verbesserung geometrischer Realisate so vorzustellen, dass ausgehend von geeignet gewählten Materialstücken und an ihnen urerzeugten Formen (wie Ebene, rechter Winkel, starrer Körper, usw.) schrittweise höhere Genauigkeiten erreicht werden, indem man auf jeder Stufe die technischen Mittel sämtlicher vorangegangenen Stufen zur Verbesserung (Korrektion, Melioration) heranzieht.[3]

Im Folgenden werde ich einen Weg aufzeigen, auf dem sich ein exakter Begriff der von Dingler eigentlich nur als *Redeweise* ins Spiel gebrachten Ideen-Realisierung gewinnen lässt, sofern diese als unendlicher konvergierender »Gesamtverlauf« praktisch-technischer Verbesserungsoperationen verstanden werden soll.

Wer in einem bestimmtem Bereich von Konvergenz spricht, kann dies durch Einführung einer Topologie für die Objekte des betreffenden Bereichs erklären. Daher definiere ich zunächst eine auf die Sache zugeschnittene Topologie und untersuche anschließend, wie sich die formal nachgebildeten Prozeduren der Ideen-Realisation innerhalb der etablierten topologischen Struktur auswirken.

Sei X eine beliebige nichtleere Menge und $N = (N_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$ eine Familie von Eigenschaften (einstelligen Prädikaten) der Objekte aus X. Ist $x \in X$ und gilt $N_\alpha(x)$, so wollen wir sagen: x *erfüllt die Norm* N_α. Ein typisches Beispiel ist die Eigenschaft (Norm) der inneren Homogenität einer Fläche bezüglich einer Prüfeigenschaft $\alpha \in \Omega$. Von einer solchen Fläche x wird verlangt, dass für alle Punkte (Stellen) p, q auf ihr mit $\alpha(x, p)$ stets auch $\alpha(x, q)$ gilt [vgl. dazu Kapitel 7 von *OGG*]. – Allgemein mögen nun zu irgendeiner gegebenen Teilmenge Ω' von Ω zwei Objekte x, y *äquivalent auf* Ω' heißen, wenn sie dieselben Normen N_α $(\alpha \in \Omega')$ erfüllen. Offensichtlich ist damit eine Äquivalenzrelation auf X definiert; die zu $x \in X$ gehörige Äquivalenzklasse werde mit $U(x, \Omega')$ bezeichnet. Die Menge X wird zu einem topologischen Raum, indem wir für jedes Objekt $x \in X$ eine Umgebungsbasis angeben. Dazu sei eine beliebige aufsteigende Kette

[3] Für eine Darstellung und eingehende Erörterung des konzeptuellen Rahmens sowie der praktischen Verfahrensweisen vgl. man Kapitel 9 von *OGG* zum Prinzip der Exhaustion. Einen größeren Raum nimmt darin die Realisierung des sog. starren Körpers ein, welcher in der Praxis der Geometrie für die messtechnisch operationalisierte Feststellung von Kongruenzbeziehungen unentbehrlich ist.

$\Omega_0 \subseteq \Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \ldots$ von Teilmengen von Ω angenommen, deren Vereinigung (Supremum) $= \Omega$ ist. Als Umgebungsbasis für x wählen wir dann das System aller Klassen $U(x, \Omega_k)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Die so etablierte Topologie ist identisch mit der »kanonischen Topologie«, die ich in *ThR* = *Theorie und Rechtfertigung* (Braunschweig, 1975) für Theoriensysteme definiert habe.[4]

Eine Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ ist (im Sinne dieser Topologie) konvergent zum Grenzwert g, wenn zu jedem $n \geq 0$ eine Nummer n_0 derart existiert, dass für alle $k \geq n_0$ die Objekte x_k und g auf Ω_n äquivalent sind. Es sei hier noch angemerkt: Ist Ω höchstens abzählbar unendlich und die Ω ausschöpfenden Teilmengen sämtlich endlich, so ist die Topologie (und damit auch der zugehörige Konvergenzbegriff) *unabhängig* von der zugrunde liegenden Kette $(\Omega_k)_{k=0,1,2,\ldots}$ [vgl. *ThR*, S. 186-188]. Der Rest dieser Überlegungen stützt sich auf diese Voraussetzung.

Nunmehr soll eine Folge (x_k, Ω_k), bestehend aus Objekten und Indexmengen, rekursiv aufgebaut werden, und zwar nach dem Vorbild des [in Kap. 9, *OGG*] für die praktischen Exhaustionsverfahren beschriebenen Rekursionsprozesses. Der Anfang besteht aus x_0 und Ω_0 mit $N_\alpha(x_0)$ für alle $\alpha \in \Omega_0$. Im Rekursionsschritt gehen wir von einer bereits hergestellten Folge $x_0, \ldots, x_n$ aus, deren letztes Glied die Normen N_α für $\alpha \in \Omega_n$ erfüllt. Das nächste Glied (x_{n+1}, Ω_{n+1}) erhalten wir aufgrund folgender Postulate:

(1) Es lässt sich ein α finden derart, dass keines der $x_0, \ldots, x_n$ die Norm N_α erfüllt; setze damit $\Omega_{n+1} := \Omega_n \cup \{\alpha\}$.

(2) Es lässt sich ein x finden, das sämtliche Normen N_β mit $\beta \in \Omega_{n+1}$ erfüllt; setze damit $x_{n+1} := x$.

Charakteristisch für diese Rekursion ist der Umstand, dass die Normen, die auf ein bestimmtes Folgenglied angewandt werden, von zuvor schon erzeugten Objekten abhängen. Diese Verschränkung von Kontrolle und Kontrolliertem spiegelt nichts anderes wider als die wechselseitig voneinander abhängigen Vorgänge einer reellen Exhaustion. Aber auch für sich genommen können die Postulate (1) und (2) als plausibel gelten. Was in ihnen gefordert wird, kann man in der ›Sprache der homogenen Flächen‹ folgendermaßen ausdrücken: (1) Es gibt keine endlich vielen Exemplare von

[4] Man hat dazu nur die dort benutzten Symbole T, E und R mit den oben eingeführten X, Ω und N zu identifizieren.

Flächen, so dass zu jeder gegebenen Formel α wenigstens eines von ihnen bezüglich α innerlich homogen ist. (2) Sind endlich viele Formeln vorgegeben, so kann man stets eine Fläche finden (herstellen), die bezüglich dieser Formeln innerlich homogen ist.

Abschließend bleibt hier noch die Frage der Konvergenz zu beantworten. Mit X werde die Menge aller vermöge (1) und (2) erzeugten x_k bezeichnet, mit Ω entsprechend die Vereinigung aller zugehörigen Ω_k. Wir betrachten dann die von $N = (N_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ auf X induzierte Topologie (die nach früher Gesagtem unabhängig ist von der Wahl und der Reihenfolge der Ω_k). Dann gilt die Behauptung: Die Folge (x_k) ist uneigentlich-konvergent in dem Sinn, dass sie in der Ein-Punkt-Kompaktifizierung des (lediglich lokalkompakten) Raums X gegen das dabei neu hinzugefügte Element (›Objekt‹) konvergiert. (Ganz entsprechend werden z. B. unbeschränkte monotone Folgen nicht-negativer reeller Zahlen zu uneigentlich-konvergenten, wenn man die rechte Hälfte des Zahlenstrahls durch Hinzufügen eines neuen Punkts, meist mit ∞ bezeichnet, kompaktifiziert.)

Anmerkung zum Beweis. — Die Konvergenz-Aussage ergibt sich aus einem Satz in *ThR* (S. 189) durch Nachweis gewisser Progressionsprinzipien P_0, P_1, P_2 für die Menge X. P_0 besagt, dass X unendlich ist. P_1 fordert zu x_n ein $\alpha \in \Omega$ mit $N_\alpha(x_n)$, jedoch $\neg N_\alpha(x_k)$ für $k < n$. Schließlich wird von P_2 nur eine (echte) Abschwächung benötigt, wonach zu beliebiger endlicher Teilmenge Ω' von Ω sämtliche Normen N_α $(\alpha \in \Omega')$ von einem $x \in X$ erfüllt werden [vgl. *ThR*, S. 191]. [5]

[5] Eine ausführliche und (gegenüber *ThR*) revidierte Darstellung des Beweises sowie der hier nur grob skizzierten topologischen Verhältnisse enthält der Beitrag ›Progression von Theorien‹, in: A. Schreiber, *Begriffsbestimmungen*, Logos-Verlag: Berlin 2011, S. 206-233.

Diskussionsbeitrag zum Internationalen philosophischen Symposion, Göttingen 1977[1]

Fragen an Paul Lorenzen

Im Frühjahr 1977 hatte ich zusammen mit Peter Bender eine (1985 zum Abschluss gebrachte) Untersuchung begonnen, die darauf ausgerichtet war, Dinglers operative Philosophie der Geometrie und deren Weiterentwicklung durch Lorenzen und seine ›Erlanger Schule‹ hinsichtlich ihrer grundlagentheoretischen Bedeutung zu analysieren sowie auf ihre fachdidaktische Anwendbarkeit hin zu prüfen. Lorenzens Ansatz, die Ideen Dinglers zu präzisieren, hatte bis dahin hauptsächlich auf so genannten »Homogenitätsprinzipien« beruht, welche die Gleichartigkeit gewisser Raumstücke prädikatenlogisch zum Ausdruck bringen. Nun war seit kurzem von einem neuen »formentheoretischen« Ansatz die Rede. Auf dem Göttinger Symposion hielt Lorenzen einen Hauptvortrag unter dem Titel ›Wissenschaftstheorie und Nelsons Erkenntnistheorie am Beispiel der Geometrie und Ethik‹ und nutzte dann auch diese Gelegenheit, seine damalige Formentheorie (samt Axiomensystem) ins Spiel zu bringen.

Hier ein Ausschnitt aus der Diskussion:

Alfred Schreiber. — Aus Ihren früheren Beiträgen zum Begründungsproblem der Geometrie (seit 1961) kennt man einen auf den ersten Blick anders aussehenden operativen Ansatz als den soeben von Ihnen vorgetragenen »formentheoretischen« Zugang. Dort gehen Sie nämlich von einer Präzisierung von Ununterscheidbarkeitsforderungen (nach Dingler) in Gestalt von Homogenitätsprinzipien aus. Meine erste Frage lautet daher: Ist diese ältere Version des Geometrieaufbaus damit hinfällig, überholt, oder welches Verhältnis besteht sonst zwischen ihr und dem, was Sie heute inhaltlich zur »Protogeometrie« (nach Janich und Inhetveen) vorgetragen haben?

Meine zweite Frage betrifft die von Ihnen vorgeschlagene Einführung des Ebenenbegriffs vermöge der Definition ›K eben $:\Leftrightarrow\ Kp^3K$‹, wobei p die Relation des Passens bedeutet. Gibt es hier nicht naheliegende Gegenbeispiele wie etwa ›ebene Fläche mit Stufe‹ und ähnliches mehr? Wenn ich Sie

[1] In P. Schröder (Hg.), *Vernunft Erkenntnis Sittlichkeit.* Internationales philosophisches Symposion, Göttingen, vom 27. – 29. Oktober 1977, aus Anlaß des 50. Todestages von Leonard Nelson; Felix Meiner Verlag: Hamburg 1979.

richtig verstanden habe, so sollten derartige Gegenbeispiele dadurch ausgeschlossen werden, daß das betroffene Oberflächenstück von K unabhängig vom markierten Berührungselement gewählt wird. Steckt in diesem Bezug auf sämtliche Berührungselemente nicht in irgendeiner Form die Voraussetzung der freien Beweglichkeit, so daß – entgegen Ihrer Aussage – in dieser Geometrie doch Bewegungen vorkommen?

Paul Lorenzen. — Die Homogenitätsprinzipien meiner früheren Arbeiten werden in der Formentheorie zu beweisbaren Sätzen.[2] Nur die 2-Punkte-Homogenität gehört jetzt zur Definition der Strecke als einer Form.

Die Definition der Ebenheit eines Oberflächenstücks K durch Kp^3K für *alle* Berührungselemente von K benutzt ersichtlich – wie die gesamte Formungstechnik – daß sich die Körper *bewegen* lassen. Unter »freier Beweglichkeit« versteht man die Forderung, daß bei den Bewegungen alle Punktepaare in kongruente Punktepaare übergehen (also die »Starrheit«). In der Protogeometrie kommt aber der Kongruenzbegriff *nicht* vor.

Nachtrag

Nach Erscheinen des Buchs Bender/Schreiber, *Operative Genese der Geometrie* (1985), erhielten die Autoren einen sehr freundlichen Brief von Professor Lorenzen. Hier ein Auszug daraus:

»Ich danke Ihnen herzlich für das Buch „Operative Genese der Geometrie". Endlich einmal eine ausführliche Darstellung der didaktischen Vorzüge, die das Prinzip der operativen Begriffsbildung gegenüber der axiomatischen Methode hat (die sich nur auf eine passive Evidenz von Axiomen beruft).

Eine solche didaktische Ehrenrettung für Dingler war schon längst fällig – ich bin Ihnen sehr dankbar dafür und hoffe, daß zumindest der Unterricht in den Schulen durch Ihr Buch neue Impulse für eine praxisbezogene Geometrie bekommt.

En détail wird, wie Sie auch schreiben, noch vieles zu klären sein: insbesondere ob die Kongruenz (realisiert durch Transport starrer Körper) oder eine allein durch Orthogonalität definierte 'Größengleichheit' von Strecken als Basis der Definition von „Länge" – und damit der Längenmessung – für eine Theorie geometrischer Praxis geeigneter ist.«

[2] Es ist bis heute (2017) nicht ersichtlich, worauf Lorenzen sich mit dieser kühnen Behauptung gestützt hat. Beweise dieser Art sind meines Wissens denn auch niemals geführt worden. Die ›Formentheorie‹ ist in ihren ersten vagen Ansätzen steckengeblieben.

Das Ende der ›Protogeometrie‹ als »Theorie räumlicher Figuren«[1]

Vorbemerkungen. — Meine ausführliche Stellungnahme zu dem Versuch Amiras' [im Folgenden: Vf], die Protogeometrie (PG) anknüpfend an P. Lorenzens ›Figurentheorie‹[2] als »Theorie räumlicher Figuren« wiederzubeleben, enthielt u. a. eine ins Detail gehende Analyse zahlreicher formaler Unzulänglichkeiten und sachlichen Fehler in den mathematisch gehaltenen Anfangskapiteln. Der Vf hat in diesen Teilen seiner Schrift gleichsam *more geometrico* mit relationentheoretischen und prädikatenlogischen Mitteln die grundlegenden Eigenschaften der Inzidenz, Berührung, Passung, Bewegung und Formkonstanz beschrieben, soweit sie ihm für die Neufassung seiner PG erforderlich erschienen. Er gibt Definitionen, formuliert Lehrsätze und führt Beweise. Neben mancher Trivialität (etwa Aussagen der Art, dass die »Koinzidenz« ii von Figuren eine Äquivalenzrelation ist) leidet diese PG unter problematischen Begriffsbildungen, fehlerhaften und – vor allem da, wo es nichttrivial wird – fehlenden Beweisen. Auch wenn diese Einzelheiten wenig dazu geeignet sind, hier ausgebreitet zu werden, so hätten sie hingegen sehr wohl verdient, dass der Vf sich durch sie veranlasst fühlt, die objektiv kaum bestreitbaren mathematischen Defizite irgendwann einmal zu beheben oder auch nur zu ihnen zu stehen. Offensichtlich nicht friedlich gestimmt trotz der schmeichelhaften Tatsache, dass seine PG als Habilitationsbeitrag letztlich angenommen wurde, sondern zudem noch angestachelt durch eine vergleichsweise diplomatische Einlassung in meinen *Begriffsbestimmungen* (Berlin 2011, S. 153-154), glaubte er in der schließlich 2014 (im Logos-Verlag) publizierten Endfassung von PG zum Gegenschlag ausholen zu sollen.

Nicht allein stecken auch in dieser neuen *Protogeometrie* im Wesentlichen immer noch die alten (und, wie es scheint, nach wie vor vom Vf nicht verstandenen) Probleme – er kommt hinsichtlich seiner Gutachter nun sogar zu dem merkwürdigen (bis dahin auch von ihm nicht verlauteten) Fazit, die geometrische Begriffsbildung erfolge »bei Bender / Schreiber gerade nicht operativ!« (S. 230). Und weshalb? Weil dort [in *Operative Genese der Geometrie*, 1985, Reprint 2012] Funktions- und Formanalysen angeblich »in der Luft« hingen und »ohne Bezug auf reale Figuren«

[1] Auszüge aus einem im Sommer 2006 verfassten Kommentar als Vorbereitung für ein Gutachten über die als Habilitationsschrift von Herrn Dr. Lucas Amiras vorgelegte Arbeit *Protogeometrie. Elemente der Grundlagen der Geometrie als Theorie räumlicher Figuren*, Pädagogische Hochschule Weingarten 2006.

[2] Siehe S. 68 f in diesem Band.

blieben, kurzum: weil »die methodische Konstitution der Terminologie« und deren »Anbindung an das technische Vokabular« nicht geleistet worden sei. Auf S. 231 bekennt er dann: »Die Beschränkung auf ‘didaktische Zwecke’ halte ich für eine Selbsttäuschung … « Es sieht also ganz danach aus, dass der Vf weiterhin an seinen pseudo-axiomatischen Trivialitäten festhält und dass die (von den Gutachtern beanstandete) stiefmütterliche Ausführung ausgerechnet der fachdidaktischen Teile weniger einem Zeitmangel geschuldet war als dem womöglich überwiegenden Interesse des Vfs, sich als mathematisch arbeitender Grundlagentheoretiker der PG in Szene zu setzen. Statt die 2014 erschienene PG öffentlich zu besprechen, scheint es mir daher angemessener zu sein, hier einige Auszüge aus meinem analytischen Exposé zum Habilitationsgutachten zusammenzustellen; ihnen lässt sich entnehmen, in welchem Ausmaß eine protogeometrische Figurentheorie wie diese sich im Ganzen als ein nicht bloß zweifelhaftes, sondern als ein auf der ganzen Linie kläglich gescheitertes Unterfangen darstellt.

Neukonzeption der ›Protogeometrie‹

Nach der detaillierten Kritik der Protogeometrie[3], die der Vf in seiner Konstanzer Dissertation vorgelegt hat, setzt er sich in seiner vorliegenden Arbeit nun das Ziel einer eigenen (gegenüber sämtlichen Vorläufern verbesserten) Begriffs- und Theorieentwicklung auf diesem Gebiet. Die geometrischen Grundrelationen und Grundentitäten werden dabei im Rahmen einer Figurenlehre eingeführt, welche als begriffliche »Rekonstruktion« einer »elementaren technischen Praxis des Umgangs mit Körpern« (S. 19) verstanden und aufgebaut werden soll. Ist dies erst einmal gelungen, so können die historische Entwicklung (Teil II) und das didaktische Umfeld der Geometrie (Teil III) vor dem Hintergrund dieser Re-Interpretation in einem anderen, auf neue Aspekte gerichteten Licht gesehen bzw. bewertet werden. Der figurentheoretische Ansatz selbst ist dabei nicht neu[4], doch

[3] Als Forschungsprogramm zur Begründung der Geometrie in der Tradition Dinglers von der sog. Erlanger Schule um P. Lorenzen angeregt und in Ansätzen ausgeführt, zu Beginn der 1980er Jahre von Bender / Schreiber in *Operative Genese der Geometrie* (OGG) kritisiert und didaktisch uminterpretiert. Scharfe Kritik an der Protophysik wurde etwa zeitgleich von K.-J. Düsberg vorgetragen [vgl. *Zur Messung von Raum und Zeit*, Monographien zur Philos. Forschung Bd. 192, Meisenheim 1980].

[4] Zum Beispiel von R. Inhetveen und P. Lorenzen skizziert, nachzulesen etwa in Lorenzen, *Elementargeometrie* (1984); vgl. auch die Kritik von A. Schreiber in *ZDM* 5 (1984) sowie die ›Fragen an Paul Lorenzen‹ in diesem Band S. 68.

erfordert er angesichts der an ihm bisher (gerade auch vom Vf) aufgewiesenen Defizite eine grundlegende Neukonzeption, die erklärtermaßen eines der Ziele der vom Vf vorgelegten Habilitationsschrift ist.

Fragen wir nach dem Status einer protogeometrischen Figurenlehre, so sind wir mit einer spezifischen methodischen Schwierigkeit konfrontiert. Einerseits soll es sich um eine der eigentlichen geometrischen (und axiomatisch ausformulierten) Theorie *vorgängige* Entwicklung handeln, die ihre Aufbauschritte möglichst eng an eine (wie auch immer zu kennzeichnende und einzugrenzende) Handlungspraxis koppelt. Andererseits muss gleichwohl eine innere und formalisierter Darstellung zugängliche Ordnung auch der Figurenlehre zum Vorschein kommen, wenn letztere den Anspruch einlösen soll, zu einer Theorie im strengeren (formalen) Sinne der Mathematik hinzuführen. Um dieser Doppelbedingung gerecht zu werden, entwickelt der Vf seine Figurenlehre in einer symbolischen Nomenklatur, will diese aber (zurecht) vor allem als ein Mittel vorbereitender Begriffsbildungen und -präzisierungen verstanden wissen und nicht unmittelbar als ein axiomatisches System der Geometrie, in dem die typischen Idealisierungen (z. B. unbegrenzt zu denkende Geraden und Ebenen) und ineins damit die Ablösung der Begriffsform von jeglichen Gegenstandsbezügen bereits vollzogen sind. In diesem Zusammenhang erscheint es daher als angemessen, keinen i. e. S. deduktiv-logischen Aufbau der Geometrie aus der Figurenlehre anzustreben, sondern lediglich einen verglichen damit unschärferen »methodischen« Übergang (vgl. S. 100). Indem ferner der Figurenlehre *ab ovo* ein technisch-physikalischer Gehalt (bzgl. der realen Körper und der an ihnen vollzogenen Bearbeitungsvorgänge) unterlegt wird, resultiert daraus – jedenfalls der Idee nach – ein interpretiertes Teilsystem der theoretischen Geometrie. Deren ideale Objekte werden mindestens mittelbar (indirekt) verstehbar als »‘Hochstilisierung’ eines wichtigen Teils unserer Rede und Praxis« (S. 101).

Der hier und an anderen Stellen der Arbeit wiederholt geltend gemachte Bezug zu einer »manuellen technischen Praxis« birgt eine methodologische Schwierigkeit, die explizit zu thematisieren ist, wenn man sich anschickt, »darin verankerte Redeweisen zu rekonstruieren«. Die zahlreichen figurentheoretischen Postulate, die der Vf in Teil I aufstellt und erörtert, sollen ja ihre Rationalität aus dieser (noch gar nicht legitimierten) Praxis beziehen.

Bloßem Handeln ist aber keine Wahrheit abzugewinnen; eine Praxis etwa, die vornehmlich im planlosen Zerstören von Körpern bestünde, wäre wohl kaum konstitutiv für eine Figurenlehre, die zur Geometrie hinleitet. Somit muss umgekehrt ein Rationalitätsprinzip identifiziert werden, welches das praktische Handeln bestimmt, bevor es zum lebensweltlichen Hintergrund begrifflicher Rekonstruktionen avanciert. Der Vf verweist darauf (vgl. I.5), dass, soweit wir uns auf die technische Praxis beschränken, es die »Verwendung« der herzustellenden Objekte sei, von der gewisse ihrer Formeigenschaften abhängen (über Beziehungen des Passens und der Beweglichkeit). Die Praxis realisiert somit (als »praktisch relevantes Normensystem« [sic!] eingesetzte) Teile der Geometrie, die diesen Zusammenhang ermöglichen, und überprüft sogar die Realisierungsgüte (S. 93). Die Protogeometrie muss sich somit an einer Praxis ausrichten, die bereits von geometrischer Erkenntnis mehr oder weniger ausgeprägten Gebrauch macht. In dem Maße, in dem man sich dabei tatsächlich auf einen vortheoretischen »elementaren, manuellen« Umgang mit Körpern »über Markierungen, Berührungen, Bewegungen« beschränken kann, ließe sich eine operativ-pragmatisch interpretierbare Reformulierung bestimmter Teile der theoretischen Geometrie durchaus als sinnhafter Versuch einer philosophischen Rechtfertigung werten.

Der in Anspruch genommene philosophische Rahmen wird vom Vf allerdings nur gelegentlich und eher beiläufig kenntlich gemacht. Anschauung und »Vorstellungskraft« werden zwar in ihrer psychologischen (und pädagogischen) Unterstützungsfunktion anerkannt, jedoch »als primäre Instanz der Verankerung … für die Geometrie« zurückgewiesen (S. 43). Die Referenz auf das praktische Handeln erfolgt stattdessen überwiegend in appellativer linguistischer Begrifflichkeit[5]. Verweise auf das inhaltliche Substrat von Redeweisen, die traditionell »fälschlicherweise als Definitionen der Objekte fungierten«, übernehmen nun die noch verbleibende Funktion, »das geometrische Spiel der technischen Handlungen … richtig spielen zu helfen« (S. 51). An dieser Stelle wäre es angezeigt gewesen, Art und Berechtigung des hier unvermittelt eingebrachten Spielbegriffs zu erläu-

[5] Beispiele typischer Wendungen: »eine Terminologie bereitgestellt« (S. 3), »zuerst den Sprachgebrauch … analysieren« (S. 18), »sollen Redeweisen rekonstruiert werden«, »Explikationen … aus dem normalen Sprachgebrauch« (S. 37) und dgl. mehr.

tern (Sprachspiel im Sinne Wittgensteins? Spiel in einem soziologischen oder anderweitigen Verständnis?), zumal die betreffenden Handlungen einer technischen Finalität unterliegen, die gemeinhin gerade nicht typisch für ein Spiel ist.

Problematische Formalisierungsansätze

Der Vf hat eine »formale Fassung« seiner Protogeometrie vorgelegt, obwohl diese in seinen Augen »auch ohne Formalisierung als Basis für die Geometrie … und sogar für die Didaktik« genutzt werden könne (S. 98). Zweifelsohne hat aber eine Formalisierung den Vorteil, dass a) das logisch-begriffliche Gerüst der Rekonstruktion vom mathematischen Standpunkt aus prüf- und kritisierbar wird (ohne dass damit einer formalistischen Sichtweise Vorschub geleistet würde), und b) der Nachweis zu erbringen ist, »dass man … auf der Basis des technischen Vokabulars durchaus exakt reden kann« (ibid.). In diesem Sinne möchte ich auf einige Aspekte der in I.1-5 entwickelten protogeometrischen Figurenlehre eingehen.

Zu Beginn werden fünf Sorten von Individuen gekennzeichnet: formal durch Variablen K, O, G, L, P (beziehentlich Körper, Oberflächenstücke, Gebiete, Linien, Punkte)[6], inhaltlich durch Beschreibung von Vorgängen der Praxis des Markierens, Berührens, Bewegens etc., auf die der Vf sich wiederholt beruft. In späteren Definitionen (D), Postulaten (P) und Sätzen (S) spielen praktisch nur Punkte, Linien (Striche) und Gebiete eine Rolle. Punkte und Linien werden mit spitzen Markierungskörpern in Oberflächen anderer Körper geritzt oder gezeichnet. Gebiete bestimmt der Vf als Oberflächenstücke, die von geschlossenen (!) Strichmarken begrenzt werden, »bei denen während des Markierungsvorgangs keine Berührung des Markierungskörpers mit dem schon gezeichneten Teil der Strichmarke stattfindet« (S. 21). Die Sinnhaftigkeit dieser Beschreibung hängt entscheidend davon ab, was dabei unter Berührung verstanden werden soll. Berührt eine Spitze die von ihr gezeichnete Spurlinie nicht permanent? Tatsächlich wird aber die Berührungsrelation (auch protogeometrisch) weder hier noch

[6] Der Einfachheit halber verzichte ich darauf, die (angemesseneren) protogeometrischen Termini »Punktmarke« statt Punkt, »Linienmarke« statt Linie usw. zu verwenden, die der Vf vorschlägt. Missverständnisse sind deswegen nicht zu befürchten.

später zulänglich bestimmt. Folglich erscheint auch der Gebietsbegriff (jedenfalls in der genannten Art seiner Einführung) nicht befriedigend geklärt (abgesehen davon, dass noch das Innere vom Äußeren durch ein geeignetes Kriterium zu unterscheiden wäre).

Der Vf führt eine (infix geschriebene zweistellige) Inzidenzrelation i ein; so besagt etwa $P\ i\ L$, dass der Punkt P auf der Linie L liegt. Daneben werden Variablen $x, y, z, \ldots$ für »Figuren« und Variablen $F, F_1, F_2, \ldots$ für »Figurengruppen« (Mengen von Figuren) verwendet und die Inzidenzrelation formal auf diesen fortgesetzt. »Figur« ist dabei der Oberbegriff von Punkt, Linie, Gebiet. Gemäß D1.1 können Linien auf Linien oder Gebieten liegen, Gebiete auf Gebieten; zu Grundformeln der Art $G\ i\ L$ gibt der Vf keinen Hinweis (verbietet sie allerdings nicht explizit). Inzidenz zwischen Linien und Gebieten ist D1.1 zufolge gleichbedeutend mit der Inklusion der Mengen der auf ihnen liegenden Punkte. Folgerichtig wird eine Koinzidenz $x\ ii\ y$ eingeführt durch $x\ i\ y\ \&\ y\ i\ x$ (mit Figuren x, y gleicher Sorte); ii ist eine Äquivalenzrelation, bzgl. der »nun eine (erste) Abstraktion« von Punkt-, Linien- und Gebietsmarken zu Punkten, Linien und Gebieten zu vollziehen sein soll. In deren Sinn lässt sich nun »anstatt ii … das Gleichheitszeichen verwenden« (S. 25). Dies ist trivialerweise richtig; denn tatsächlich ist die so definierte Koinzidenz von vornherein nichts anderes als die Identität, da überhaupt nur Figuren auf einem Körper in Betracht gezogen werden (und somit die Äquivalenzklassen stets einelementig sind). Eine echte Abstraktion findet also gar nicht statt. Dass später eingeführte Begriffe bzgl. ii invariant sind (vgl. etwa P1.15.3, Anm. 1.18), ist dann nur noch eine logische Selbstverständlichkeit. – Als nicht unproblematisch vom Standpunkt einer Protogeometrie erscheint die in D1.1 zum Ausdruck kommende extensionale Auffassung von Figuren als Mengen der auf ihnen liegenden Punkte (hier nämlich Punktmarken, die ja aktual überhaupt nicht realisiert oder auch nur realisierbar sind). Der Begriff einer potentiellen Punktmarke wurde nicht eingeführt, und Stellen, an denen ein Punkt lediglich markiert werden *kann*, sind effektiv keine Punktmarken im Sinne der »Markierungspraxis«. – Vom logischen Standpunkt aus wird streng genommen die Mehrsortigkeit obsolet und auf ein mengensprachliches Hilfsmittel reduziert. — […][7]

[7] Die hier ausgesparte, ins Einzelne gehende Diskussion der strikten Anordnung $<$, der In-

Übergang zu Postulaten der Bewegung. — Ab Seite 30 ff erweitert der Vf seine Betrachtungen um den Aspekt der »Bewegung«. Punkte auf verschiedenen Körpern, die sich nicht aktual berühren, lassen sich unter Umständen aber in Berührlage bringen und werden vom Vf daher wechselseitig berührbar genannt (vgl. die Relation $b(P_1, P_2)$ in D1.17). Er weist darauf hin, dass diese Unterscheidung »in der protophysikalischen Geometrie nicht gemacht worden« sei (Fußnote 19, S. 32); auch beklagt er, dass die sich mit dem »Phänomen der Bewegung ..., das unsere Praxis durchzieht« auseinandersetzende »Terminologie der Prozesslehre ... bis heute leider nicht genauer systematisch betrachtet worden« sei. Wie schon zuvor sucht der Vf die diesbezüglichen »elementaren Unterscheidungen ... in der Grammatik unserer Sprache«, d. h. hier: in den Beschreibungsmitteln für Vorgänge (Prozesse, Aktionen, etc.) und für die in ihnen identifizierbaren Zustände (Situationen etc.). Zwar erwähnt er »erste und weitreichende Ansätze ... bei Aristoteles«, übersieht aber, dass es längst eine Vielzahl ausgearbeiteter Modellierungen zu diesem Thema gibt.[8] Stattdessen präsentiert der Vf zwei [sic!] »Postulate der Bewegung«.

P1.16.1 (»Relativität der Bewegung«) drückt aus, dass ein »Bewegungsvorgang von x bzgl. y« auch ein solcher »von y bzgl. x« ist. Es ist mir im Hinblick auf die naiv alltagssprachlich benutzten Termini »Bewegung« und »Relativität« nicht klar, was mit diesem Postulat eigentlich gemeint sein soll. Soll gesagt werden, dass jeder der beiden Körper im Ruhesystem des anderen als bewegt erscheint? Dies ließe sich dann allerdings gar nicht so »leicht in der Grammatik unserer Sprache ... finden«, die sich immer noch der relativistischen Tatsache verschließt, dass ein parkendes Autos sich auf das auffahrende zubewegt oder dass ein Mordopfer im Ruhesystem einer Pistolenkugel den Freitod gesucht hat. Ganz zu schweigen von der Frage, ob Relativität auch für Drehbewegungen postuliert werden kann (was nicht einmal Einstein akzeptiert hat).

---

zidenz i, der Relationen der Berührung B und Passung P bringt mancherlei Unklarheiten, formale Ungeschicklichkeiten und Fehler zutage.

[8] Etwa die bekannten Systeme der Temporalen Logik (Prior, von Wright, u.v.a.) oder die neueren Varianten der Situationslogik (Barwise) sowie Prozess- und Aktionslogik, letztere mit ihren bis ins Detail ausgearbeiteten praktischen Anwendungen in der Robotik (Bewegungsvorgänge!), Echtzeitplanung, Intellektik, usw.

P1.16.2 konstatiert Invarianz der »Inzidenzverhältnisse bewegter Figuren«. Sofern Inzidenz und Identität (in dem von mir oben herausgestellten Sinne) dasselbe ist, ist diese Forderung recht schwach, indem nämlich nur verlangt wird, dass z. B. ein Punkt auf einer Linie bei einer Bewegung ihres Körpers nicht aus ihr ›herausgerissen‹ wird (während man doch in der Geometrie einen starren Körper K benötigt, auf dem Punkte ihre *Abstände* zueinander behalten, wenn K bewegt wird). Hat man aber nicht mehr als P1.16.2, so ist es sogar möglich, dass die Zwischenlage eines Punktes bezüglich zweier anderer durch eine Bewegung verloren geht. Das »Invarianz«-Postulat ist somit nicht einmal in vollem Umfang topologischer Natur (was immer noch sehr bescheiden wäre).

Es ist von vornherein abzusehen, dass sich derart fragwürdigen Postulaten kaum nennswerte inhaltliche Folgerungen abgewinnen lassen. Dazu wären wohl weitere und deutlich weitergehende Annahmen erforderlich (etwa darüber, inwiefern Bewegungen stetig, reversibel oder transitiv ausführbar sind). Der Vf begnügt sich damit, die Definitionsgruppe D1.17 anzuhängen (zur Einführung der Relationen »Berührbarkeit« sowie p [= »passt an«] für Linien und Gebiete mit Ausweitung auf Figuren und Figurengruppen). »Bewegungsvorgänge« sind darin eine neue, sechste Individuensorte im protogeometrischen Diskurs. Auf sie wird später implizit bei der Behandlung der Gestaltkonstanz und explizit bei der Behandlung der Grundformen wieder zurückgegriffen (und zwar in der starken Form eines Gegenstandsbereichs[9], über den unbeschränkte All- und Existenzquantoren laufen, wobei noch nicht einmal geklärt ist, wann zwei Bewegungen übereinstimmen). Die exaktsprachliche »Rekonstruktion« dieser Relationen lässt zu wünschen übrig, nicht zuletzt hinsichtlich der Art und Weise, wie Anfangs- und Endzustand eines Vorgangs als Präfixe »A.S.« und »E.S.« vor Teilformeln geschrieben werden, wo es doch eigentlich auf der Hand liegt, den gewünschten Zeit- oder Ereignisbezug durch Parametrisierung der »Figuren«-Variablen wiederzugeben[10].

---

[9] Auf S. 76 werden in der Tat Bewegungen als »Objekte« aufgefasst (unmittelbar im Anschluss an D4.9).

[10] Streng genommen wäre es dazu nötig, von vornherein Figurenmarken an Prozessvariablen zu binden, d. h. technisch: sie in Gestalt von Grundfunktionen einzuführen.

Anmerkungen zu Kapitel 2. — In diesem Kapitel behandelt der Vf »räumliche Figuren«, wobei er zunächst »die Redeweisen rekonstruiert …, bei denen Figuren als trennende Schnitte bzw. als gemeinsame Grenzen anderer Figuren betrachtet werden«, eine seiner Meinung nach bislang »in der Protophysik völlig übersehene«, »konstitutive« Auffassung (S. 37). In einer allgemeinen Vorbetrachtung werden (durch phänomenologische Schau? durch linguistische Analyse?) Einsichten gewonnen wie die, dass eine Grenze einen Ort hat, Raum einnimmt und »nur einmal da ist«. Wenn man bedenkt, wieviel vergebliche Tinte in der philosophischen Literatur zu zahlreichen ähnlichen Fragen geflossen ist (z. B. der, inwiefern Farben *a priori* extensive Qualitäten seien[11]), kann man nur staunen, mit welcher Unbefangenheit der Vf am laufenden Band protogeometrische Evidenzen dieser Art »aus dem normalen Sprachgebrauch« hervorzaubert, um »die daraufbezogene Rede zu präzisieren« (S. 41).

Bei dieser Gelegenheit wird behauptet, die »Geometrie als Theorie der Figuren« – die in diesem Stadium protogeometrischer Diskursentwicklung als solche eigentlich gar nicht verfügbar ist – betrachte »alle Figuren als Abstrakta bzgl. Ortsgleichheit, die als Inzidenz oder Berührung vorliegen kann«. Eben diese Relation (mit I bezeichnet) führt der Vf in D2.1 wie folgt ein: $P_1 I P_2 :\Leftrightarrow B(P_1, P_2) \vee P_1 \ i \ P_2$ (reflexive Hülle von B nach Riguet). Für Punkte besteht zwischen I und der in D2.2 eingeführten Koinzidenz-Relation II (Hüllenbildung mit ii statt i) natürlich kein Unterschied. Linien bzw. Gebiete sind II-koinzident, wenn sie zueinander passen oder identisch sind (D2.2.2-3). Mit den früher bereits kritisierten Postulaten und Definitionen ergibt sich auf einfache Weise, dass I transitiv (S2.5) und II eine Äquivalenzrelation ist (S2.7). – Ich vermag die vom Vf behauptete Bedeutung, die dieses »erste Ziel der Rekonstruktion« (S. 50) für die Geometrie angeblich besitzen soll, nicht nachzuvollziehen. Sämtliche Aussagen drücken ja lediglich Zugehörigkeitsbeziehungen zwischen Punkten und Punktmengen aus bzw. ›doppeln‹ diese Verhältnisse auf einem/mehreren Körpern durch eine letztlich unklar bestimmte Berührrelation. — […][12]

---

[11] Vgl. dazu etwa die umfangreiche Habilitationsschrift von Harald Delius, *Untersuchungen zur Problematik der sogenannten synthetischen Sätze apriori* (Göttingen 1963).

[12] Kapitel 3, dessen kritische Kommentierung ich hier fortlasse, behandelt die Begriffe ›Gestaltgleichheit‹ und ›Kopie‹. Es enthält mehrere schwerwiegende logische und methodische

Einführung von ›gerade‹ und ›eben‹. — In Kapitel 4 wird der Versuch unternommen, die Begriffe ›gerade‹ und ›eben‹ einer »eindeutigen protogeometrischen Bestimmung« zu unterziehen (S. 69). Um es gleich vorwegzunehmen: Dieser Versuch ist – nicht anders als die vom Vf in der Vergangenheit kritisierten Ansätze der Erlanger Schule – als verfehlt zu werten.

Der Vf beginnt mit einfachen (allseits bekannten) Beobachtungen über Geraden und Ebenen. Weshalb er den Geradenbegriff vor dem der Ebene behandelt, wird an dieser Stelle nicht näher erläutert. Im Prinzip laufen beide »Definitionen« ohnehin auf dieselbe (keineswegs neue) Idee hinaus: Eine Linie wird als gerade (ein Gebiet als eben oder flach) erklärt, »wenn Kopien davon zueinander glatt sind« (vgl. D4.9 und D4.20). – Der unbestimmte Plural »Kopien« lässt zunächst offen, ob er für einen Existenz- oder einen Allquantor steht. Wie dem auch sei, sinnvoll definierte Begriffe von Kopie und Glattheit müssten den Beweis erlauben, dass die Kopie einer glatten Punktmenge ihrerseits glatt ist (in welchem Fall man sich mit der Existenz einer glatten Kopie begnügen kann). In S4.4 präsentiert der Vf eine diesbezügliche Behauptung, überlässt den Beweis jedoch seinen Lesern (darüber gleich mehr).

Der Begriff »glatt« wird vom Vf mit Hilfe der früher zur Sprache gekommenen »Bewegungsvorgänge« formuliert. In D4.1 wird der Terminus »Verschiebung von L_1 längs L_2« so eingeführt, dass »in jeder Stellung … zwei Berührstellenpaare … vorliegen«. Diese Bedingung ist viel zu schwach: Weder ist für die Erreichbarkeit der Punkte auf einer Linie (durch Punkte der anderen Linie) gesorgt, noch ist in irgendeiner Form die Durchgängigkeit (Stetigkeit) des Vorgangs gewährleistet. Worin eigentlich eine »Bewegung« bestehen soll, bleibt offen und lässt unangemessener Willkür breiten Raum. Nicht weniger unzulänglich werden »Drehungen« beschrieben, die unter der zusätzlichen Bedingung stattfinden, dass »ein Berührstellenpaar der zwei beteiligten Körperoberflächen festgehalten« wird (S. 72). Danach würde es genügen, die Spitze eines Stifts auf einen Gegenpunkt einer Unterlage fest aufzusetzen und den Stift ein wenig hin und her zu bewe-

Fehler. Am Ende scheint der Vf tatsächlich zu glauben, er habe eine »protogeometrische Entsprechung« zum Begriff der Kongruenz eingeführt. Dass er schließlich meint, dies sei »unschwer zu erkennen«, wird den dieser Unschwere des Erkennens nicht teilhaftigen Leser an dieser Stelle kaum noch verblüffen.

gen. An diesen »terminologischen Bestimmungen« hängt die protogeometrische Kennzeichnung von Geraden und Ebenen.[13]

In D4.3 scheint für eine »passende Verschiebung von L_1 längs L_2« verlangt zu werden, dass die beiden Linien zwischen zwei Berührpunktpaaren aufeinander passen, sofern diese Berührpunkte Stellungen der fraglichen Verschiebung sind. Sind aber Bewegungsvorgänge ausgeschlossen, die nur eine einzige Stellung aufweisen? – Ich kann dies nicht erkennen. Im Gegenteil, der Vf scheint den Standpunkt einzunehmen, wonach Bewegungsstellungen nur durch Angabe von Berührpunktpaaren zu identifizieren seien (jedenfalls verstehe ich die diesbezüglichen Anmerkungen im Anschluss an die »Postulate der Bewegung« so). Nicht-Ausschluss von Stillstand (unstetiger ›Bewegung‹ und dgl.) macht natürlich den gewünschten Glattheitsbegriff zunichte, der ohnehin schon darunter leidet, dass die in ihn einfließenden Begriffsbildungen (wie p, »Bewegung«, »Linie«, »Gebiet«) mit zahlreichen Ungereimtheiten belastet sind.

Anmerkungen zu den »Theoremen« von Kapitel 4. — Neben den zahlreichen in Teil I etablierten Definitionen und Postulaten gibt es insgesamt nur wenige Lehrsätze. Die meisten dieser Sätze sind sehr einfache, direkt verifizierbare Folgerungen über Relationen (Äquivalenz, Invarianz, etc.). Die Theoreme S4.4 und S4.5 jedoch erscheinen verglichen damit als gar nicht so trivial.

Umso mehr überrascht es, dass der »Beweis« zu S4.4 lediglich ein anderthalbzeiliger Hinweis ist, dessen Umsetzung auch noch dem Leser überlassen bleibt. In Anbetracht der hierin eingehenden komplexeren Begriffe von Gestaltgleichheit und Glattheit wäre es in meinen Augen angebracht gewesen, wenn der Vf den ihm vorschwebenden Beweisverlauf etwas genauer skizziert und wenigstens die entscheidenden Schlüsse exemplarisch demonstriert hätte. Nach meiner Einschätzung [die ich hier (noch) nicht durch eine logische Analyse erhärten kann] ist ein Beweis für S4.4 überhaupt nicht stringent führbar.

Das Gesagte trifft mehr noch für S4.5 zu, d. h. für die Behauptung, dass zwei Linien genau dann glatt zueinander sind, wenn sie universell zuein-

[13] Deren Verständnis wird nicht gerade erleichtert durch die z. T. schwer durchschaubar formalisierten Ausdrücke in Definitionen wie D4.2 mit Rückgriff auf die gegen manche syntaktische Gepflogenheiten verstoßenden Symbolfassungen von D1.17, 6-7, auf S. 34.

ander passen (im Sinne von D4.3.3). Statt eines Beweises gibt der Vf hierzu nur einen Verweis auf »die Schlussbemerkungen im vorangegangen Kapitel«. Dies muss verwundern, denn am Ende von Kapitel 3 stehen die diesbezüglichen Definitionen D4.1-3 noch gar nicht zur Verfügung; zudem bestehen die hier bemühten »Schlussbemerkungen« lediglich aus ›Prosa‹. Ist demnach S4.5 bereits ohne die späteren »Präzisierungen« von Kapitel 4 einsichtig (und, im Umkehrschluss, diese daher nur unnötiges Beiwerk)? – Wie soll etwa $gt(L_1, L_2)$ aus $up(L_1, L_2)$ gewonnen werden? Die einzige Existenz, die sich $up(L_1, L_2)$ entnehmen lässt, bezieht sich auf Teillinien von L_1, L_2 zu vorgegebenen Berührstellen[14]. Um daraus $gt(L_1, L_2)$ herzuleiten, ist laut D4.3.1-2 ein Bewegungsvorgang (!) mit bestimmten Eigenschaften zu konstruieren. Ich sehe keinerlei Anhaltspunkte, wie dies geschehen könnte, wo doch über die sechste Dinggattung (»Bewegungen«) außer zwei dürftigen Postulaten nichts bekannt ist. Würde jedoch an dieser Stelle ersatzweise (und zu wiederholtem Male) pauschal auf die »technische Praxis« verwiesen (gleichsam mit einem alles kittenden Bewegungsbegriff als Joker), so bliebe von Teil I in der augenblicklichen Fassung nichts als ein Konglomerat beliebiger, unverbindlicher Behauptungen übrig.

Bei den Ausführungen über Ebenheit werden via D4.12 und D4.15 die Bewegungsvarianten (Verschiebungen und Drehungen unter Einbeziehung von Gebieten) benannt, welche die freie Beweglichkeit einer Kopie in Passungslage gegenüber dem Original zum Ausdruck bringen sollen. Die formalen Zusammenhänge bleiben (wie schon beim Geradenbegriff) undurchsichtig. In D4.12.1 geht es um die Verschiebung eines Punktes längs einer Linie. Anders als in D4.1.1 klingt hier erstmals (in einer syntaktisch mit dem Rest der Bedingungen unverbundenen All-Formel) an, dass die Punkte der Linie durch den beweglichen Punkt erreicht werden müssen. Es gibt jedoch kein Postulat, welches das gewährleistet.

Kapitel 4 schließt mit der bemerkenswerten Behauptung der »Gestalteindeutigkeit von Ebene und Gerade« in dem Sinn, dass je zwei Ebenen bzw. Geraden gestaltgleich sind. Dies im Rahmen einer protophysikalischen Interpretation zu begründen (vgl. Janich, Katthage, u. a.), war (und ist) bisher definitiv nicht gelungen. Umso mehr überrascht es, dass der Vf »überhaupt keinen Grund« sieht, »warum diese Argumentation (wie bisher gesche-

[14] Versehentlich werden diese in D4.3.3 über falsche Variablen generalisiert.

hen) auf der Basis der Protogeometrie geführt werden müsste« (S. 86). Hier scheint er freilich einiges übersehen zu haben. In welchem anderen Rahmen wenn nicht dem der Protogeometrie sollte denn das Problem der Gestalteindeutigkeit überhaupt von Interesse sein? In der gewöhnlichen (theoretischen) Geometrie stellt sich die diesbezügliche Frage erst gar nicht in diesem Sinn; eine Gerade liegt bereits durch zwei ihrer Punkte fest und ist zu allen Geraden kongruent. Entsprechendes gilt für Ebenen[15]. Wurden hingegen, wie in der »Figurentheorie« des Vfs, das Prädikat »gerade« (bzw. »eben«) und die Relation der Gestaltgleichheit (ggl) mit großem Sprachnormierungsaufwand explizit definitorisch eingeführt und postulatorisch eingegrenzt, so besteht ausgesprochen schon *deswegen* ein legitimes, wenn nicht zwingendes Interesse an der Frage, ob $Gerade(x)$ & $Gerade(y) \rightarrow ggl(x,y)$ sowie $Ebene(x)$ & $Ebene(y) \rightarrow ggl(x,y)$ nun Theoreme der Figurentheorie sind oder nicht![16] Wenn sie es (in einem präzisen und vernünftigen Sinn) sind, so spräche dies für die Angemessenheit der figurentheoretischen Begrifflichkeit. Wenn sie es (widerlegbar) nicht sind, wäre dies Anlass zu einer Revision.

(Wenn man will, könnte man in der protogeometrischen Gestalteindeutigkeit zudem das Eindeutigkeitsziel technologischer Verknüpfung von Wissenschaft und Realwelt bestätigt sehen – nämlich auf dem Weg über den operativ-technischen Aspekt der zu Grunde liegenden Passungsbeziehungen und Bewegungsoperationen.)

Das Eindeutigkeitsproblem hat im Übrigen nichts mit der Frage zu tun, ob »man der Form der Ebene und dem Beweis ihrer Eindeutigkeit eine methodische Priorität« (S. 86 oben) zuspricht (wie Lorenzen und Janich dies getan haben). Dies ist hier ein unerheblicher Nebenschauplatz.

---

[15] Auf S. 115 (in Kapitel 6) zitiert der Vf mehrere Sätze aus dem bekannten Standardwerk *Foundations of Geometry* von Borsuk/Szmielew, in denen diese Kongruenz in Bezug auf das dort zu Grunde liegende Axiomensystem präzisiert zum Ausdruck kommt (als »perfect homogeneity«). Der Vf sieht darin seine protogeometrischen Begriffsbildungen bestätigt.

[16] Damit figurentheoretische Eindeutigkeitsaussagen (im Sinne des Vfs) überhaupt wahr sein können, denken wir uns die Gestaltgleichheit im Hinterglied der Subjunktion von D4.23 stillschweigend auf ein gemeinsames (in der technischen Praxis stets endliches) Teilpassstück eingeschränkt, z. B. $Ebene(x)$ & $Ebene(y) \rightarrow$ ex.$x', y'(Ebene(x')$ & $Ebene(y')$ & $(x'ix)$ & $(y'iy)$ & $ggl(x', y'))$. Das Bild auf S. 86 unten suggeriert in unzulässiger Weise von vornherein gleichlange (kongruente) Strecken.

Seine eigene (nicht-protogeometrische!) Argumentation (die ein Beweis sein soll?) klassifiziert der Vf als »praktisch-inhaltlich«, ein bisher noch nicht in Anspruch genommener Standpunkt. Die auf S. 86 skizzierte Überlegung läuft dabei im Wesentlichen darauf hinaus, dass Geraden *kraft ihrer Definition* (nun doch der protogeometrischen?) zueinander passen. Wenn dann, indirekt angenommen, a, c nicht passen, tun es auch ihre Kopien b, d nicht. Nun passen aber (kraft Definition) die Geraden a, b sehr wohl aneinander, und ebenso c, d. »Damit ist aber klar, dass unsere Annahme nicht zutreffen kann, also passen auch c bzw. d an a bzw. b« (S. 86). – Diese geradezu naiv simplifizierende Überlegung entbehrt jeder Beweiskraft.

Kapitel 4 als Ganzes (und sein Schlussteil im Besonderen) ist in meinen Augen ein Tiefpunkt der Arbeit sowohl hinsichtlich der gedanklichen Qualität als auch in Anbetracht der erheblichen Diskrepanz zwischen überzogenem Anspruch und tatsächlich Erreichtem.

Summarisches zu den Kapiteln 5 und 6. — Das dort Behandelte ist größtenteils bekannt, einiges aber (aus protogeometrischer Sicht) durchaus zweifelhaft, z. B. auf S. 92 die Herabstufung des Herstellverfahrens auf eine heuristische Stufe in Bezug auf die »umfassende Explikation« (?) von Formeigenschaften. – In Abschnitt 6.1 zeichnet sich eine fragwürdige deskriptiv-positivistische (gleichwohl apodiktische) Einstellung ab, welche die »Phänomene [sic!] beim technischen Handeln« und »die Analyse des elementaren Sprachgebrauchs« zum Ausgangspunkt für »die [N.B.: nicht *eine*] konkrete Interpretation der Grundrelationen« erklärt (S. 95). Dass die »Beschränkungen der Protogeometrie … in der Geometrie … aufgehoben« sind, ist selbstverständlich. Auf mehr als zehn Seiten wird bekanntes älteres Material zitiert, an dem mitnichten der behauptete »Übergang« von der Protogeometrie zur Geometrie plausibel nachzuvollziehen ist.

Kommentar zu den »Historisch-kritischen Studien«

In den vier Kapiteln von Teil II setzt der Vf sich das Ziel, so etwas wie eine »Tradition« protogeometrischer Forschung – vor allem im Hinblick auf (s)eine »Figurentheorie« als Leitbild geometrischer Theoriebildung – aufzuzeigen und den Ort seiner eigenen Bemühungen auf diesem Gebiet unter dem Titel »funktional-operativer Rekonstruktionsansatz« zu bestimmen und abzugrenzen.

Kapitel 1.— Hier geht es um die Geometrie Euklids und einige Passagen aus Werken des Aristoteles (besonders der »Physik-Vorlesung«) unter dem genannten Gesichtspunkt. Bei adäquater historischer Einordnung müssen diese altgriechischen Beiträge, die tatsächlich am Anfang der exakten Wissenschaften (nach heutigem Verständnis) stehen, als denkerische Höchstleistungen gewertet werden. Dass Euklid (und seine Kommentatoren) als Mathematiker und Aristoteles als Philosoph und Naturforscher solch schwierige Dinge wie den Begründungszusammenhang geometrischer Erkenntnisse, die Beschreibung von Bewegungen, die Eigenschaften kontinuierlicher Größen und Körper nicht völlig (und schon gar nicht im heutigen Sinne) aufklären konnten, versteht sich beinahe von selbst. Der Vf neigt dazu, in einigen unbereinigten Feldern dieser Erstversuche eine »revisionsbedürftige vorgeometrische Bemühung« zu sehen. Das mag dem Wunsch geschuldet sein, eine Ahnenlinie auszumachen, die bis zu den historischen Anfängen zurückreicht. Aus den vielerlei vergeblichen Versuchen der Alten, die geometrischen Grundbegriffe zu definieren, lässt sich freilich nichts wirklich Brauchbares mehr reaktivieren. Insgesamt ein wenig ergiebiges Kapitel.

Kapitel 2.— Der Vf referiert einen bisher kaum oder gar nicht rezipierten Beitrag Lobatschefkis zur Bestimmung von Grundformen durch Körperschnitte. Der darin maßgebliche Grundbegriff ist die »Berührung«, die anhand von Skizzen illustriert wird, aber im Übrigen (nämlich in ihrer Allgemeinheit) ungeklärt bleibt. So wie Lobatschefski diesen Begriff einsetzt, steckt er bereits voller Geometrie und eignet sich – jedenfalls in dieser Form – kaum für »protogeometrische« Begründungszwecke (wie der Vf sie versteht). Der Vf beruft sich auf den Werke-Herausgeber Engel, der diesbezüglich um Nachsicht bittet (Fußnote 13 auf S. 146), und vermeidet von vornherein die Frage der »Stichhaltigkeit« des Ansatzes angesichts einzugestehender »Lücken in der Beweisführung« sowie »erheblicher begrifflicher und axiomatischer Defizite« (S. 147).

Etwas zwiespältig erscheint in der »Würdigung« durch den Vf seine überspitzte Kritik an der »grundsätzlich falschen Entscheidung, von Berührverhältnissen … von Körpern auszugehen« (S. 149 unter Nr. 2), der auf S. 150 die Einschätzung gegenübergestellt wird, dass »diese Berührverhältnisse von Körpern … durch das Misslingen eines Rekonstruktionsversuchs nichts von ihrer Realität und Relevanz für die Geometrie« verlieren. Der Vf stellt dabei das »überaus berechtigte Anliegen« heraus, »Bezüge der Geometrie zur technischen Praxis« zu verdeutlichen (S. 151). In dieser Hinsicht hat der spätere Hugo Dingler nach Meinung des Vfs in Lobatschefski bereits einen Vorläufer. Dingler teilt dessen »Anliegen«, das vom Vf sogar »als sein [Dinglers] wichtigster Beitrag« eingestuft wird (S. 183), was m. E. einer Degradierung in der Ahnenfolge der Protogeometrie gleichkommt.

In Bezug auf Lobatschefski verstehe ich nicht ganz, inwiefern abschließend (auf S. 152) dessen »Bemühungen nunmehr als ein bedeutender Beitrag … gewürdigt werden« können, nachdem zuvor einigermaßen klar geworden ist, dass sein Beitrag sich hauptsächlich in einem lediglich für wertvoll befundenen Anliegen erschöpft, das als »protogeometrisch« gewertet wird.

Auch einige praktisch-geometrische Betrachtungen in einem populären Buch W. K. Cliffords (1868) ordnet der Vf »als wichtige Vorstufe der Bemühungen um eine Protogeometrie« ein (S. 156). Fortgesetzt (in den folgenden Kapiteln von Teil II) wird diese Ahnenreihe mit Pasch, Dingler sowie Lorenzen und dessen Schülern. Es ist aber fraglich, ob sich auf diese Weise insgesamt eine geschichtliche Traditionslinie der/einer/seiner PG herausschält (wenn man von der Berufung Lorenzens auf Dingler einmal absieht). Die zitierten Forscher stehen in Sachen PG doch eher isoliert da; von ihren »Vorläufern« übernehmen, ja wissen sie (auf diesem Gebiet) so gut wie nichts, und ihre einschlägigen Beiträge werden von nachfolgenden ›Protogeometern‹ nicht zur Kenntnis genommen.[17]

Kapitel 3. — Es geht hauptsächlich um den Beitrag von Pasch zur Begründung der Geometrie, insbesondere unter dem Blickwinkel einer (ca. 20 Jahre *vor* Hilbert) noch nicht konsequent formal ausgelegten Axiomatik. Die in diesem Zusammenhang vom Vf betonte Zielsetzung und Methodik einer PG verlangt eine Erörterung.

[17] Hier bilden – allerdings erst am Ende dieser Kette – der Vf selbst und die Autoren von OGG eine Ausnahme.

Zunächst zu Pasch, der die Geometrie für eine empirische Theorie hielt. Die Fundierung in naturwissenschaftlichen Beobachtungen bezieht sich nach Pasch auf einfache Kernsätze (Axiome), aus denen dann (unempirisch, nämlich mit logischen Mitteln) die Lehrsätze abgeleitet werden. Konsequenterweise musste Pasch die »Vorstellung von der ‘Unendlichkeit’ der geraden Linie« ablehnen (S. 159), da dieser Geradenbegriff in den Axiomen auftaucht, sich aber jeder Beobachtung entzieht. Nun fragt man sich: Wie bzw. wo dürfen denn drei Punkte gewählt werden, die eine Ebene eindeutig festlegen? Auf welche Weise soll etwa prüfend (messend) beobachtet werden können, ob z. B. durch die Mittelpunkte von Erde, Mond und Sonne eine (und zudem noch eindeutig bestimmte) Ebene geht? (vgl. Axiom I auf S. 161). Was an Paschs Empirismus »wunderbar« sein soll (so der Vf begeistert auf S. 159), kann ich nicht nachvollziehen. Die von der ›Protophysik‹ seit Dingler (einschließlich vom Vf) immer wieder beschworene pragmatisch-methodische Ordnung wird offensichtlich verletzt (was Pasch nicht weiter gestört hat, weil es ihm primär um logische Feinanalyse und Lückenlosigkeit in der Beweisführung ging). Aber auch dann, wenn man von der fragwürdigen empiristischen Stoßrichtung[18] absieht, haben die (in einer formal aufbereiteten Fassung nach G. Pickert) zitierten Axiomatik-Fragmente im Grunde keinen »protogeometrischen« Charakter. Die erste Gruppe (I-IX auf S. 169 f) fixiert lediglich die Syntax der Ordnungsrelation »auf der geraden Linie« – *unter stillschweigendem Einschluss der Vorstellung von Geradheit*! Für die »Axiomatik der Ebene«[19] gilt Entsprechendes.

Spätestens beim Vergleich von Pasch mit Hilbert und der Bewertung unterschiedlicher Axiomatisierungen der (euklidischen) Geometrie unter »protogeometrischen« Gesichtspunkten stellt sich noch einmal in schärferer Form die Frage, was unter PG bzw. einer »protogeometrischen Interpre-

[18] Paschs Vorhaben ging weit über die Geometrie hinaus und zielte darauf ab, die gesamte Mathematik (einschließlich Mengenlehre) lückenlos auf empirische Kernsätze zu gründen. Er hat in diesem Zusammenhang wertvolle deduktive Analysen und innermathematische Konzepte beigesteuert. Als Fazit seiner Methodologie bleiben jedoch Begriffe übrig (z. B. der Begriff ›Ich‹), »deren Gebrauch nicht durch Kernsätze geregelt ist, während ihre philosophische Analyse zu nicht geringeren Schwierigkeiten führt, als in den besser untersuchten Begriffen liegen« (so A. Heytings abgewogene Stellungnahme in *Mathematische Grundlagenforschung, Intuitionismus, Beweistheorie*, Berlin: Verlag von Julius Springer, 1934).

[19] Beiläufig hat sich auf S. 161 in der Definition der Punktmenge ABC ein Fehler eingeschlichen (fehlende Partikularisierung bzgl. der noch freien Variablen f in der Mengenklammer).

tation« (S. 164 oben) verstanden werden soll.

Im historisch rückblickenden Teil der Betrachtungen erschien als kleinster gemeinsamer Nenner der angeführten Einzelbemühungen das »Anliegen«, geometrische Grundbegriffe vor dem Hintergrund der/einer (welcher?) technischen Praxis inhaltlich (operativ) zu verstehen bzw. nachzuvollziehen. Wäre dies einziges gemeinsames Merkmal »protogeometrischer« Ansätze, so müsste zumindest das Präfix ›proto‹ (von gr. $\pi\rho\tilde{\omega}\tau o\varsigma$ = Erster) als terminologisch unrichtig gelten, denn man kann sehr wohl das Verständnis geometrischer Begriffe an technisch-funktionale Herstellungs- und Verwendungskontexte binden, ohne damit den Anspruch eines Theorieaufbaus aus ersten Anfangsgründen zu verknüpfen[20]. Tatsächlich gewinnt man den Eindruck, dass der Vf in seiner »Erörterung des Verhältnisses der Protogeometrie zu den mathematischen Grundlagen der Geometrie« (S. 158) von einem weitergehenden eigentümlichen Abgrenzungskriterium Gebrauch macht. Demzufolge scheint der Grad, in dem eine Axiomatisierung als protogeometrisch zu bewerten ist, reziprok daran gemessen zu werden, inwieweit in den betreffenden Axiomen »*die Beziehungen zwischen geometrischen Formen* (Ebene, Gerade) untereinander« zum Ausdruck kommen (vgl. S. 158 oben).

So findet sich in Hilberts System der Geometrie in hohem Maße eine enge wechselseitige logische Verknüpfung der Begriffe, z. B. bei der ineinander verwobenen Inzidenz von Punkten, Geraden und Ebenen (deren Gegenstandsbezug dabei außer Betracht bleibt bzw. bleiben kann). Damit scheint der diametrale Gegenpunkt zur PG eingenommen[21]. Demgegenüber behandelt Pasch die Verhältnisse vergleichsweise mehr separiert zunächst für die gerade (endliche) Linie, weswegen wir »diese Ausführungen Paschs … der Protogeometrie zuordnen« können sollen (S. 164 oben). Andererseits erscheint dem Vf für Paschs Ebenen-Axiomatik »eine protogeometrische Interpretation … natürlich nicht mehr möglich«, weil der Begriff der Ebe-

[20] so geschehen in Bender/Schreiber: OGG

[21] Für den Vf drückt sich damit eine »Haltung« aus, die er unterschwellig als pathologisch disqualifiziert [angedeutet mit der Wortwahl »symptomatisch« für die Kurzcharakterisierung der Hilbertschen Axiomatik durch Freudenthal und Baur (1967)]. Für die ›gesunde‹ Seite stehen dann Lobatschefski (mit seinem »Anliegen … einer spezifischen [sic!] Bestimmung geometrischer Grundbegriffe«) sowie F. Klein (mit seiner im Anhang seines Erlanger Programms formulierten »Bemühung um eine ‘eigentliche’ Geometrie«.

ne »in den entsprechenden Kernsätzen mit der Geraden verknüpft wird« (S. 164).

Folgt man diesen Akzentuierungen des Vfs, so ist es das Ziel der/einer/seiner PG, die zu interpretierenden (oder zu rekonstruierenden) Begriffe nach Möglichkeit zunächst *in ihrem von anderen Begriffen losgelösten Eigenleben* aufzusuchen. In diesem Vorfeld werden dann alltagssprachliche oder praktisch-technische Beobachtungen gemacht, terminologische Bestimmungen vorgenommen und (mehr oder weniger einfache) Gebrauchsregeln – mit dem Etikett »Rekonstruktion« versehen – postuliert. Eine pragmatische Ordnung (ein »methodischer« Übergang) entsteht, zumindest nach den von mir hier vermuteten Vorstellungen des Vfs, durch die in steter Tuchfühlung mit »elementarer technischer Praxis« sich schrittweise aufschichtende und ineinander verzahnende Begriffsfolge. In der Tat ist der Vf im systematischen Teil I nach eben diesem Muster vorgegangen.

Dazu im Einzelnen:

Die Inzidenzverhältnisse werden als erste und getrennt von anderen Grundrelationen und Grundobjekten beschrieben. Die Axiome der Anordnung stehen ebenfalls isoliert da (und bleiben sogar getrennt vom Übrigen). Sodann folgen Berühr- und Passungsbeziehungen, und zwar zunächst unter der (trivialisierenden) Annahme *aktualer*, d. h. bereits hergestellter Berühr- und Passlagen der beteiligten Körper. Erst später kommen (aus bereits früher diskutierten Gründen) Bewegungsvorgänge als neue Objektkategorie hinzu, ohne dass eine ihrer Komplexität (u. a. aufgrund ihrer ›Wechselwirkung‹ mit den übrigen Begriffen) auch nur annähernd angemessene Beschreibungsgrundlage mitgeliefert wird. Für den Vf scheint die sich in dieser Weise herausschälende »Figurentheorie« so etwas wie ein spezifisch geometrisches Substrat zu besitzen, das sie zum Ausgangspunkt »eigentlicher«(!) Geometrie macht.

Von diesem besonders in Kapitel 4 mehrfach anklingenden Jargon der Eigentlichkeit ist es nicht mehr weit bis zu Dinglers ›Ergreifung des Wirklichen‹ und einem Rückfall in einen letztlich naiven fundamentalistischen Essentialismus.

Dazu passt die von Dingler als »paradox« (!) empfundene Einschätzung, »dass die theoretische Geometrie in ihrer axiomatischen Fassung keine eindeutige Bestimmung der Gestalt ihrer Grundgegenstände (Ebenen, Geraden) bietet«. Aber welche Theorie könnte das? – Die einzige hieraus für Dingler bzw. einen Protogeometer zu ziehende Konsequenz wäre der Aufbau einer nicht-axiomatischen Geometrie, und zwar nicht-axiomatisch im Sinn eines *prinzipiell nicht axiomatisierbaren Systems.*[22] In einer solchen streng nicht-axiomatischen Theorie müsste es Begriffe geben, die mit anderen einschlägigen Begriffen einen so geringen logischen Zusammenhang aufweisen und auch in ihrer inhaltlichen Wesensdefinition[23] so vage gehalten sind, dass Lehrsätze (zumindest im Allgemeinen) nicht bewiesen werden können – jedenfalls nicht in einem in der Mathematik üblicherweise geteilten Sinn.

Für mich stellt sich die Frage, ob dem Vf so etwas für seine PG vorgeschwebt hat. Zwei Indizien sprechen für eine Bejahung der Frage: a) das logisch-sprachliche Erscheinungsbild seines Begriffs- und Postulatensystems in Teil I, und b) seine Erklärung, dass die systematischen Teile seiner PG keiner Formalisierung bedürfen (vgl. S. 98 oben). *Gegen* eine Bejahung der Frage spricht, dass der Vf mit seiner »formalen Fassung« augenscheinlich doch den Nachweis exakter (und damit axiomatikfähiger) Darstellung hat führen wollen. Lokale, in sich abgeschlossene axiomatische Analysen (etwa zu den Themen Berühren und Passen, zum Ebenenschleifverfahren, zur Formgleichheit oder dgl.) könnten durchaus sinnvoll und aufschlussreich sein, auch wenn sie nicht in axiomatische Systeme der Geometrie hinein verlängert werden können. Auf diesem Gebiet ist bislang allerdings kaum Nenneswertes gelungen, leider auch dem Vf nicht.

Ein bezeichnendes Detail für die oben monierte essentialistische Sichtweise ist die merkwürdige Behandlung der Beziehung von Ebene und Gerade, die der Vf (getreu der oben skizzierten Leitidee von PG) *methodisch trennen* möchte. Pasch mit seiner axiomatischen Analyse endlicher Geradenstücke plus Punktanordnung wird hier als Kronzeuge gegen Dingler in Stellung gebracht, der – vor dem Hintergrund der technischen Urerzeugung der Ebenenform im Dreiplatten-Schleifverfahren – Ebenen den Vor-

[22] Dies ist der Tatsache geschuldet, dass eine axiomatische Theorie die von ihr beschriebene Struktur höchstens bis auf Isomorphie eindeutig festlegt. Die euklidische Geometrie ist – in geeigneter Axiomatisierung – eine solche *kategorische* Theorie.

[23] Diese kann bzw. muss es ja zum Ausgleich für den mangelnden logischen Zusammenhang und auch aus philosophisch-erkenntnistheoretischen Gründen geben.

rang gab und Geraden als ihre Schnitte abgeleitet dachte. Der Vf scheint zu glauben, womöglich in Anlehnung an Pasch, man könne (oder müsse) Geradheit auch ohne Ebenheit verstehen, nämlich als eine *dingverhaftete Qualität von Figuren.* Darüberhinaus erscheint ihm Dinglers Definition »in methodischer Hinsicht entscheidend angreifbar, da sie geometrisches Wissen vorauszusetzen scheint«.[24]

In diesem vielsagenden Satz offenbart sich das ganze Missverhältnis einer derartigen »Protogeometrie« zu der Entwicklung mathematischer Erkenntnis und den damit verbundenen Begründungsproblemen. Begriffe und Beziehungen sollen – aus protogeometrischer Sicht – in einem gleichsam voraussetzungslosen Vorstadium inhaltlich bestimmt werden, in welchem sie kaum Inhalt aufnehmen können[25]; es fehlt der Zusammenhang mit anderen Begriffen. Kommen diese in späteren Schritten hinzu (mit neuen Postulaten oder Axiomen als Gebrauchsregeln), so verändert dies natürlich – allerdings natürlich nicht für einen Essentialisten – den Sinn sämtlicher Begriffe im Gefüge und damit das System als ganzes. Eine Prototheorie (im oben verstandenen Sinn) müsste folgerichtig bei jedem solchen Erweiterungsschritt ihre früheren »Rekonstruktionen« revidieren und wieder bei Null anfangen. Dies explizit durchzuführen wäre ein »methodischer Übergang« zur Theorie, der seinen Namen verdient. Stattdessen verharren protogeometrisch eingeführte Begriffe wie Punkt, Gebiet, Inzidenz und Bewegung in dem primitiven Stadium ihrer anfänglichen terminologischen Bestimmung. Wenn es dann am Ende zur Aufstellung nichttrivialer Lehrsätze kommt (wie S4.4 und S4.5 in Kapitel 4 von Teil I), können diese *de facto* nicht bewiesen werden[26], weil ja das gesamte Begriffsgefüge nicht systematisch mit- und weiterentwickelt wurde (wie es in einer realen Theoriebildung üb-

[24] Diese kritische Einlassung des Vfs ist erstaunlich, wenn man sich daran erinnert, dass Cliffords Kennzeichnung der Ebene, die den Engländer in Kapitel 2 noch zu einem der Urahnen der Protogeometrie adelte, doch im wesentlichen mit der Dinglerschen Definition übereinstimmt.

[25] Die hier skizzierte PG genehmigt sich aber unbeschadet dessen eine großzügige Einbeziehung teilweise recht entwickelter theoretischer Begriffe der Geometrie (z. B. Gebiet, geschlossene Linie, Bewegung), deren »Rekonstruktion« bei genauer Betrachtung zudem überhaupt keine ist.

[26] Dass dann auch noch das Fehlen eines Beweises mit elliptischen Wie-man-leicht-sieht-Floskeln kaschiert wird, ist ein Ärgernis erster Güte, um das sich schon die Erlanger Schule der ›Protophysik‹ in hohem Maße verdient gemacht hat.

licherweise geschieht). In Wahrheit erzeugt eine so verstandene Prototheorie keine Verbindung, sondern ganz im Gegenteil einen *unüberwindlichen Bruch* zwischen den vor- und außerwissenschaftlichen Kontexten einerseits und der zum System gereiften Theorie andererseits. Das »Anliegen« einer »Protogeometrie« hebt sich, so gesehen, selbst auf.

Teil II.
Wahrscheinlichkeit und Mittelwerte

Spiele und ihre Theorie[1]

Spiele sind vermutlich so alt wie die Menschheit. Doch erst seit drei Jahrhunderten gibt es Ansätze, ihre Vielfalt und ihr Wesen systematisch zu ergründen. Wie so oft in der Wissenschaft, mussten die dazu erforderlichen Begriffe und Methoden zuerst einmal geschaffen werden. Als Blaise Pascal, angeregt durch Fragen des von Spielleidenschaft besessenen Chevalier de Méré, über die mathematischen Grundlagen der Glücksspiele nachzudenken begann, schlug die Geburtsstunde einer neuen Disziplin: der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Heute ist sie eines der tiefsten und reichhaltigsten Gebiete der Mathematik und umfasst weit mehr als nur Verfahren zur Behandlung von Glücksspielen. Doch nicht alle Spiele sind Glücksspiele. Es gibt Gesellschaftsspiele, Wettspiele, Geduldspiele und zahlreiche andere Varianten. Ihrer Beschreibung und Erforschung haben sich verschiedene Zweige der Anthropologie und Kulturgeschichte gewidmet: Johan Huizingas berühmter Essay *Homo ludens* und das Werk von Roger Caillois über *Die Spiele und die Menschen* sind Marksteine in dieser Richtung.

Strategiespiele. — Den entscheidenden Beitrag zu einer mehr formalen Analyse des Spielbegriffs lieferte eine Arbeit aus dem Jahre 1928, in welcher der überragende, aus Ungarn stammende Mathematiker John von Neumann (1903 bis 1957) den Grundstein zur heute so genannten Spieltheorie legte. Fünfzehn Jahre später hat er, gemeinsam mit O. Morgenstern, seine Gedanken in dem großen Werk *Spieltheorie und wirtschaftliches Verhalten* zusammengefasst. Das Neue an von Neumanns Analyse des Spielbegriffs kündigt sich schon im Titel an: Der Hauptcharakter eines Spiels wird nun nicht mehr in irgendeiner, jeweils typischen Lebensform des Spielenden gesucht, sondern allein darin gesehen, dass ein Konflikt von Interessen, etwa ökonomischer Natur, das Handeln und die Entscheidungen der Beteiligten bestimmt. Die spieltheoretischen Untersuchungen haben insbesondere »ihren Ursprung in den Versuchen, eine exakte Beschreibung für das Bestreben des Individuums zu finden, einen maximalen Nutzen oder, im Falle eines Unternehmers, ein Maximum an Gewinn zu erzielen«. Natürlich sind die in der Praxis tatsächlich auftretenden Konfliktsituationen viel zu un-

[1] In: *VDI-Nachrichten* Nr. 23, 7. Juni 1972, S. 25.

übersichtlich, als dass ihre lückenlose Formalisierung und damit ihre mathematische Behandlung ohne weiteres möglich wäre. Man verschafft sich deshalb ein *vereinfachtes Modell der Situation*, indem man von niederrangigen Einflussgrößen absieht. Solche Modelle sind Gegenstand der Spieltheorie. Dabei fallen nicht nur ökonomische Konfliktsituationen in diesen Rahmen, sondern auch viele Situationen aus dem sozialen und militärischen Bereich, und nicht zuletzt, als einfachste Modelle, die wohlbekannten Würfel-, Karten- und Brettspiele. Naturgemäß empfängt die Theorie aus der Fülle solcher Anwendungsmöglichkeiten unzählige Anregungen. In rascher Fortentwicklung begriffen, verfügt sie heute über ein ebenso ausgearbeitetes Instrumentarium wie die Statistik und die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Im Folgenden sollen nun anhand möglichst einfacher Beispiele einige wichtige Begriffe, Methoden und Ergebnisse der mathematischen Spieltheorie illustriert werden.

Im Mittelpunkt der Spieltheorie steht der *Begriff der Strategie*. Er sei zunächst am Schachspiel erläutert. Durch einen Zug von Weiß entsteht eine bestimmte Situation für Schwarz. Der Zug, für den Schwarz sich aufgrund der vorliegenden Situation entscheidet, stellt eine neue Situation her, in der Weiß sich entscheiden muss – und so fort. Nun ist es – wenigstens theoretisch – denkbar, dass ein Spieler vor Beginn der Partie einen vollständigen Verhaltensplan aufstellt, der für jede mögliche Situation festlegt, für welchen Zug sich der Spieler in einer bestimmten Situation entscheidet. Ein solcher Plan ist eine Strategie im Sinne der Spieltheorie. Das Schachspiel ist ein sogenanntes endliches Spiel, was heißt: jeder Spieler verfügt nur über endlich viele Strategien. Sind $s_1, s_2, \ldots, s_n$ die sämtlichen Strategien des Spielers A, dagegen $t_1, t_2, \ldots, t_m$ alle Strategien des Gegenspielers B, so gehört zu jeder von A gewählten Strategie s_i und zu jeder von B gewählten Strategie t_j ein wohlbestimmter *Ausgang* der Partie. Man bezeichnet ihn zweckmäßigerweise mit $g(i, j)$ und interpretiert ihn etwa als die Endsituation oder als den ›Gewinn‹ des Spielers A. So lässt sich beim Schach $g(i, j) = 1, -1, 0$ folgendermaßen deuten: A hat mit der Strategie s_i die Partie gegen den die Strategie t_j wählenden Gegenspieler B gewonnen, verloren, remis gespielt. Bei Wahl aller $n \cdot m$ möglichen Strategienpaarungen gelangt man so zu einem rechteckigen Schema der Zahlen $g(i, j)$, der sogenannten *Matrix des Spiels*. Offenbar besitzt jedes endliche Zweipersonenspiel eine solche Matrix-Normalform. Das Beispiel des bekannten Knobelspiels ›Stein-Papier-Schere‹ soll einmal zeigen, in welch einfacher Weise eine Matrix ein Spiel zu überblicken gestattet. Zwei Spieler A, B wählen unabhängig voneinander eines der Symbole ›Stein‹ (St), ›Papier‹ (P), ›Schere‹ (Sch). Nach jedem Durchgang (Spielrunde) vergleichen sie ihre Wahlen: Zeigen beide dasselbe, so ist die Partie unentschieden; St siegt über Sch, P siegt über St, Sch siegt über P. Aus Sicht des Spielers A sieht daher die Spielmatrix folgendermaßen aus:

$A\backslash B$	Sch	St	P
Sch	0	-1	1
St	1	0	-1
P	-1	1	0

Das triviale Knobelspiel hat mit dem Schachspiel gemeinsam, dass nach jeder Partie die Summe der Gewinne von A und B Null ist. Spiele dieser Art heißen *Nullsummenspiele*. Es besteht aber auch ein wichtiger Unterschied zwischen beiden Spielen: Beim Knobeln bleibt jedem Spieler die Entscheidung des anderen verborgen. Man spricht daher von einem Spiel mit unvollständiger Information. Dagegen ist Schach ein Spiel mit vollständiger Information, denn Weiß kennt ja jeden von Schwarz getätigten Zug, und umgekehrt. Wie wichtig dieser Unterschied ist, kommt in einem *Bestimmtheitssatz* zum Ausdruck, der auf Untersuchungen von Ernst Zermelo (1912) und John von Neumann (1928) zurückgeht. Er besagt: Die Matrix eines endlichen Zwei-Personen-Nullsummenspiels mit vollständiger Information besitzt mindestens einen Sattelpunkt, das heißt: es existieren optimale Strategien für beide Spieler sowie einen sämtlichen Paarungen optimaler Strategien zugeordneten festen Wert $g(i_0, j_0)$. Demzufolge wissen wir also, dass nach Auslosung der Spielfarbe eine Schachpartie im Prinzip entschieden ist. Nur kennen wir nicht den fraglichen (theoretisch bestimmten) Wert des Sattelpunktes, weil die Matrix des Schachspiels explizit nicht bekannt ist und unvorstellbare Ausmaße besitzt.

Dagegen ist für Spiele mit unvollständiger Information der Bestimmtheitssatz ungültig, im wesentlichen aufgrund der Tatsache, dass die Spieler ihre Strategien nicht mehr hinreichend gut der jeweiligen Strategie des Gegners anpassen können. Deshalb betrachtet man solche Spiele über den Verlauf mehrerer Partien hinweg und ändert von Mal zu Mal die Strategie. Das führt zu dem wichtigen (statistischen) Begriff der *gemischten Strategie.* Würde etwa beim Knobeln der Spieler B ziemlich oft (P) vorzeigen, so würde A natürlich immer häufiger (Sch) wählen. Doch besteht eine für jeden der beiden Spieler optimale gemischte Strategie darin, die Wahl ihres Symbols dem Zufall zu überlassen. Der auf von Neumann zurückgehende *Hauptsatz der Spieltheorie* besagt nämlich überraschenderweise, dass überhaupt jedes endliche Zwei-Personen-Nullsummenspiel eine globale Lösung besitzt, d. h. mindestens ein Paar gemischter Strategien, dem ein fester maximaler Erwartungswert des durchschnittlichen Gewinns zugeordnet ist. Mit diesem keineswegs auf der Hand liegenden Satz kommt die Theorie des rationalen Verhaltens in endlichen Zwei-Personen-Nullsummenspielen zu einem gewissen Abschluss. Erfreulicherweise hat man auch höchst praktikable Methoden zur effektiven Berechnung von Lösungen entwickelt, wie zum Beispiel das bekannte Simplexverfahren aus der linearen Planungsrechnung.

Die Frage liegt nahe, ob überhaupt *jedes* Zwei-Personen-Nullsummenspiel eine Lösung besitzt. Dass dies nicht der Fall ist, zeigt folgendes Beispiel: Zwei Spieler nennen jeder eine beliebige ganze Zahl. Wer die größere Zahl nennt, erhält vom anderen einen Dollar; sind beide Zahlen gleich, so gilt das Spiel als unentschieden. Im Unterschied zu den bisher betrachteten Spielen verfügt hier jeder Spieler über unendlich viele Strategien, die sich weder individuell noch im Mittel aneinander anpassen lassen. Dennoch gibt es unendliche Spiele, für die eine Lösung gefunden werden kann. Besonders interessant ist das dem ökonomischen Bereich entnommene Wartespiel von Shiffman (1949): In einer Versteigerungshalle zeigt eine Preisuhr den Höchstpreis einer Warenpartie an, um nach einer bestimmten Zeit auf einen Mindestpreis zurückzulaufen. Zwei in einem antagonistischen Interessenkonflikt stehende Bieter können durch Knopfdruck in abgetrennten Kabinen die Ware zu dem gerade angezeigten Preis erwerben. Natürlich möchte jeder ›Spieler‹ möglichst lange zögern, um einen niedrigen Preis zu erzielen, andererseits aber auch seinem Konkurrenten zuvorkommen. Tatsächlich lässt sich dieses Spiel in ein geeignetes mathematisches Modell umformulieren und auf diese Weise sogar lösen.

Außer den bisher angeführten Zweipersonenspielen sind beliebige Mehrpersonenspiele von überragender Wichtigkeit. Sie sind aber bei weitem nicht so sorgfältig erforscht wie jene. Besonders interessant ist die bei ihnen vorkommende Bildung von Koalitionen, ein im wirtschaftlichen Geschehen häufig zu beobachtendes Phänomen. Für die Spieltheorie liegt hierin ein Reiz, aber auch eine Schwierigkeit. Bahnbrechend waren auf diesem Gebiet die Untersuchungen von John Nash, der dafür den Nobelpreis erhielt (genauer gesagt: den Preis für Ökonomie, um den die Bank von Schweden nachträglich die eigentlichen Nobelpreise ergänzt hat).

Glücksspiele. — Spiele, die allein vom Zufall abhängen, sind im allgemeinen keine typischen Fälle strategischer Spiele; sie sind dem mathematischen Laien aber in gewissem Sinn vertrauter, weshalb hier im Folgenden eine häufig auftretende Spielart von einem elementaren Standpunkt einmal näher betrachtet werden soll. Meine eigene Analyse (1968) geht auf eine Anregung von B. Gündel zurück. An dem fraglichen Spiel sind zwei Personen beteiligt, die, wegen der Asymmetrie des Spiels, jeweils ›Bank‹ und ›Spieler‹ heißen mögen. Grundlage des Spiels bildet ein Experiment mit n zufälligen Ausgängen $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Wird das Experiment durchgeführt, so tritt stets genau eines der $A_1, A_2, \ldots, A_n$ auf. Die Bank steht nun vor der Aufgabe, den Ausgängen des Experimentes jeweils gewisse Quoten $q_1, q_2, \ldots, q_n$ zuzuordnen. Mit diesen Quoten hat es folgende Bewandtnis: Setzt der Spieler auf einen Ausgang A_i den Geldbetrag E, so verpflichtet sich die Bank zur Auszahlung des Betrags $q_i \cdot E$ an den Spieler, wenn das Experiment den Ausgang A_i genommen hat. Andernfalls kassiert die Bank den Einsatz E. Nun gibt es für die Bank eine einfache Erfolgsstrategie, wenn ihr bekannt ist, mit welchen Wahrscheinlichkeiten die jeweiligen Ausgänge des Experiments auftreten. Sehr häufig ist das der Fall. Der Spieler kann dann zwar noch positive Gewinne erzielen, auf die Dauer jedoch wird die Bank im Vorteil sein. Es kann aber auch vorkommen, dass die Bank über die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Experiments nicht präzis im Bilde ist. So wissen beispielsweise bei einem Pferderennen weder Veranstalter noch Spieler, mit welcher Wahrscheinlichkeit jeweils ein bestimmtes Pferd gewinnen wird. Die gewöhnliche Schätzmethode ist jedenfalls fast so unsicher wie die Annahme einer Gleichverteilung.

Diese eventuelle Unsicherheit der Bank kann der Spieler systematisch für sich ausnutzen, wenn der Bank beim Festsetzen der Quoten ein Irrtum unterläuft. Der Spieler kann nämlich eine allgemeingültige Erfolgsstrategie anwenden, wenn es aufgrund der Quotenverteilung möglich sein sollte, gleichzeitig auf *alle* Ausgänge $A_1, A_2, \ldots, A_n$ bestimmte Beträge zu setzen, die netto, d. h. auch nach Abzug sämtlicher Verluste, noch einen positiven Gewinn erbringen, unabhängig vom tatsächlichen Ausgang des Experiments. Die Anwendung dieser allgemeinen Strategie erfolgt in zwei Schritten:

(1) Zunächst muss entschieden werden, ob die vorgegebene Quotenverteilung überhaupt eine derartige Einsatzverteilung zulässt.
(2) Ist dies der Fall, so muss eine geeignete Einsatzverteilung effektiv berechnet werden.

Für die Bank genügt die Entscheidung (1), um ›schlechte‹ Quotenverteilungen zu verhindern. Doch zeigt ein Lehrsatz über die Quotenspiele, dass (1) und (2) sich mit einem Schlage erledigen lassen: Dazu bilde man die Summe s der Kehrwerte aller vorkommenden Quoten und betrachte den Wert $w = 1 - s$. Ist w positiv, so braucht der Spieler auf Ausgang A_i lediglich den Geldbetrag $G/(q_j \cdot w)$ $(1 \leq i \leq n)$ zu setzen, wenn er unabhängig vom Ergebnis des Experiments den (positiven) Betrag G gewinnen will. Ist dagegen w nicht positiv, d. h. w ist negativ oder gleich Null, so gibt es für den Spieler keine derartige Erfolgsstrategie. Ein Beispiel: Für ein Spiel mit den drei Quoten $q_1 = 2$, $q_2 = 3{,}5$ und $q_3 = 5$ beträgt $w = 1/70$; infolgedessen sollte der Spieler die Beträge 35 auf A_1, 20 auf A_2 und 14 auf A_3 setzen. Diese Einsatzverteilung garantiert in jedem Fall einen Reingewinn vom Betrage 1. Eine aufmerksamere Bank jedoch könnte den Irrtum (aus ihrer Sicht) dadurch beheben, dass sie dem dritten Ausgang die Quote 4 anstelle der 5 zuordnet. Dann würde nämlich $w = -1/28$. So weit das Beispiel. Wendet man den Satz auf das Roulettspiel an, so erhält man $w = -1/36$ und damit ganz einfach die bekannte Tatsache, dass eine vollständige Belegung aller Chancen durch den Spieler niemals zu einem Gewinn führen kann.

Außermathematische Aspekte. — Abschließend noch eine Bemerkung über moralische und politische Gesichtspunkte, welche die Spieltheorie im allgemeinen betreffen. Zunächst könnte manch einer den Eindruck gewinnen, die Spieltheorie beschreibe das menschliche Verhalten nur unzureichend, wenn sie davon ausgeht, die einzige Triebfeder individueller Handlungen sei die Nutzenmaximierung. Doch ist, wie schon Gesellschaftsspiele zeigen, der spieltheoretische Begriff des Nutzens nicht notwendig an Geld oder Geldeswert gebunden. Für die Spieltheorie ist er überhaupt nicht inhaltlich, sondern nur formal festgelegt. Es spricht nichts dagegen, eine Auszahlungsfunktion g irgendwelche (numerisch fixierte) Werte moralischer Güter annehmen zu lassen. Damit hängt zusammen, dass die Spieltheorie das menschliche Verhalten gar nicht beschreiben will: Vielmehr geht es ihr um die Analyse von Konfliktsituationen, in denen bereits als bekannt vorausgesetzt wird, nach welchen Maximen die Beteiligten handeln. Ganz ähnlich kann dem eventuellen Einwand begegnet werden, die Spieltheorie fördere *per se* den Missbrauch ökonomischer und militärischer Macht. Ob die Spieltheorie missbraucht wird oder nicht, hängt im Wesentlichen davon ab, wie der jeweilige spieltheoretische Nutzen inhaltlich definiert wird. Ebenso wäre es denkbar, die Spieltheorie für Zwecke der Friedensforschung einzusetzen oder für strategische Projekte zu verwenden, die darauf abzielen, die Bewohnbarkeit unserer Städte, die Sauberkeit unserer Umwelt oder die Lebensmittelversorgung der Weltbevölkerung zu maximieren. Mit der Spieltheorie verhält es sich daher wie mit anderen technischen Errungenschaften: Die Entscheidung über ihren praktischen und moralischen Wert liegt allein in der Hand des Menschen.

Spiele mit Quoten als Unterrichtsgegenstand[1]

Spiele mit Auszahlungsquoten. — Spiele mit Quoten sind Glücksspiele, deren allgemeine Form sich folgendermaßen beschreiben lässt: Ein Teilnehmer kann Geldbeträge auf irgendwelche der Ausfälle $\omega_1, \dots, \omega_n$ eines Zufallsversuchs Ω setzen. Macht er auf ω_k den Einsatz e_k, so zahlt ihm der Veranstalter (die ›Bank‹) einen Gewinnbetrag b_k aus, wenn das Experiment den Ausgang ω_k nimmt, andernfalls geht der Einsatz verloren. Der Quotient

[1] Vortrag auf der 9. Bundestagung für Didaktik der Mathematik. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht* 1975, Schroedel: Hannover 1975, S. 169-173.

$q_k = {}^{b_k}/_{e_k}$ heißt Auszahlungsfaktor oder Quote für ω_k. Dieses allgemeine Schema könnten bereits Schüler der Sekundarstufe I anhand einer Auswahl geeigneter Beispiele erarbeiten, etwa: (l) Wetten, Buchmacherwetten, (2) Rot und Schwarz (vereinfachtes Roulett mit zwei Sektoren), (3) Lustige Sieben, Cubus (und diverse Würfelspiele), (4) Roulett, Roulca, (5) Zahlenlotto und (6) Pferderennen.

Für einen Vergleich derartiger Spiele im Unterricht empfiehlt sich natürlich ein genaues Kennenlernen der Spielregeln, in einfachen Fällen zweckmäßigerweise auch durch praktisches Ausführen. Dabei sollten auch gewisse Unterschiede bemerkt werden: Bei einigen Spielen, wie (l) und (4), steht das Quotenfeld $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ als Bestandteil der Spielregeln vorab fest. In anderen Spielen, wie (5) und (6), können oder müssen die Auszahlungsfaktoren erst nach Eingang aller Einsätze bestimmt werden (Prinzip des Totalisators). Sind bereits die Anfangsgründe der Wahrscheinlichkeitsrechnung behandelt, so bietet sich noch eine weitere Klassifikation nach dem Gesichtspunkt an, ob ein Wahrscheinlichkeitsfeld $P = (p_1, \ldots, p_n)$ auf Ω bekannt ist oder nicht. Bei Roulett oder den genannten Würfelspielen gehört die Ermittlung der klassischen Anfangswahrscheinlichkeiten ohnehin zum Aufgabenrepertoire.

Wichtig schon in diesem Stadium des Kennenlernens ist vor allem der Begriff des Reingewinns. Zu vorgegebener Einsatzverteilung $(e_1, \ldots, e_n)$ berechnet sich der Reingewinn für ω_i als $g(\omega_i) = q_i e_i - S$ $(i = 1, \ldots, n)$, wobei $S = e_1 + \cdots + e_n$. Dieser Begriff kann wohl am leichtesten gelernt werden, indem die Schüler an Beispielen zu selbstgewählten Einsatzverteilungen ihre möglichen Reingewinne für alle Versuchsausgänge im Voraus ermitteln. Ein einfaches Beispiel wären Wetten über einen Versuch mit zwei Ausgängen ω_1, ω_2 (etwa einen Boxkampf). Buchmacher I nehme Wetten für ω_1 mit $23 : 10$ an, Buchmacher II dagegen Wetten für ω_2 mit $18 : 10$. Hier ist es auch möglich, auf beide Ausgänge gleichzeitig zu setzen, wenn man etwa den Verlust eines Einsatzes durch den Gewinn beim anderen Buchmacher ausgleichen möchte.

Das Problem der gewinnsicheren Einsatzkoppelung. — Bei dem zuletzt genannten Beispiel liegt natürlich die Frage nahe, ob man auf beide Ausgänge gleichzeitig wetten und dabei dennoch, unabhängig vom realisierten Ausgang, einen positiven Reingewinn erzielen kann. Die Frage führt auf das

Ungleichungssystem

$$\begin{aligned}\tfrac{23}{10}\cdot e_1 - e_1 - e_2 > 0,\\ \tfrac{18}{10}\cdot e_2 - e_1 - e_2 > 0.\end{aligned}$$

Jede Ungleichung beschreibt ein offenes Winkelfeld im ersten Quadranten der (e_1, e_2)-Ebene (natürliche Nebenbedingung ist ja $e_1, e_2 \geq 0$). Die erste hieran zu gewinnende Einsicht ist die, dass die Punkte im Durchschnitt der beiden Winkelfelder gewinnsichere Einsatzkoppelungen repräsentieren. Als zweites können die Schüler am Schaubild unmittelbar entdecken, dass umso mehr Spielraum für die Wahl solcher Punkte besteht, je größer die betreffenden Einsätze sein dürfen.

Man kann das Arbeiten mit den Ungleichungen noch vertiefen, nachdem man ähnliche und auch solche Beispiele hat ausführen lassen, bei denen die Winkelfelder disjunkt zueinander liegen. Wird ein Spiel mit der Möglichkeit gewinnsicherer Einsatzkoppelung *positiv* genannt, so stellt sich nämlich folgende Frage: Können wir auch ohne Schaubild unmittelbar an den Quoten prüfen, ob ein Spiel positiv ist oder nicht? Das Kriterium ist einfach und sollte von den Schülern weitgehend selbständig gefunden werden: Ein Spiel mit den Quoten q_1, q_2 ist genau dann positiv, wenn $(q_1 - 1)(q_2 - 1) > 1$, d. h. wenn $q_1 q_2 - q_1 - q_2$ positiv ist.

Von hier aus bieten sich zwei Möglichkeiten zur Weiterführung an. Einmal liegt es nahe, von zwei zu drei Dimensionen überzugehen, was allerdings die Kenntnis räumlicher Koordinatensysteme voraussetzt. Sodann verlangt aber die Praxis über das gefundene Entscheidungsverfahren hinaus auch noch die effektive (von Schaubildern unabhängige) Berechnung der zu koppelnden Einsätze. Hier ist es ein glücklicherweise plausibler Kunstgriff, der zunächst den gesuchten Rechenausdruck liefert und es in der Folge zwanglos ermöglicht, die Ergehnisse auf beliebige Dimensionen zu verallgemeinern. Anstelle der ursprünglich angesetzten Ungleichungen betrachtet man [wie bei B. Gündel, *Pythagoras im Urlaub*, 3. Aufl., Frankfurt a. M. 1964, S. 115 ff] das zugehörige lineare Gleichungssystem mit konstanter rechter Seite $G > 0$:

$$\begin{aligned}q_1 e_1 - e_1 - e_2 = G,\\ q_2 e_2 - e_1 - e_2 = G.\end{aligned}$$

Das entspricht der Aufgabe, unabhängig vom Versuchsausgang den konstanten Reingewinn G zu erzielen. Erfüllen geeignete e_1, e_2 dieses Gleichungssystem, so heiße das zugehörige Spiel in Analogie zur früheren Bezeichnung *konstant-positiv*. Offensichtlich bietet das Gleichungssystem den Vorteil, dass man in seiner leicht zu findenden Lösung

$$e_i = \frac{G}{q_i\left(1 - \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2}\right)} \quad (i = 1, 2)$$

zugleich eine Entscheidungs- und Berechnungsvorschrift gewinnt. Das Spiel ist genau dann konstant-positiv, wenn für den geklammerten Term im Nenner, abgekürzt mit v, gilt: $v > 0$. Im Beispiel ist $v = 2/207$.

Von den zahlreichen auf dieser Stufe von Schülern angreifbaren Fragestellungen erwähne ich hier: die Konstruktion eines Schwarz-Rot-Rouletts, das keine gewinnsichere Einsatzkoppelung zulässt; das Vergleichen des aus dem Gleichungssystem gewonnenen Kriteriums mit dem, das anhand der Ungleichungen aufgestellt wurde (Ergebnis für $n = 2$: Ein Spiel ist genau dann positiv, wenn es konstant-positiv ist); ferner die Suche nach den Punkten im Winkelfeld eines positiven Spiels, die zu Einsätzen mit konstantem Reingewinn gehören, oder die Verteilung eines begrenzten Kapitals $K > 0$ auf die Ausgänge eines positiven Spiels. Schließlich wären sämtliche Überlegungen auf den Fall $n = 3$ zu übertragen. Dabei sollte man die Lösung des zugehörigen Gleichungssystems zunächst *per analogiam* vermuten, dann erst rechnerisch herleiten.

Im Anschluss an die Fälle $n = 2$ und $n = 3$ lässt sich unschwer der allgemeine Fall behandeln, der auf das Lösen des Gleichungssystems $g(\omega_i) = G$ $(i = 1, \ldots, n)$ mit fest vorgegebenem $G > 0$ hinausläuft. Eine Analogiebetrachtung liefert die Vermutung, dass

$$e_i = \frac{G}{q_i v(Q)} \quad (i = 1, \ldots, n) \text{ mit } v(Q) := 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q_i}$$

die gesuchten Einsätze sind. Diese Annahme kann dann leicht durch Einsetzen in das Gleichungssystem geprüft und verifiziert werden.

Wichtig ist vor allem dies: Die allgemeinen Überlegungen bestätigen die Schlüsselrolle, die der allein von den gegebenen Quoten abhängige Wert

$v(Q)$ spielt. Ist er positiv, so ist das Spiel konstant-positiv und damit natürlich auch positiv. Es lässt sich jetzt sogar umgekehrt zeigen, dass jedes positive Spiel auch konstant-positiv ist (womit der scheinbar speziellere Hilfsbegriff ›konstant-positiv‹ überflüssig wird): Ist nämlich $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ positiv, so gibt es $e_i \geq 0$ mit $q_i e_i - S > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ und $S = e_1 + \cdots + e_n$. Also wird $1/q_i < e_i/S$ $(i = 1, \ldots, n)$ und damit $v(Q) > 0$.

Die Ergebnisse lassen sich folgendermaßen zusammenfassen: Ein Spiel mit dem Quotenfeld $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ $(q_i > 0;\ i = 1, \ldots, n)$ ist genau dann positiv, wenn $v(Q) > 0$ ist. In diesem Fall lässt sich sogar ein konstanter Reingewinn $G > 0$ erzielen, wenn auf einen Ausgang mit der Quote q_i der Einsatz $e_i = G/q_i v(Q)$ gewettet wird.

Das Resultat eignet sich zur wahrscheinlichkeitsfreien Analyse von Glücksspielen, sofern die zugehörigen Quoten vorab bekannt sind. Im Allgemeinen stellen sich dabei die Werte $v(Q)$ für spezielle Wetten sowie für Spiele wie Roulett, Roulca oder Cubus als negativ heraus, etwa für Roulett $-{}^1/_{36}$, für Roulca $-{}^1/_{24}$.

Probabilistische Behandlung.— In der Wahrscheinlichkeitsrechnung beurteilt man Glücksspiele meist anhand des mittleren Gewinns, der zu einer bestimmten Einsatzverteilung gehört. Dazu müssen die Wahrscheinlichkeiten p_i der Versuchsausgänge ω_i bekannt sein. Wird dann auf den Ausgang ω_i mit der Quote q_i der Einsatz e_i getätigt, so gilt für den Erwartungswert $E(g)$ des Reingewinns die sofort zu verifizierende Formel

$$E(g) = \sum_{i=1}^{n} (q_i p_i - 1) e_i.$$

Diese Beziehung gestattet es, eine Reihe interessanter Fragestellungen für den Unterricht der Sekundarstufe II zu entwickeln. Besondere Erwähnung verdient hier die Frage nach Strategien der Bank oder der Spieler (auch bei negativer Erwartung). Bemerkenswert ist ferner das unter verschiedenen Bedingungen sich darbietende Problem des Zusammenhangs von $E(g)$ und $v(Q)$. Beispielsweise ist, bei Antiproportionalität der Quoten zu den Wahrscheinlichkeiten, das Vorzeichen von $v(Q)$ mit dem des Erwartungswertes bezüglich irgend einer Einsatzverteilung identisch; außerdem sind dann Erwartungswert und Einsatzsumme linear abhängig.

POSTSKRIPTUM

Als ich mich einige Jahre später noch einmal dem Thema gewinnsicherer Einsatzverteilungen bei Spielen mit festen Quoten zuwandte, fand ich auch die Lösung für das allgemeinere Problem: Ersetze die Vorgabe eines auf allen Spielausgängen konstanten Reingewinns $G \geq 0$ durch Vorgabe jeweils individueller positiver Reingewinngrößen g_i auf den einzelnen Spielausgängen ω_i $(1 \leq i \leq n)$. In diesem Fall gilt für die zugehörigen Einsätze:

$$e_i = \frac{1}{q_i}\left(g_i + \frac{1}{v(Q)}\sum_{k=1}^{n}\frac{g_k}{q_k}\right)$$

für $i = 1, 2, \ldots, n$ [vgl. Bernd Luderer (Hrsg.), *Die Kunst des Modellierens*, Wiesbaden 2008, S. 469, Satz 28.6].

Subjektive Wahrscheinlichkeit und Gesetz der großen Zahlen[1]

In der Methodenlehre der Statistik wird schon seit langem über die subjektive und die objektive Deutung der Wahrscheinlichkeit debattiert. Es ist nicht meine Absicht, mich hier auf die Feinheiten dieser Diskussion einzulassen, und wenn ich über subjektive Wahrscheinlichkeiten rede, so geschieht dies ohne Parteinahme für eine bestimmte Philosophie. Beide Aspekte des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, der subjektive wie der objektive, spielen eine Rolle im stochastischen Denken.

Betrachten wir die Aufgabe, die Wahrscheinlichkeiten für die Resultate beim Würfeln zu bestimmen. Beim üblichen Vorgehen benutzt man dazu die Annahme, dass alle Augenzahlen gleichwahrscheinlich sind. Auf diese Weise lässt sich ein Rückgriff auf eine inhaltliche Deutung der Wahrscheinlichkeit vermeiden. Wir wollen aber häufig nicht über einen idealen, d. h. bloß gedachten, sondern über einen ganz bestimmten realen Würfel

[1] Revidierter Beitrag zum 3. Internationalen Symposium für Didaktik der Mathematik vom 29.9. bis 3.10.1980, in: *Stochastik im Schulunterricht*, Band 3 der Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Universität für Bildungswissenschaften in Klagenfurt. Hölder-Pichler-Tempsky: Wien; B. G. Teubner: Stuttgart 1981, 209-215.

Erkenntnisse gewinnen. Offensichtlich brauchen wir dazu geeignete Erfahrungsdaten. In diesem Punkt stimmen im Prinzip alle Deutungen der Wahrscheinlichkeit überein. Worin unterscheiden sie sich dann aber noch?

Nach der objektiven Auffassung gehören die Wahrscheinlichkeiten der Augenzahlen unmittelbar zur physikalischen Struktur des Würfels, genauer: des Werfversuchs mit dem Würfel. Die Wahrscheinlichkeit, eine Sechs zu werfen, ist danach eine *innere* Eigenschaft der Versuchsanordnung; sie besteht unabhängig davon, ob wir sie durch relative Häufigkeiten annähern oder nicht.

Demgegenüber sind subjektive Wahrscheinlichkeiten Bestandteil eines *Urteils* über die Versuchsanordnung; sie repräsentieren Gewissheitsgrade wirklicher oder fiktiver Personen. Angenommen, wir prüfen den Würfel mit Auge und Hand und finden ihn regelmäßig hergestellt. Eine physikalische Symmetrie lässt sich auf solche Weise zumindest oberflächlich erkennen, was fürs erste genügt, um den sechs Würfelseiten jeweils die Wahrscheinlichkeit $^1/_6$ zuzuschreiben. Diese subjektive Bewertung gilt unter Vorbehalt und kann durch spätere Erfahrungen revidiert werden.

Im Alltagsleben gibt es viele Fälle subjektiver Wahrscheinlichkeitsbewertungen. Oft sind die betreffenden Ereignisse einmalig und lassen sich daher im Rahmen der Häufigkeitsdeutung gar nicht beurteilen. Hier erfüllt die Theorie der subjektiven Wahrscheinlichkeit (mit ihren Anwendungen in behavioristischen Disziplinen und in der Bayesschen Statistik) eine wichtige Aufgabe. Natürlich kann man nicht erwarten, dass Gewissheitsgrade irgendwelcher Personen ohne weiteres die Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung erfüllen. Ein Weg, auf dem sich dies erreichen lässt, ist eine von B. de Finetti vorgeschlagene Idealisierung [La prévision: Ses lois logiques, ses sources subjectives, *Ann. de l'Inst. H. Poincaré*, vol. 7 (1937)]. Dabei drücken die betreffenden Personen ihre subjektive Bewertung durch Einsätze in einer Wette aus. Fairerweise darf die Wette keinem Teilnehmer einen sicheren, d. h. unabhängig vom Versuchsausgang fälligen Reingewinn ermöglichen. – Beispiel: Frank wettet 2 Geldeinheiten für, Bruno 10 Geldeinheiten gegen das Würfeln einer Sechs. Sie vereinbaren, dass die Einsatzsumme $S = 2 + 10 = 12$ an Frank geht, wenn eine Sechs erscheint, andernfalls an Bruno. Die sog. Wettquotienten $^2/_{12}$ und $^{10}/_{12}$ werden hier als die subjektiven Wahrscheinlichkeiten für ›Sechs‹ bzw. ›Nicht-Sechs‹ aufgefasst.

Eine unfaire Wette entstünde z. B. dann, wenn Frank setzen kann und Bruno sich überreden ließe, bei ›Sechs‹ das 6-fache und bei ›Nicht-Sechs‹ das 1,25-fache der Einsätze zurückzuzahlen. [Siehe hierzu meinen Artikel: Über Spiele mit Quoten, *Elemente der Mathematik* 32 (1977), 118-123.] Analog verfährt man bei einem Versuch mit N Ausgängen $A_1, \ldots, A_N$: Steht auf A_k der Einsatz e_k, so lautet der zugehörige Wettquotient

$$b_k := \frac{e_k}{S}, \quad \text{wobei } S = e_1 + \cdots + e_N.$$

Es gilt dann $b_1 + \cdots + b_N = 1$.

Die Anpassung dieser Größen an Erfahrungsdaten lässt sich auf einfache Weise erreichen. Dazu denken wir uns einen Zufallsversuch mit den Ausgängen $A_1, \ldots, A_N$ und den (unbekannten) objektiven Wahrscheinlichkeiten $p_1, \ldots, p_N$, $p_1 + \cdots + p_N = 1$, zur Zeit $t = 0, 1, 2, \ldots$ durchgeführt. Wir schreiben $x_k(t) = 1$, falls A_k zur Zeit t erscheint, sonst $x_k(t) = 0$ ($1 \leq k \leq N$); auch Einsätze und Wettquotienten werden als von t abhängig notiert.

Für die relativen Häufigkeiten der Versuchsausgänge gilt bekanntlich ein Gesetz der großen Zahl:

$$\frac{x_k(0) + \cdots + x_k(t-1)}{t} \longrightarrow p_k \quad \text{mit Wahrscheinlichkeit 1.} \tag{1}$$

Es ist aufschlussreich, die Anpassungsdynamik der Häufigkeiten einmal mit dem einfachsten linearen Lernmodell der Psychologie zu vergleichen. Der subjektive Anstrich stört dabei überhaupt nicht.

Eine Person soll nach jedem Versuchsdurchgang raten, welcher der Ausgänge $A_1, \ldots, A_N$ als nächster erscheint (meistens ist $N = 2$) . Wir schreiben $y_k(t) = 1$, wenn die Person das Eintreffen von A_k für die Zeit t voraussagt, sonst $y_k(t) = 0$. Dann ist

$$w_k(t) = \frac{y_k(0) + \cdots + y_k(t-1)}{t} \tag{2}$$

die relative Häufigkeit, mit der A_k zur Zeit t vorhergesagt wird. Bei Experimenten zeigt sich oft eine gewisse Anpassung der $w_k(t)$ an die objektive Wahrscheinlichkeit p_k von A_k (»probability matching«) [vgl. etwa M. F.

Norman, *Markov Processes and Learning Models*, New York / London 1972]. In den 1950er Jahren beschrieb man diesen Vorgang meist durch einfache lineare Modelle der Form

$$w_k(t+1) = \alpha w_k(t) + (1-\alpha)p_k \qquad (1 \leq k \leq N). \tag{3}$$

Es ist leicht zu zeigen, dass für $0 < \alpha < 1$ die Folge $w_k(t)$ gegen p_k strebt für $t \longrightarrow \infty$. Der Parameter α lässt sich dabei als Trägheitsfaktor deuten: Je näher er bei 1 liegt, desto langsamer konvergiert die Folge. Seine empirische Bestimmung ist eine einigermaßen unsichere Sache. Das ist kaum überraschend, wenn man sich die aus (2) ergebende Rekursion ansieht:

$$w_k(t+1) = \frac{t}{t+1} w_k(t) + \frac{1}{t+1} y_k(t). \tag{4}$$

Hier haben wir einen zeitabhängigen Trägheitsfaktor und, anstelle der asymptotischen Wahrscheinlichkeit p_k, eine Zufallsgröße $y_k(t)$. Die Folge konvergiert mit Wahrscheinlichkeit 1 gegen p_k, falls für den Erwartungswert der Ratestrategie $y_k(t)$ gilt: $E(y_k(t)) = p_k$. Am einfachsten wird dies erreicht, indem man von einem bestimmten Zeitpunkt an immer dasjenige Ereignis voraussagt, das unmittelbar zuvor eingetreten ist. (Eine maximale Trefferquote, allerdings ohne »probability matching«, wird durch Vorhersage des bis zum jeweiligen Zeitpunkt häufigsten Ereignisses erzielt.) Im wesentlichen ist das die Anpassungsdynamik vor dem Hintergrund des objektiven Wahrscheinlichkeitsbegriffs.

Fragen wir nun, wie sich in dieser Hinsicht subjektive Wahrscheinlichkeiten verhalten, die als faire Wettquotienten definiert sind. Um das zu beantworten, müssen wir eine Annahme darüber machen, in welcher Weise die wettenden Personen (›Spieler‹) ihre Einsätze vom vergangenen Geschehen abhängig machen. Sie können sich z. B. – als Kollektiv aufgefasst – erfolgsorientiert verhalten in dem Sinn, dass umso mehr auf ein Ereignis gesetzt wird, je größer die bis zum jeweiligen Zeitpunkt darauf erzielten Gewinne sind. Am einfachsten ist es, wenn man dabei die monotone Abhängigkeit als Proportionalität präzisiert:

a) Bis zu einem geeigneten Zeitpunkt t_0 ist auf jedem Ausgang ein Gewinn erzielt worden. Formal: für alle k, $1 \leq k \leq N$, gibt es ein $\tau < t_0$ mit $x_k(\tau) = 1$ und $e_k(\tau) > 0$.

b) Für $t < t_0$ werden alle Einsätze beliebig gewählt. Zur Zeit $t \geq t_0$ ist der Einsatz auf dem k-ten Ausgang proportional dem mittleren Gewinn, der darauf im Zeitraum $[0, t-1]$ erzielt wurde:

$$e_k = \frac{a}{t} \sum_{\tau=0}^{t-1} S(\tau) x_k(\tau), \quad a > 0 \text{ konstant.} \tag{5}$$

Welche Folgen hat das durch a) und b) charakterisierte opportunistische Verhalten für die Dynamik der Wettquotienten? Wir können es praktisch, z. B. durch Computer-Simulation, realisieren. Zweckmäßigerweise schreiben wir die Folge der Wetteinsätze rekursiv auf:

$$e_k(t+1) = \frac{t}{t+1} \cdot e_k(t) + \frac{aS(t)}{t+1} \cdot x_k(t). \tag{6}$$

(6) beschreibt einen Algorithmus zur Realisierung des opportunistischen Wettverhaltens. Auf jeder Stufe erscheinen die subjektiven Wahrscheinlichkeiten $b_k(t)$; sie stabilisieren sich auf dem Niveau der objektiven Wahrscheinlichkeiten, worin sich ein Gesetz der großen Zahlen ausdrückt.

In der Tat gilt $b_k(t) \longrightarrow p_k$ mit Wahrscheinlichkeit 1. Die folgende Begründung ist nur heuristisch, dafür aber einfach: Für die Einsatzsummen ergibt sich zunächst die Rekursion

$$S(t+1) = \frac{t+a}{t+1} \cdot S(t). \tag{7}$$

Dann dividieren wir (6) durch $S(t+1)$ und erhalten mit (7)

$$b_k(t+1) = \frac{t}{t+a} \cdot b_k(t) + \frac{a}{t+a} \cdot x_k(t). \tag{8}$$

Für $a = 1$ geht (8) in (4) über; die Wettquotienten verhalten sich also wie relative Häufigkeiten genau dann, wenn (nach (7)) die Summe aller Einsätze in jedem Durchgang konstant bleibt. Bei $a \neq 1$ ist dies immerhin noch angenähert erfüllt, und zwar umso besser, je größer t wird. [Einzelheiten dazu in meinem Artikel: Zur Anpassungsdynamik subjektiver Wahrscheinlichkeiten, *Grundlagenstudien aus Kybernetik und Geisteswissenschaft* 21/4

(1980), 117-125, wiederabgedruckt in A. Schreiber: *Begriffsbestimmungen*, Berlin 2011]

Betrachten wir abschließend noch einmal das Spielgeschehen unter der vereinfachenden Voraussetzung, dass $a = 1$ und vom Spieler(kollektiv) A in allen Spielrunden der gleichbleibende Gesamteinsatz S verwendet wird. Zu Beginn ($t = 0$) setzt A auf irgendeinen Ausgang. Der Gegenspieler (die Bank) B dreht das Glücksrad und realisiert $x_k(0) = 1$ für genau ein (zufälliges) k. In der Folgerunde ($t = 1$) wettet A auf gerade diesen k-ten Ausgang, und B dreht erneut sein Glückrad; usw. In den Spielrunden 0 bis $t - 1$ werden sich dann für die Ausgänge $A_1, A_2, \ldots, A_N$ gewisse relative Häufigkeiten $h_1(t-1), h_2(t-1), \ldots, h_N(t-1)$ aufgebaut haben. Für diese gilt

$$h_k(t-1) = \frac{1}{t}\sum_{\tau=0}^{t-1} x_k(\tau),$$

woraus sich mit (5) ergibt: $e_k(t) = S \cdot h_k(t-1)$, $1 \leq k \leq N$. Die Wettquotienten $b_k = e_k/S$, die diesem Verhalten von A entsprechen, sind also nichts anderes als relative Häufigkeiten.

Anmerkung. — Im wesentlichen ist dies die Idee des »fictitious play« von G. W. Brown; sie enthält eine optimale Strategie im Sinne der Spieltheorie [vgl. J. Robinson: An iterative method of solving a game, *Annals of Mathematics* 54/2 (1951); auch Nievergelt/Farrar/Reingold, *Computer Approaches to Mathematical Problems*, Prentice-Hall, N. J. 1974, 118-121]. Der von J. L. Kelly vorgeschlagenen Strategie liegt ein ähnlicher Gedanke zugrunde [A New Interpretation of Information Rate, *The Bell System Technical Journal*, Juli 1956]. Danach wird ein Ausgang, etwa A_k, vorhergesagt und auf A_j der Betrag $h_{jk} \cdot S$ gesetzt, wo S das verfügbare Kapital ist und h_{jk} die relative Häufigkeit von A_j bei vorhergesagtem A_k.

Eigentlich kann es nicht wirklich überraschen, dass auch in subjektivistischen Begriffsbildungen und Entscheidungsprozeduren letztlich wieder doch frequentistische Vorstellungen stecken. Relative Häufigkeiten bieten sich eben als besonders einfaches und wirkungsvolles Mittel an, einen durch Beobachtung fortgesetzt revidierten Erfahrungsstand numerisch und in verdichteter Form zu konservieren.

Eine Ungleichung für das Sicherheitsäquivalent[1]

In der Theorie des ökonomischen Nutzens betrachtet man Handlungsalternativen (Entscheidungen) a, die unter disjunkten Bedingungen $b_1, b_2, \ldots, b_N$ zu unterschiedlichen monetären (und insoweit numerisch ausdrückbaren) Konsequenzen $x_1, x_2, \ldots, x_N$ führen. In dem hier interessierenden Fall werden die Wahrscheinlichkeiten $p_j = P(b_j)$ der Bedingungen als bekannt vorausgesetzt, und es gelte $p_1 + p_2 + \cdots + p_N = 1$. Für die Einschätzung der unsicheren Folgen, die a nach sich zieht, sind zwei Wahrscheinlichkeitsmittel von Belang: der klassische Erwartungswert der Konsequenzen

$$\mu = \mathrm{EW}(a) := \sum_{j=1}^{N} p_j x_j$$

sowie der analog gebildete Nutzenerwartungswert (›Expected Utility‹)

$$\mathrm{EU}(a) := \sum_{j=1}^{N} p_j u(x_j),$$

worin die Geldwerte x_j als Argumente einer Nutzenfunktion $u : C \to \mathbb{R}$ in Erscheinung treten.[2] Die Nutzenfunktion ist auf das Subjekt der Handlung a bezogen und kennzeichnet insofern sein Verhalten unter Unsicherheit, als von zwei Entscheidungsalternativen diejenige mit dem größeren EU-Wert präferiert wird. Bei übereinstimmendem EU-Wert herrscht Indifferenz. Besteht Indifferenz zwischen a und einer Handlung s mit *sicherer* Konsequenz (unter allen Bedingungen $b_1, b_2, \ldots, b_N$), so heißt s *Sicherheitsäquivalent* von a. Unter den Annahmen, die in der Nutzentheorie üblicherweise bezüglich einer Nutzenfunktion geltend gemacht werden, lässt sich leicht ein

[1] Unveröffentlichter Auszug aus meiner Vorlesung *Entscheidungsmodelle*, Universität Flensburg, Sommersemester 2003.

[2] Ich übernehme hier im wesentlichen die Bezeichnungsweisen und Grundannahmen von F. Eisenführ / M. Weber, *Rationales Entscheiden*, 3., neubearb. u. erw. Auflage; Springer-Verlag: Berlin; Heidelberg; New York 1999, im Folgenden kurz [EisWeb].

Schwankungsintervall für ein solches s angeben. Dies soll, nach einigen Vorbereitungen, im Folgenden geschehen.

Für das Weitere werde zunächst angenommen, dass sämtliche in Betracht kommenden Konsequenzen x_j in einem endlichen abgeschlossenen Intervall $C = [x_{\min}, x_{\max}]$ mit $0 \leq x_{\min} < x_{\max}$ liegen. Auf C definierte Nutzenfunktionen u seien durchweg als stetig und streng monoton wachsend auf ganz C vorausgesetzt. Ein Sicherheitsäquivalent s von a ist infolgedessen durch die Gleichung $u(s) = \mathrm{EU}(a)$ eindeutig bestimmt und explizit zu schreiben als

$$s = \mathrm{S\ddot{A}}(a) := u^{-1}(\mathrm{EU}(a)).$$

Die Differenz $\mathrm{RP}(a) := \mathrm{EW}(a) - \mathrm{S\ddot{A}}(a)$ heißt *Risikoprämie* und »dient zur Charakterisierung der Risikoeinstellung« [EisWeb, S. 223]. Es treten dabei drei Fälle auf: $\mathrm{RP} > 0$ (bei streng konkavem u), $\mathrm{RP} < 0$ (bei streng konvexem u), $\mathrm{RP} = 0$ (bei linearem u). In dieser Reihenfolge besagen die Fälle, dass das Verhalten des Entscheiders beziehentlich als risikoscheu, risikofreudig, risikoneutral einzustufen ist.

Kommen in einer Situation zugleich mehrere Nutzenfunktionen (Verhaltenstypen bei Entscheidungen) ins Spiel, so ist es aus Gründen der Vergleichbarkeit sinnvoll, ihre Werte auf das Einheitsintervall $[0, 1]$ zu normieren. Speziell für eine lineare Nutzenfunktion u_0 auf C erhalten wir solcherart die eindeutige normierte Darstellung:

$$u_0(x) = \frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} \in [0, 1] \text{ für alle } x \in C.$$

Für eine auf C konkave (konvexe) Funktion $u : C \to [0, 1]$ gilt dann $u_0(x) \leq$ (bzw. $\geq$) $u(x)$, $x \in C$. In [EisWeb, S. 222-224] finden sich darüberhinaus die (eigentlich überflüssigen, aber nur geringfügig einschränkenden) Randbedingungen $u_0(x_{\min}) = u(x_{\min})$ und $u_0(x_{\max}) = u(x_{\max})$, von denen (außer in zwei Schaubildern) kein Gebrauch gemacht wird.

Ein Schwankungsintervall für das Sicherheitsäquivalent. —Es sei nun eine beliebige, etwa konkave Nutzenfunktion $u : C \to [0, 1]$ sowie eine Handlungsalternative a mit unsicheren Konsequenzen gegeben. In [EisWeb] wird dann der folgende »Weg zur Bestimmung des Sicherheitsäquivalents« beschrieben: »Man geht vom Erwartungswert zur Verbindungslinie der Endpunkte der Nutzenfunktion, von dort parallel zur Abszissenachse zur Nutzenfunktion. Der Betrag, der diesem Abszissenwert entspricht, ist gleich dem Sicherheitsäquivalent.« (S. 223-224) Tatsächlich stimmt aber die im ersten Schritt bestimmte Ordinate $u_0(\mu)$ keineswegs mit dem Nutzenerwartungswert $\mathrm{EU}(a) = u(s)$ überein; somit lässt sich $s = \mathrm{SÄ}(a)$ auch nicht durch das Aufsuchen des Urbildes von $u_0(\mu)$ unter u bestimmen. Dieser Fehler findet sich (unwesentlich modifiziert) auch noch in der 5. Auflage der betreffenden Monografie, wie die folgende Schaugrafik (ibid. Abb. 9-11, S. 264) belegt (am besten denkt man sich darin $C = [a_1, a_2]$ gewählt):

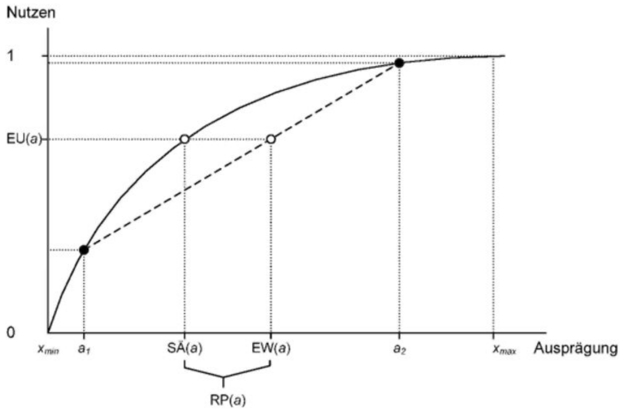


Abb. 1

Um den fraglichen Sachverhalt ins rechte Licht zu rücken, setzen wir $\mu_0 := u^{-1}(u_0(\mu))$. Die Grafik in Abb. 2 illustriert die Lage und das Zustandekommen der relevanten Werte.

Es gilt die Ungleichung:

$$\mu_0 \leq s \leq \mu. \tag{*}$$

Beweis: 1. Da u konkav ist, haben wir nach der Jensenschen Ungleichung:

$$\mathrm{EU}(a) = \sum_{j=1}^{N} p_j u(x_j) \leq u\left(\sum_{j=1}^{N} p_j x_j\right) = u(\mathrm{EW}(a)) = u(\mu).$$

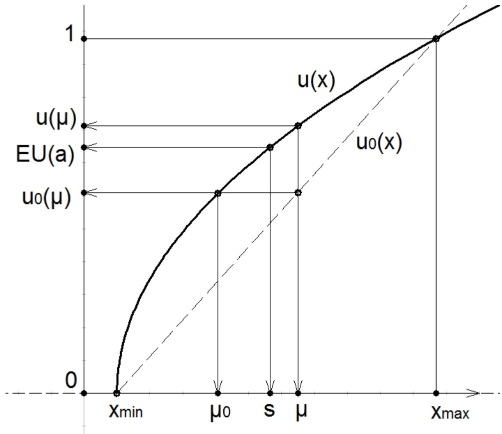


Abb. 2

Nun ist das Sicherheitsäquivalent s durch $u(s) = \mathrm{EU}(a)$ definiert; mithin gilt auch $u(s) \leq u(\mu)$. Wenden wir auf beiden Seiten dieser Ungleichung die (ebenfalls monoton wachsende) Umkehrfunktion u^{-1} an, so ergibt sich $s \leq \mu$.

2. Der Nutzenerwartungswert $\mathrm{EU}(a)$ lässt sich auch bestmöglich nach unten abschätzen. Dabei wird wesentlich benutzt, dass $u(x) \geq u_0(x)$ für alle $x \in C$ gilt; ferner, dass u_0 eine lineare Funktion der Form $u_0(x) = \alpha x + \beta$ ist. Damit erhalten wir:

$$u(s) = \mathrm{EU}(a) = \sum_{j=1}^{N} p_j u(x_j) \geq \sum_{j=1}^{N} p_j u_0(x_j) = \alpha \sum_{j=1}^{N} p_j x_j + \beta \sum_{j=1}^{N} p_j$$
$$= \alpha \sum_{j=1}^{N} p_j x_j + \beta = u_0(\sum_{j=1}^{N} p_j x_j) = u_0(\mathrm{EW}(a)) = u_0(\mu).$$

Anwendung von u^{-1} auf beiden Seiten der Ungleichung liefert hier (ähnlich wie unter 1.): $\mu_0 \leq s$. Damit ist (*) bewiesen.

Im Fall einer konvexen Nutzenfunktion hat man lediglich die Richtung der Ungleichung umzukehren, d. h. $\leq$ in (*) durch $\geq$ zu ersetzen. Der Beweis verläuft dann in wörtlicher Analogie.

Probleme bei der Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs[1]

Zusammenfassung. Die im Titel genannten Probleme werden nicht allein im Hinblick auf mögliches Unterrichtsgeschehen behandelt, sondern gerichtet auf inhaltliche Aspekte des Begriffserwerbs und -gebrauchs. Nach einleitenden Betrachtungen zur Stochastik in der Schule folgt eine grundlagenkritische Skizze des axiomatischen Aufbaus, der personalistischen Begründung, der klassischen Definition, der Limestheorie und der Häufigkeitsinterpretation der Wahrscheinlichkeit. Daran schließt sich eine Diskussion vorläufiger didaktischer Konsequenzen an sowie Bemerkungen über den Begriff der stochastischen Unabhängigkeit.

Die im Folgenden behandelte Frage ist grundlegend für die Stochastik und lautet: Wie ist der Begriff der Wahrscheinlichkeit einzuführen? Über diese Frage ist grundsätzlich und allgemein nachzudenken, und das heißt: nicht allein im Hinblick auf mögliches Unterrichtsgeschehen, sondern gerichtet auf inhaltliche Aspekte des Begriffserwerbs und -gebrauchs. Außer einer unübersehbaren Fülle einschlägiger Zeitschriftenaufsätze haben auch Monographien über den Wahrscheinlichkeitsbegriff in diesem Jahrhundert eine beachtliche Konjunktur. Ich nenne hier in absichtsloser chronologischer Auswahl wichtiger Bücher nur Keynes (1921), Czuber (1923), Borel (1939), Carnap (1950) und Stegmüller (1973). Mein eigener Beitrag soll den mit dieser Literatur nicht vertrauten Leser, der aber Grundkenntnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung besitzt, lediglich auf einige begriffliche Probleme der Wahrscheinlichkeit hinweisen, die in den Stochastik-Unterricht hineinreichen. Das bedeutet nicht die Empfehlung begriffskritischer Diskurse für Schüler; vielmehr geht es hier vorläufig nur darum, einige Anhaltspunkte für ein tieferes didaktisches Verständnis jener Probleme zu gewinnen.

[1] In: *mathematica didactica* 2 (1979), 235-246.

Wahrscheinlichkeit in der Schule

Bis gegen Ende der 1960er Jahre hat man in der Wahrscheinlichkeitsrechnung zumeist eine Disziplin gesehen, die erst in der Oberstufe des Gymnasiums behandelt werden kann (zur Geschichte der Wahrscheinlichkeit in der Schule vgl. Heitele (1977)). Man erkannte zwar ihre Bedeutung, hielt sie aber für zu schwierig und versuchte nur selten eine gründliche didaktische Analyse. Heute ist das anders: Man erblickt in der Wahrscheinlichkeitstheorie ein Gebiet, das auf allen Schulstufen, selbst im Primarbereich, eine Rolle zu spielen hat. Entsprechend groß ist der Zuwachs an didaktischer Literatur zu diesem Thema. Ich erwähne hier besonders Freudenthal (1973) sowie Heitele (1975), der eine Liste »fundamentaler stochastischer Ideen« zusammengestellt hat, ebenso Winter (1976), dem es um eine pädagogische Rechtfertigung für das Lernen stochastischer Denkweisen geht (nämlich aufgrund einer Verbesserung des »Verständnisses unserer natürlichen und gesellschaftlichen Welt«, »des menschlichen Verhaltens im Denken und Handeln«, der »Kritikfähigkeit gegenüber vorgelegten Behauptungen«).

Was nun die Schwierigkeit der Theorie angeht, so besteht eine schätzungsweise beträchtliche Übereinstimmung in folgendem Punkt: Im Anfangsstadium kann und soll keine Theorie betrieben werden; die intuitive Einführung bleibt, wie A. Engel sich ausdrückt, »nur unvollständig strukturiert« (1966, S. 5). Als maßgeblich erscheint eine erlebnisbetonte und handlungsorientierte Einübung in probabilistisches Denken. Dabei beruft man sich auf einen durch alltägliche Erfahrungen entstandenen qualitativen Wahrscheinlichkeitsbegriff (z. B. Strehl (1974), S. 222), auf eine vage Intuition von Wahrscheinlichkeit [vgl. Feller (1968), S. 2], eine Art von »Erwartungsgefühl« [Ineichen (1960), S. 9]. H. Freudenthal vergleicht die Anfangssituation mit der in der Geometrie [vgl. (1968, S. 7), (1973, S. 536)]. Wer Geometrie lerne, brauche auch für den Einstieg keine präzisen Begriffe von Punkt, Kreis oder rechtem Winkel. Ganz analog würde auch in der Wahrscheinlichkeitstheorie später das präzisiert, was anfangs vorwiegend anschaulich oder gefühlsmäßig gegeben ist. Dazu appelliert Freudenthal an die Möglichkeit, intuitive Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe von Wetteinsätzen zum Ausdruck zu bringen.

An dieser Stelle muss man fragen, ob und wie die damit angedeutete Auffassung einen Zugang zum Wahrscheinlichkeitsbegriff und seiner Anwendung ermöglichen soll. Auch andere Autoren, z. B. Heigl/Feuerpfeil (1975, S. 31), appellieren an die subjektive Wahrscheinlichkeit als Grundlage für ein die Wirklichkeit beschreibendes Modell. Aber ist hieraus ein »objektives Maß« (S. 31) zu gewinnen? Mit solchen Fragen betritt man unweigerlich ein grundlagentheoretisches Gebiet, das in den letzten Jahrzehnten mit sprunghaft angestiegener Intensität bearbeitet wurde. Wie auch Heitele (1975, S. 194) andeutet, kann es nicht darum gehen, die Inhalte dieser Diskussion im Schulunterricht etwa dazu zu verwenden, eine mathematische Präzisierung des Begriffs des Zufallsexperimentes vorzuführen. Gleichwohl lassen sich die Begründungsfragen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs von den Fragen seiner sinnvollen Anwendung nicht so ohne weiteres trennen, es sei denn um den Preis einer drohenden Fehlsteuerung stochastischer Lernprozesse durch den Lehrer [vgl. Dinges (1978)]. Daher sollen im Folgenden einige Orientierungslinien durch jenes Gebiet in grundlagenkritischer Absicht gezogen werden. Ich erörtere kurz die fünf wichtigsten Ansätze zum Aufbau des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, ziehe dann einige vorläufige didaktische Konsequenzen und schließe mit einer Bemerkung zur stochastischen Unabhängigkeit.

Axiomatischer Aufbau

Anfang der dreißiger Jahre entdeckte A. N. Kolmogorov (1933), dass man die Wahrscheinlichkeitsrechnung formal auffassen kann als Theorie der positiven, normierten und σ-additiven Funktionale (Wahrscheinlichkeitsmaße) auf Ereignisalgebren. Die stochastische Unabhängigkeit wird in diesem Rahmen durch Konstruktionsprinzipien für Produktmaße erfasst, und die Theorie erhält so einen zufriedenstellenden Aufbau. Kolmogorovs bedeutende Entdeckung, nach Freudenthal das »Ei des Kolumbus« (1966, S. 19), wurde aber gelegentlich missverstanden, eine Gefahr, die in den gegenwärtigen didaktischen Bemühungen um die Stochastik wieder akut zu werden droht.

Der positive Aufweis einer Möglichkeit, mit Wahrscheinlichkeiten rein formal zu rechnen, wird nämlich gerne auch negativ so gedeutet, als sei damit nun die Aufgabe beseitigt, eine Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffs zu finden. Diese hält man für eine Frage der nachträglichen Interpretation des Axiomensystems und überlässt sie den Anwendern der Theorie. Aber worin besteht eine Interpretation der KOLMOGOROVschen Axiome? Sie besteht darin, dass man jedem möglichen Ausfall eines Zufallsexperimentes (Punkt des Stichprobenraumes) eine positive reelle Zahl zuordnet derart, dass die Summe dieser Zahlen 1 beträgt. Es handelt sich bei diesen Zahlen um sog. Anfangswahrscheinlichkeiten. Sie muss der Praktiker ermitteln oder festlegen, und zwar nach hypothetischen Prinzipien wie dem Laplaceschen Indifferenzprinzip oder Annahmen, die mit der Häufigkeitsinterpretation der Wahrscheinlichkeit zusammenhängen (siehe weiter unten). Spätestens an dieser Stelle stößt man auf die Frage einer adäquaten inhaltlichen Vorstellung von Wahrscheinlichkeit, eine Frage, die keineswegs außerhalb der Mathematik liegt und daher schwerlich ihren ›Anwendern‹ überlassen werden kann.

Im Übrigen geben diese Überlegungen auch der Didaktik einen Wink. Autoren wie FREUDENTHAL oder ENGEL halten es für überzogen, die Wahrscheinlichkeitsrechnung auf der Schule mit maßtheoretischen Axiomen aufzuziehen [vgl. FREUDENTHAL (1973, S. 554)]. Ich möchte diese Ansicht unterstützen und wie folgt ergänzen: Wenn überhaupt die Grundeigenschaften der Wahrscheinlichkeitsmaße im Unterricht auftauchen, ob nun explizit als Axiome oder auch nur als Rechenregeln, so sollte dies – umgekehrt zum axiomatischen Aufbau – auf dem Wege zu einer inhaltlichen Definition (oder Erklärung) des Wahrscheinlichkeitsbegriffs geschehen. Diese Forderung gilt auch für den Unterricht an der Hochschule. Werden die Axiome nicht methodisch entwickelt und so ihr Gebrauch als sachbezogen gerechtfertigt, dann besteht die Gefahr, dass ihre tatsächliche Rolle und ihr Leistungsvermögen falsch eingeschätzt werden. Aber welches sind die Wege zu einer inhaltlichen Bestimmung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs? Als ersten erwähne ich die

Personalistische Begründung

Drei Gründe veranlassen mich, die personalistische Begründung oder auch sog. subjektivistische Theorie der Wahrscheinlichkeit an erster Stelle zu nennen. Der erste Grund ist die bemerkenswerte Tatsache, dass diese Theorie die einzige vollständig ausgearbeitete konsistente Bestimmung eines inhaltlichen Wahrscheinlichkeitsbegriffs liefert, die bisher bekannt ist. Ein Wort zur Grundidee der Theorie: In ihr geht es »nicht um die Erforschung der Meinungen bestimmter Personen, sondern um die Erforschung der allgemeinen Strukturen von Wahrscheinlichkeitsannahmen« [v. Kutschera (1972, S. 59)]. Dies geschieht über die Einführung sog. Wettquotienten (das sind Quotienten aus dem Einsatz einer Person in einer Wette um ein Ereignis und dem Gesamteinsatz der Wette). Indem man an das Wettverhalten geeignete Rationalitätsanforderungen stellt, wird erwirkt, dass die Wettquotienten die Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung oder noch weitergehende Bedingungen erfüllen. [Eine erste Einführung gibt Hermes (1957), eine didaktisch orientierte Analyse W. Oberschelp (1965).]

Der zweite Grund ist der bedauerliche Umstand, dass der personalistische Aufbau, wie er in den Arbeiten von Ramsey (1931), de Finetti (1937), Savage (1954) u. a. entwickelt wurde, sich zunächst keiner und dann auch nur zögernder Anerkennung der Mathematiker erfreuen und – von Spezialmonographien einmal abgesehen – somit auch in Lehrtexte bislang kaum vordringen konnte. Eher herrscht(e) die Bereitschaft vor, solche Grundlagentheorie als überflüssige Philosophie der Wahrscheinlichkeit zu übergehen [vgl. Freudenthal/Steiner (1966, S. 187)].

Der dritte Grund ist eine unerwünschte Folge des zweiten und betrifft die Didaktik. Man beginnt propädeutisch nicht selten mit dem Phänomen personeller Wahrscheinlichkeiten, beruhend auf Glaubensgraden und entsprechender Risikobereitschaft handelnder Personen. Andererseits vergisst man leicht, dass das übliche Konzept, beruhend auf Symmetriepostulaten oder Häufigkeitsbeobachtungen, welches dann in der Regel den Einführungen zugrunde liegt, sich keineswegs ohne weiteres an diese intuitive Vorbereitung anschließen lässt. Was vielmehr als Präzisierung der ursprünglichen Vorstellung geboten wäre, ist die personalistische Konzeption der Wahrscheinlichkeit. Hier stehen wir vor der Gefahr einer irritierenden Zweigleisigkeit bei der propädeutischen Vorstrukturierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs.[2]

---

[2] Ein Beispiel bietet das Lehrbuch Heigl/Feuerpfeil (1975) auf S. 34. Dort wird das (nicht

Angesichts dieser Situation gibt es zwei Möglichkeiten. Erstens: Man verzichtet auf den personalistischen Anstrich und wählt eine andere Einführung. Besteht trotzdem das Bedürfnis, auf das subjektive Erwartungsgefühl Bezug zu nehmen, so wäre dies mit Vorsicht auch (und eher) in einen anderen Zusammenhang als den der Risikoübernahme bei Wetten zu stellen. Zweitens: Man verwertet konsequent den personalistischen Aufbau und gelangt so unter anderem zu einer Rechtfertigung der KOLMOGOROVschen Axiome. Allerdings fehlen bislang überzeugende Versuche, diese Theorie so weit zu elementarisieren wie gewisse andere Teile der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Unabhängig vom Gelingen eines solchen Versuchs glaube ich aber, dass Konzepte subjektiver Wahrscheinlichkeit eher etwas für die Kollegstufe oder den Hochschulunterricht sind. Damit sollen ›Glaubensgrade‹ nicht aus dem Kontext der Wahrscheinlichkeit verschwinden. Es sollte vielmehr Klarheit darüber bestehen, ob wir von ihnen zur Wahrscheinlichkeit kommen, oder ob nicht umgekehrt (objektive) Wahrscheinlichkeiten Basis für unsere Entscheidungen unter Risiko und Unsicherheit sind. Beides zu verwischen oder vermengen, kann leicht zu Konfusionen beim praktischen Gebrauch des Wahrscheinlichkeitbegriffs führen.

Klassische Definition

Das klassische Konzept der Wahrscheinlichkeit geht auf LAPLACE zurück und kann auf Zufallsexperimente mit einer endlichen Anzahl gleichmöglicher Ausfälle angewandt werden. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist dann definiert als Verhältnis der Anzahl der für das Eintreten des Ereignisses günstigen Fälle zur Anzahl aller möglichen Ausfälle. Es spricht einiges dafür, dieses Konzept in einer propädeutischen Einführung zu verwenden: die übersichtlich wählbaren Stichprobenräume, die vergleichsweise einfachen kombinatorischen Berechnungsverfahren, die Herleitbarkeit der Grundaxiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung mittels der Anzahlfunktion, die vereinfachte Behandlung der Unabhängigkeit und einige weitere Vorteile mehr. [Vgl. dazu STEINER (1962, S. 37 f), STREHL (1974, S. 227) und vor allem FINSLER (1947). FINSLER hält die klassische Methode für den im

explizit so genannte) Laplacesche Indifferenzprinzip irrigerweise geradezu als »Sinn der subjektiven Wahrscheinlichkeit« ausgegeben.

Schulunterricht immer noch besten Weg (S. 108) und demonstriert dies unter anderem durch eine sehr sorgfältige Diskussion des Multiplikationssatzes.]

Es darf aber nicht vergessen werden, dass die klassische Definition rasch an ihre Grenzen stößt und überdies auf ein sehr zweifelhaftes Prinzip gegründet ist. Dieses Prinzip, häufig *Symmetrie-* oder *Indifferenzprinzip* genannt, ist notwendig, um festzustellen, ob die Ausfälle eines Zufallsversuchs gleichwahrscheinlich sind. Und zwar soll dies dann der Fall sein, wenn wir keinen Grund haben, einem der möglichen Ausfälle gegenüber den anderen den Vorzug zu geben.

Strehl (1974) weist auf Beispiele hin, die auch Schülern deutlich machen können, dass Gleichwahrscheinlichkeitsannahmen nichts Selbstverständliches sind. »Die Frage, ob eine solche Annahme im Einzelfall berechtigt ist, enthält bereits eine statistische Problemstellung und fordert zu einem Experiment heraus« (Strehl, S. 225). Ich möchte dies ergänzen und vorschlagen, anhand geeigneter Beispiele, wie sie etwa in Stegmüller (1973, S. 414 f) dargelegt sind, sogar die in gewissen Fällen zutage tretende logische Absurdität des Indifferenzprinzips vor Augen zu führen.

Limestheorie

Kaum ein Begründungsversuch hat sich so vielen Einwänden ausgesetzt gesehen wie die von R. von Mises entwickelte Limestheorie der Wahrscheinlichkeit.[3] Ihr Grundgedanke ist mit von Mises eigenen Worten der folgende: »Wahrscheinlichkeit eines Merkmals innerhalb eines Kollektivs heißt der Grenzwert, dem die relative Häufigkeit des Auftretens dieses Merkmals in der Beobachtungsfolge bei unbegrenzter Fortsetzung der Versuche sich nähert« (1972, S. 263). Ein sog. Regellosigkeitsaxiom soll garantieren, dass dieser Grenzwert ungeändert bleibt, »wenn man die Beobachtungsfolge einer beliebigen Stellenauswahl unterwirft« (S. 263).

Ein erster Einwand gegen die Limestheorie ist ihre Inkonsistenz [vgl. Freudenthal/Steiner (1966, S. 190)]. Man kann aber das Regellosigkeitsprinzip dadurch sinnvoll abschwächen, dass man anstelle der Invarianz be-

[3] Eine ausführliche Diskussion der verschiedenen Einwände findet man bei Stegmüller (1973, S. 27 ff)

züglich beliebiger Stellenauswahlen die Invarianz bezüglich berechenbarer (durch Gesetze beschreibbarer) Auswahlen fordert. Wie zuerst WALD (1937) und FELLER (1939) zeigten, wird so die Limestheorie widerspruchsfrei anwendbar. In jüngster Zeit hat sie C. P. SCHNORR erneut rehabilitiert. In seinem Buch *Zufälligkeit und Wahrscheinlichkeit*, liefert er einen verbesserten Aufbau der Theorie auf dem Begriff der Zufallsfolge, der »unserer Anschauung besser zugänglich« ist als der axiomatisch beschriebene Begriff der Gewissheit (vgl. 1971, S. 8).

Sicherlich spielt der Begriff der Zufallsfolge für experimentelles Arbeiten im Schulunterricht eine wichtige intuitive Rolle; doch kann der mathematische Gehalt der algorithmischen Limestheorie für die Didaktik nicht ausgewertet, ja kaum einmal Unterrichtsgegenstand der Lehrerausbildung werden.

Häufigkeitsinterpretation

Viele Anhänger dieser Interpretation verstehen sie als Abschwächung und Gegenposition zur Limestheorie. Die Limestheorie fußt ja auf der Konvergenz von Häufigkeitsfolgen. Dagegen hält man das Argument, dass eine solche Folge, z. B. für das Ereignis ›Zahl‹ beim Münzwurf, keineswegs mit logischer oder mathematischer Sicherheit gegen $1/2$ strebe. Vielmehr sei diese Sicherheit lediglich praktischer Art in dem Sinne, dass eine Abweichung der relativen Häufigkeit umso unwahrscheinlicher wird, je weiter vom Anfang entfernt die Stelle der Folge liegt, an der man sie beobachten will. Das ist in etwa der Inhalt des bekannten BERNOULLIschen Gesetzes der großen Zahlen.

Nach Auffassung von STEGMÜLLER (1973) ist dieser Einwand »für die Limestheorie tatsächlich tödlich«, er zeige, »daß diese Theorie praktische Sicherheit mit logischer Notwendigkeit verwechselt« (S. 37). Ohne auf dieses Argument näher einzugehen, möchte ich aber auch die Häufigkeitsinterpretation selbst kritisieren. Meine Kritik richtet sich vor allem dagegen, dass in einer Reihe von Standardlehrtexten, Schulbüchern und didaktischen Analysen der Wahrscheinlichkeitsrechnung das genannte ›schwache Gesetz der großen Zahlen‹ zur Rechtfertigung der These dient, zwischen theoretischer und relativer Häufigkeit bestehe ein inhaltlicher Zusammenhang.

Meine Kritik entwickle ich kurz anhand einer genaueren Betrachtung des BERNOULLIschen Satzes. Danach gilt für jedes positive ε

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}^*[\,|H_{n,A} - \mathsf{P}(A)| \geq \varepsilon\,] = 0.$$

Diese Behauptung beweist man auf der Basis der KOLMOGOROVschen Axiome. Dabei ist A irgendein Ereignis, $H_{n,A}$ die relative Häufigkeit von A in n-gliedriger Versuchsfolge, P das zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsmaß und P^* ein aus P konstruiertes Produktmaß, das diejenigen Ereignisse bewertet, die aus unendlichen Versuchsserien bestehen.

Bei der Deutung des BERNOULLIschen Satzes entsteht nun eine Schwierigkeit dadurch, dass man die schwindende Wahrscheinlichkeit für eine Abweichung der Größe $H_{n,A}$ von $\mathsf{P}(A)$ inhaltlich so aufzufassen hat, als wäre damit ein *praktisch immer seltener werdendes Ereignis* gemeint. Aber worauf gründet sich der Zusammenhang von (axiomatisch beschriebener) Wahrscheinlichkeit und praktischem Gewißheitsgrad? Das Gesetz der großen Zahlen kann jedenfalls keine Begründung dafür liefern. Es sagt darüber ja erst dann etwas aus, wenn die mit P^* formulierte Wahrscheinlichkeitsaussage *inhaltlich* verstanden werden darf, wenn also der fragliche Zusammenhang bereits bekannt ist. So kann eine Begründung nur noch in einer These oder Hypothese liegen, die unabhängig vom BERNOULLIschen Satz ist und die FREUDENTHAL so angibt: »Die mit der Wahrscheinlichkeitsklausel formulierten Aussagen unterscheiden sich von denen ohne Klausel nicht wesentlich« (1968, S. 133). Dazu beruft er sich (gleich anderen Autoren wie MORGENSTERN (1962, S. 8 ff) oder HEIGL/FEUERPFEIL (1975, S. 109 f)) auf eine Interpretationsregel, die gelegentlich nach COURNOT (1843) benannt wird. Danach tritt ein Ereignis mit sehr kleiner Wahrscheinlichkeit praktisch mit Sicherheit nicht ein.

Hierzu ist folgendes zu bemerken: In der Tat liefert eine solche Interpretationsregel nunmehr eine zirkelfreie Rechtfertigungsmöglichkeit für den BERNOULLIschen Satz und damit eine Verbindung von Theorie und Wirklichkeit. Aber wer sagt uns, dass die COURNOTsche Regel zu Recht angewendet wird? Wir wissen ja nicht einmal, wann eine wirkliche Anwendung überhaupt vorliegt, weil z. B. nicht präzisiert wird, wann eine Wahrscheinlichkeit »sehr klein« ist. Eine tiefergehende grundlagenkritische Behandlung der Regel kann ich an dieser Stelle nicht versuchen.[4] Soviel dürfte aber deutlich geworden sein, dass auch die Häufigkeitsinterpretation, die man gewöhnlich für den axiomatischen Aufbau beansprucht, auf zweifelhaften (zirkulären) Annahmen beruht. Und das kann ein Axiomatiker daraus lernen: Die Anwendung seiner Axiome setzt eine inhaltliche Vorstellung von Wahrscheinlichkeit voraus, und diese ist apriori in dem Sinne, dass sie durch die Axiome *nicht nachträglich* zu rechtfertigen ist.

Vorläufige (didaktische) Konsequenzen

Was bleibt nun nach so vielen problematischen Positionen an ersten Konsequenzen für den mathematischen Unterricht zu ziehen? Welches ist ein vertretbarer Aufbau für eine Propädeutik oder, auf fortgeschrittener Stufe, eine Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs? — Es mag paradox erscheinen, wenn ich für den Anfang dasjenige vorschlage, was sich bei der Erörterung der Begründungsfragen als einer der schwierigsten theoretischen Punkte herausgestellt hat: nämlich die Interpretationsregel der Häufigkeitsauffassung. Natürlich meine ich nicht eine Diskussion dieser Regel, sondern die *Erfahrung, dass sich Häufigkeitsfolgen auf die Dauer stabilisieren und dass Ereignisse mit kleiner relativer Häufigkeit bei weiteren Versuchen selten auftreten.* Es handelt sich hier lediglich um eine empirische Gesetzmäßigkeit, von der gewisse, wenn auch seltene Abweichungen möglich sind. Festigt sich diese Erfahrung im Umgang mit verschiedenen Zufallsexperimenten, so ist zugleich so etwas wie eine intuitive Grundlage für einen objektiven Wahrscheinlichkeitsbegriff geschaffen. Freilich liegen im Begriff des »Stabilisierens« gewisse Schwierigkeiten, auf die Freudenthal (1971/72) aufmerksam gemacht hat. Man kann hier nach Freudenthal aber Abhilfe schaffen durch Benutzung von Zufallsziffern oder durch Herausarbeiten entsprechender Streuungseigenschaften (bei Mittelwertbildung; siehe S. 487 und S. 489).

[4] Insbesondere übergehe ich auch die Erörterung der m. E. unhaltbaren Rechtfertigung, die Freudenthal in (1968, S. 133 f) gibt; vgl. auch van der Waerden (1951) und meine Arbeit über ›Idealisierungsprozesse‹ (*JMD*, 1980, S. 48 ff). — In jüngster Zeit haben Biehler und Steinbring (1978) versucht, dem Anwendungsproblem des Wahrscheinlichkeitsbegriffs mit Hilfe wissenschaftsgeschichtlicher sowie an J. Sneeds logischer Theoriendynamik angelehnter Überlegungen beizukommen.

Nebenbei möchte ich bemerken: Wie die vorangehenden Erörterungen gezeigt haben, wäre es wenig ratsam, Schülern gleich welchen Lernniveaus einzureden, die Wahrscheinlichkeitsrechnung suche nach einer Erklärung für die besagte Gesetzmäßigkeit. Das wäre irreführend, weil sich ja später herausstellt, dass die Anwendung der Theorie nur aufgrund des COURNOTschen Prinzips verständlich und dieses wiederum nur auf der Basis besagter Gesetzmäßigkeit plausibel wird. Die Gesetzmäßigkeit selbst bleibt nach wie vor ein Rätsel, eine *unerklärte Struktureigenschaft unserer Erfahrungswelt.*[5]

Der genannte propädeutische Ansatz hat neben der Festigung der intuitiven Grundlagen noch einen besonderen Vorzug. Er gestattet nämlich eine zweifache Weiterführung zum Wahrscheinlichkeitsbegriff, von denen die erste besonders für Schulkinder bis zur Sekundarstufe I und eine Koppelung von erster und zweiter besonders für die Sekundarstufe II sowie den Hochschulunterricht geeignet erscheinen.

Die erste Möglichkeit zur Weiterführung besteht darin, dass klassische Wahrscheinlichkeiten als *Schätzwerte* von Häufigkeitsfolgen auftreten. Damit wird einerseits der für den späteren Ausbau der Rechenregeln didaktisch wichtige Begriff der klassischen Wahrscheinlichkeit eingeführt. Andererseits erhält die Untersuchung der Gleichmöglichkeit von Ausfällen eine solide Erfahrungsbasis. An eine Anwendung und Kritik des Indifferenzprinzips ist erst in einem späteren Stadium zu denken.

Die zweite Möglichkeit zur Weiterführung eröffnet sich durch die Untersuchung der relativen Häufigkeit selbst. Auf bescheidenem Niveau liefert dies immerhin die Grundaxiome der Wahrscheinlichkeitstheorie in Form von Rechenregeln. Diese lassen sich dann durch Analogiebetrachtungen mit den Eigenschaften der klassischen Wahrscheinlichkeit in Beziehung setzen und weiter ausbauen.

Auf fortgeschrittener Stufe empfiehlt sich eine etwas strengere Variante hiervon. Deren Ausgangspunkt könnte die Frage sein: Wann genau lässt sich eine reellwertige Funktion H auf der Ereignisalgebra über einem diskreten Stichprobenraum Ω als Häufigkeitsfunktion bezüglich einer Ver-

[5] BIEHLER und STEINBRING haben später moniert, die Gesetzmäßigkeit der relativen Häufigkeiten sei nicht weniger und nicht mehr als Keplers Gesetze der Planetenbewegung eine unerklärte Struktureigenschaft. Ich habe diesen Einwand eingehender im Zusammenhang mit dem Stabilisierungsverhalten der relativen Häufigkeiten in meinen *Begriffsbestimmungen* (Logos-Verlag 2011, S. 181 ff) erörtert.

suchsserie der Länge n auffassen? Tatsächlich ist dies genau dann der Fall, wenn H die KOLMOGOROVschen Axiome erfüllt und überdies $n \cdot H(\{\omega\})$ für alle $\omega \in \Omega$ eine ganze Zahl ist. Da mit dem Gedanken begonnen wurde, Wahrscheinlichkeiten durch relative Häufigkeiten zu schätzen, liegt es nahe, die letzte Bedingung zu streichen: sie enthält ja eine starre Vorgabe über die Länge der zur Schätzung heranzuziehenden Versuchsserien [siehe dazu auch SCHREIBER (1980)]. Das geschilderte Vorgehen führt so zwanglos auch zum axiomatischen Aufbau. Er sollte allerdings nur so eingesetzt werden, dass bereits geläufige Tatsachen nun noch einmal deduktiv reproduziert werden. Unmittelbares Arbeiten im axiomatischen Rahmen kann erst nach längerer Gewöhnung an die dazu nötige Abstraktion gelingen. Frühestens dann ist auch der geeignete Zeitpunkt, auf die personalistische Begründung der Axiome einzugehen.

Damit ist den eingangs erwähnten Grundlagenpositionen ein didaktischer Standort zugewiesen. Es wird Aufgabe weiterer Untersuchungen und Erprobungen sein, die skizzierte Konzeption in ihren Einzelheiten auszuarbeiten. Dabei hat man im Auge zu behalten, dass der Ansatz *nur im Kontext von Anwendungen* möglich ist und fruchtbar werden kann; das Schätzen von relativen Häufigkeiten hat allein Sinn im Rahmen praktischer Zielsetzungen.

Bemerkungen über stochastische Unabhängigkeit

Der Begriff der (stochastischen) Unabhängigkeit ist der eigentliche Angelpunkt der ganzen Wahrscheinlichkeitslehre. Das gilt nicht allein für die axiomatische Beschreibung, bei der es im Unterschied zur allgemeinen Maßtheorie speziell um Maße mit Multiplikationssatz geht, sondern vor allem angesichts der Anwendung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs auf konkrete (physikalische) Zufallsexperimente. Zurecht nimmt HEITELE (1975) die Unabhängigkeit in seine Liste von fundamentalen stochastischen Ideen auf. Er betont dabei ihr Doppelgesicht: einerseits leichte Handhabung als Produktregel im mathematischen Modell, andererseits eine Neigung zu inkonsequenter Anwendung in alltäglichem Räsonieren (oft selbst bei einem Gelehrten wie D'ALEMBERT).[6]

[6] Die im Folgenden nur grob skizzierten Ideen sind mathematisch genauer ausgeführt in meiner Vorlesung *Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie* (Neuss 1974/75). Den zugehörigen Aus-

Sicherlich ist nun die Produktregel »leicht«, wenn man sie als bloße Rechenregel betrachtet. Es ist aber zu bedenken, dass ihre Einführung in den Wahrscheinlichkeitskalkül auf gänzlich nicht-trivialen und tiefliegenden theoretischen Annahmen beruht, und es sollte auch bewusst gemacht werden, dass diese Voraussetzungen sich überhaupt nicht von selbst verstehen. Gewöhnlich bezeichnet man den springenden Punkt bei unabhängigen Ereignissen als kausales Nicht-Zusammenhängen der zugehörigen Zufallsexperimente (z. B. bei Würfel- oder Urnenversuchen). Mit Hilfe dieser Intuition gelangt man dann (meist über die bedingte Wahrscheinlichkeit) weiter zur Produktregel für unabhängige Ereignisse [vgl. etwa FREUDENTHAL (1973, S. 544 f)]. Die Kausalitätsvorstellung fungiert dabei völlig *ad hoc*, was sich nur durch »naive Erfahrungen« in einem »realistischen Kontext« auffangen lässt; FREUDENTHAL verwirft deshalb didaktisch auch den »axiomatischen Anlauf« (S. 544). Eine Axiomatisierung des Unabhängigkeitsbegriffs hält er allenfalls dann für sinnvoll, »wenn die Schüler vorher unaxiomatisch gelernt haben, die stochastische Unabhängigkeit mittels der Gültigkeit des Multiplikationsgesetzes zu definieren« (S. 554). Dementsprechend sollte in dem Fall axiomatisch erklärt werden, dass Wahrscheinlichkeitsfelder unabhängig sind, wenn für sie die Produktregel gilt. Der Ausdruck ›unabhängig‹ bleibt dabei »ein undefinierter Grundbegriff wie die Punkte und Geraden der Geometrie« (S. 555).

Freilich zweifelt FREUDENTHAL (unmittelbar im Anschluss an diese Ausführungen) selbst, ob solches Vorgehen didaktisch geeignet und sachlich angemessen ist. Diese Skepsis möchte ich hier unterstreichen und durch die These ergänzen, dass in der Wahrscheinlichkeitstheorie (gleichgültig ob axiomatisch oder nicht) eine Ablösung des Unabhängigkeitsbegriffs von seinen inhaltlichen Grundlagen die fundamentale Rolle dieser Idee verdunkeln würde. Betrachten wir etwa zwei diskrete Zufallsversuche V_1, V_2 und zugehörige Wahrscheinlichkeitsfelder (Ω_i, P_i) $(i = 1, 2)$. Das aus diesen in üblicher Weise gebildete Produktfeld $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathsf{P})$ ist nun gerade so konstruiert, dass die von V_1 produzierten Ereignisse unabhängig sind von denen des Versuchs V_2. Genauer ist hier gemeint: unabhängig bezüglich P, denn für ein *andere*s Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\Omega_1 \times \Omega_2$ braucht natür-

zug findet der Leser in meinen *Didaktischen Schriften zur Elementarmathematik*, Logos-Verlag: Berlin 2014, 3-9.

lich *keine* Unabhängigkeit zu bestehen. Diese Relativität sollte aber nicht darüber hinwegtäuschen, dass man nur dann, wenn die Versuche V_1 und V_2 frei von wechselseitigen Beeinflussungen erscheinen, ein Wahrscheinlichkeitsmaß P mit Multiplikationssatz definiert:

$$\mathsf{P}(\tilde{A}_1 \cap \tilde{A}_2) = \mathsf{P}(\tilde{A}_1) \cdot \mathsf{P}(\tilde{A}_2). \tag{*}$$

Dabei sind $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2$ Ereignisse des aus V_1, V_2 zusammengesetzten Versuchs V, welche die jeweiligen Ereignisse der Einzelversuche, d. h. $A_1 \subseteq \Omega_1$ bzw. $A_2 \subseteq \Omega_2$, in V ›vertreten‹, was genauer bedeutet: $\tilde{A}_1 = A_1 \times \Omega_2$ und $\tilde{A}_2 = \Omega_1 \times \tilde{A}_2$. Nun ist (*) eine unmittelbare Konsequenz aus der Forderung

$$\mathsf{P}(A_1 \times A_2) = \mathsf{P}_1(A_1) \cdot \mathsf{P}_2(A_2), \tag{**}$$

die in der Tat durch genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\Omega_1 \times \Omega_2$ erfüllt wird. Überlegen wir, was *inhaltlich* hinter (**) steht! Wir führen den Versuch V durch und interessieren uns für das Ereignis, dass erst A_1 und dann A_2 eintritt. Es macht keine Schwierigkeiten, $\mathsf{P}_1(A_1)$ mit der Wahrscheinlichkeit von A_1 innerhalb von V zu identifizieren. Anschließend bleibt:

$$\begin{aligned}&\text{Wahrscheinlichkeit}(A_1 \times A_2) = \\ &\mathsf{P}_1(A_1) \cdot \text{Wahrscheinlichkeit}(A_2 \text{ in } V \text{ unter der Bedingung } A_1),\end{aligned}$$

wir müssen also den zweiten Faktor mit $\mathsf{P}_2(A_2)$ *identifizieren*. Im Unterschied zur ersten Identifikation tritt hier A_1 als Bedingung auf, wenn auch intuitiv als eine Bedingung, welche die Durchführung von V_2 nicht beeinflusst. Richter (1952, S. 134 ff) hat diese zweite Identifikation genauer untersucht und kommt zu dem Ergebnis, *dass sie sich nicht innerhalb des maßtheoretischen Rahmens begründen lässt*. Vielmehr wird (**) gerade in den Fällen gefordert, wo V_1 und V_2 in V »eine Verbindung eingehen, die bei physikalischen Versuchen der Vorstellung der physikalischen Abgeschlossenheit der Einzelversuche entspricht« (S. 135). Der Begriff der physikalischen Abgeschlossenheit ist dabei nicht aus der Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeit herauszunehmen, wenn man nicht angesichts der Annahme von (*) und (**) eine Erklärung schuldig bleiben will [siehe Richter, S. 136].

Die vorangehenden Überlegungen spitzen sich darauf zu, die Wahrscheinlichkeit unter einer Bedingung in einer sinnvollen Weise zu interpretieren durch den Begriff der physikalischen Abgeschlossenheit oder eine dazu äquivalente Vorstellung. Das tut vor allem dann not, wenn man gar nicht mehrere Experimente kombiniert, sondern von vornherein die Ereignisse eines einzigen Feldes betrachtet. Sei etwa Z_n das Ereignis, dass beim Würfelwurf eine durch n teilbare Zahl erscheint. Wegen

$$\text{Wahrscheinlichkeit}(Z_2 \mid Z_3) = \text{Wahrscheinlichkeit}(Z_2) = \frac{1}{2}$$

sind Z_2 und Z_3 voneinander unabhängig, obwohl das Eintreten des einen das Eintreten des anderen nach sich ziehen kann, wobei dieses ›nach‹ logisch und nicht zeitlich zu verstehen ist. Was hier also in die Irre führen könnte, ist gerade die maßgebliche Intuition für Unabhängigkeit beim mehrstufigen Versuch. Ich zweifle daher, ob eine gelegentlich vorgeschlagene künstliche Stufung des Experiments die Schwierigkeit beheben kann. Vielmehr bedarf es einer anderen Deutung der bedingten Wahrscheinlichkeit als Wahrscheinlichkeit von Z_2 in einem mit Z_3 ›bedingten‹ Experiment. In diesem tritt ein Ereignis genau dann ein, wenn es in derjenigen Wiederholung eintritt, in der zuerst Z_3 vorkommt.[7] Entscheidend ist in diesem Zusammenhang die *stochastische Natur* der damit formulierbaren Unabhängigkeit. So bleibt im Würfelbeispiel durch das Einführen der Bedingung Z_3 das Feld zwar nicht erhalten, im Sinne des zugrunde liegenden (klassischen) Wahrscheinlichkeitsmaßes schrumpft es in Bezug auf Z_2 aber gleichsam proportional zusammen (der Anteil $2, 4, 6$ geht über in 6, der Rest $1, 3, 5$ in 3). In mehrstufigen Versuchen (mit physikalischer Abgeschlossenheit) hingegen wird durch ein bestimmtes Teilereignis keine ›Schrumpfung‹ anderer Teilfelder bewirkt; die einzelnen Felder bleiben voll erhalten. Um daher *diese Invarianz als stochastische Unabhängigkeit* formulieren zu können, braucht man (*) als Postulat an ein dazu zu konstruierendes Produktmaß, und damit auch (**). Die Rechtfertigung von (**) verlangt dann gerade die oben erwähnte zweite Identifikation der Wahrscheinlichkeit von A_2 unter der Bedingung von A_1 mit der (unbedingten) Wahrscheinlichkeit von A_2 ($= \mathsf{P}_2(A_2)$).

[7] Bei Dinges (1978) werden beide Möglichkeiten erörtert, außerdem eine personalistische und eine frequentistische Interpretation der bedingten Wahrscheinlichkeit.

Literatur

1. Biehler, R. / Steinbring, H.: Bernoullis Theorem – Eine exemplarische Analyse des Verhältnisses der Wahrscheinlichkeitstheorie zu ihren Anwendungen. Vortrag auf der 13. Bundestagung für Didaktik der Mathematik, Freiburg 1979.
2. Borel, E.: *Valeur pratique et philosophie des probabilités.* Paris 1939.
3. Carnap, R.: *Logical foundations of probability.* Chicago 1950.
4. Cournot, A.: *Exposition de la théorie des chances et des probabilités.* Paris 1843.
5. Czuber, E.: *Die philosophischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Leipzig und Berlin 1923.
6. Dinges, H.: Schwierigkeiten mit der Bayesschen Regel. *Math.-Physik. Semesterber.* 25 (1978), 113-156.
7. Engel, A.: Propädeutische Wahrscheinlichkeitstheorie. *Der Mathematikunterricht* 12/4 (1966), 5-20.
8. Feller, W.: Über die Existenz sogenannter Kollektive. *Fund. Math.* 32 (1939), 87-96.
9. Feller, W.: *An Introduction to Probability Theory and Its Applications.* Vol. I, 3rd ed., New York/London/Sydney 1968.
10. Finetti, B. de: La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives. *Ann. de l'Inst. H. Poincaré* 7 (1937), engl. Übers. in: Kyburg, H. E./Smokler, H. E. (eds.): *Studies in Subjective Probability*, New York 1964, 93-158.
11. Finsler, P.: Über die mathematische Wahrscheinlichkeit. *Elem. d. Math.* 2 (1947), 108-114.
12. Freudenthal, H.: *Wahrscheinlichkeit und Statistik*, 2. verb. Aufl., München 1968.
13. Freudenthal, H.: The ›empirical law of large numbers‹ or ›the stability of frequencies‹. *Ed. Stud. Math.* 4 (1971/72), 484-490.
14. Freudenthal, H.: *Mathematik als pädagogische Aufgabe*, Bd. 2, Stuttgart 1973.
15. Freudenthal, H. / Steiner, H. G.: Aus der Geschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie und der mathematischen Statistik. In: Behnke/Bertram/Sauer (Hrsg.): *Grundzüge der Mathematik IV*, Göttingen 1966, 149-195.
16. Heigl, F. / Feuerpfeil, J.: *Stochastik. Ein Lehr- und Arbeitsbuch (Leistungskurs)*, München 1975.
17. Heitele, D.: An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Ed. Stud. Math.* 6 (1975), 187-205.
18. Heitele, D.: Fragmente zu einer Geschichte der Wahrscheinlichkeitsdidaktik

(insbesondere des Primarbereiches). *Didaktik d. Math.* 4 (1977), 296-306.
19. Hermes, H.: Über eine logische Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie. *Math.-Phys. Semesterber.* 5 (1957), 214-224.
20. Ineichen, R.: Über die Grundlagen und den Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung . *Der Mathematikunterricht* 6/3 (1960), 7-15.
21. Keynes, J. M.: *A treatise on probability*. London, New York 1921, 3. Aufl. 1950. Dt. Übers.: *Über Wahrscheinlichkeit*, Leipzig 1926.
22. Kolmogorov, A. N.: *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 2, Berlin 1933.
23. Kutschera, F. von: *Wissenschaftstheorie I*, München 1972.
24. Mises, R. von: *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit*, 4. Aufl. durchges. v. H. Geiringer, Wien/New York 1972.
25. Morgenstern, D.: Der Aufgabenbereich von Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischer Statistik. *Der Mathematikunterricht* 8/1 (1962), 5-15.
26. Oberschelp, W.: Die Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie. *Math.-Physik. Semesterber.* 12 (1965), 37-61.
27. Ramsey, F. P.: *The Foundations of Mathematics, and Other Logical Essays*, London/New York 1931.
28. Richter, H.: Zur Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie, Teil I. *Math. Ann.* 125 (1952), 129-139.
29. Savage, L. J.: *The Foundations of Statistics*, New York 1954.
30. Schnorr, C. P.: *Zufälligkeit und Wahrscheinlichkeit. Eine algorithmische Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie.* Berlin/Heidelberg/New York 1971.
31. Schreiber, A.: Idealisierungsprozesse – ihr logisches Verständnis und ihre didaktische Funktion. *Journ. f. Mathematik-Didaktik* 1 (1980), 42-61.
32. Stegmüller, W.: *Personelle und Statistische Wahrscheinlichkeit*, Berlin/Heidelberg/New York 1973.
33. Steiner, H. G.: Elementare Logik und Wahrscheinlichkeitstheorie. *Der Mathematikunterricht* 8/1 (1962), 16-38.
34. Strehl, R.: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und elementare statistische Anwendungen*, Freiburg im Breisgau 1974.
35. Waerden, B. L. van der: Der Begriff der Wahrscheinlichkeit. *Studium Generale* 4 (1951), 65-68.
36. Wald, A.: Über die Widerspruchsfreiheit des Kollektivbegriffes. *Ergebnisse eines math. Kolloquiums*, Nr. 8, Wien 1937, 38-72.
37. Winter, H.: Erfahrungen zur Stochastik in der Grundschule (Klasse 1-6). *Didaktik d. Math.* 1 (1976), 22-37.

Auswertung statistischer Daten am didaktischen Beispiel[1]

In seinem einführenden Lehrbuch *Wahrscheinlichkeit und Statistik* [Oldenbourg: 2., verb. Auflage, München 1968] präsentiert H. Freudenthal die folgende Aufgabe. Nach einer schwedischen Statistik aus dem 19. Jahrhundert war die Sterblichkeit unter Männern nach Altersklassen und Familienstand (in Promille und pro Jahr):

Alter	ledig	verheiratet	insgesamt
22-26	6,70	3,80	6,13
27-31	7,80	4,19	5,89
32-36	8,63	4,86	5,88

Man sieht: Die Sterblichkeit nimmt sowohl bei den Junggesellen wie bei den Ehemännern mit dem Alter zu, aber im Ganzen nimmt sie ab. Wie ist das möglich?

Der Wertverlauf in der Spalte ›insgesamt‹ erscheint vielleicht auf den ersten Blick paradox; er wird aber nachvollziehbar, wenn wir die Form seiner Abhängigkeit von den links von ihm stehenden Spalten etwas näher betrachten. Insofern bietet diese Aufgabe ein ebenso einfaches wie instruktives Beispiel für den explorativen Umgang mit statistischen Daten. Diese Daten sind hier nichts als Promilleanteile eines Merkmals innerhalb bestimmter Gesamtheiten.

Wir bezeichnen die variablen Anzahlen der ledigen und der verheirateten Männer in einer Altersklasse mit L bzw. V. Dann gilt für die Anteile α, β der Verstorbenen unter den ledigen und den verheirateten Männern die Bilanzgleichung

$$\frac{\alpha L}{1000} + \frac{\beta V}{1000} = \frac{\gamma(L+V)}{1000},$$

worin γ den Promilleanteil der insgesamt in der betreffenden Altersklasse verstorbenen Männer darstellt. Offensichtlich lässt sich γ als gewichtetes

[1] Unveröffentlichter Auszug aus meiner Vorlesung *Mittelwerte*, Universität Flensburg, Sommersemester 2004.

Mittel aus α und β schreiben:

$$\gamma = \frac{L}{L+V} \cdot \alpha + \frac{V}{L+V} \cdot \beta. \tag{1}$$

Allerdings sind die absoluten Größen L und V nicht bekannt und aus den Daten der Tabelle auch nicht zu gewinnen. Durch Trennen der Variablen L, V erhält man aber aus den obigen Gleichungen $(\alpha - \gamma)L = (\gamma - \beta)V$ und damit für das Verhältnis der Anzahl verheirateter zur Anzahl lediger Männer:

$$Q := \frac{V}{L} = \frac{\alpha - \gamma}{\gamma - \beta}. \tag{2}$$

Für jede der drei Altersklassen lässt sich der zugehörige Quotient Q aus den Werten der entsprechenden Tabellenzeile berechnen:

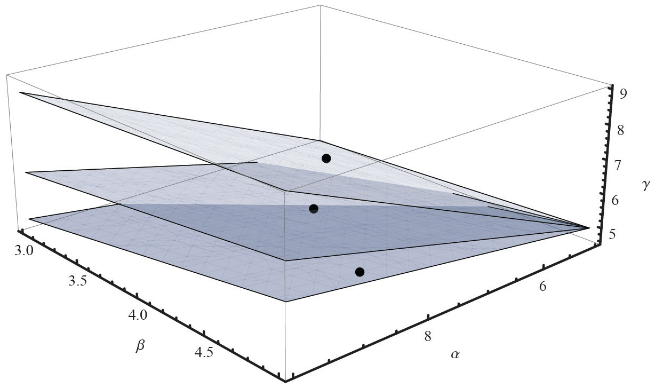
$$\begin{aligned}
Q_{(22-26)} &= \frac{6{,}70 - 6{,}13}{6{,}13 - 3{,}80} \approx 0{,}244635 \\
Q_{(27-31)} &= \frac{7{,}80 - 5{,}89}{5{,}89 - 4{,}19} \approx 1{,}12353 \\
Q_{(32-36)} &= \frac{8{,}63 - 5{,}88}{5{,}88 - 4{,}86} \approx 2{,}69608
\end{aligned}$$

Diese Werte für Q werden kaum überraschen, denn sie geben nur die Tatsache wieder, dass mit zunehmendem Alter das Verhältnis der Anzahl verheirateter Männer zur Anzahl ihrer ledigen Geschlechtsgenossen ebenfalls zunimmt. Damit beginnt sich bereits eine Erklärung für den vermeintlich paradoxen Wertverlauf der dritten Tabellenspalte abzuzeichnen.

Um hier weiterzukommen, eliminieren wir in Gleichung (1) die Variablen L und V, indem wir Zähler und Nenner des Koeffizienten von α durch L, desgleichen Zähler und Nenner des Koeffizienten von β durch V dividieren. Es ergibt sich so

$$\gamma = \frac{1}{1+Q} \cdot \alpha + \frac{Q}{1+Q} \cdot \beta. \tag{3}$$

Für den Augenblick möge die zwischen Q und α, β, γ bestehende Abhängigkeit außer Betracht bleiben; (3) ist dann zu vorgegebenem Q die Gleichung einer Ebene im (α, β, γ)-Koordinatensystem. Man überzeugt sich leicht davon, dass alle diese (von Q abhängigen) Ebenen ein Büschel mit der Schnittgeraden $\gamma = \beta = \alpha$ bilden. Den drei Altersklassen entsprechen drei Ebenen dieses Büschels; ferner gehört zu jedem der drei Wertetripel (α, β, γ) in den Zeilen der Tabelle jeweils ein Punkt auf genau einer dieser Ebenen. Die Punkte liegen sämtlich im Quader $[5, 10] \times [3, 5] \times [5, 9]$ und damit auf getrennt übereinander liegenden Ebenenstücken:



Je höher die Altersklasse, desto tiefer ist das entsprechende Ebenenstück um die Schnittgerade nach unten gedreht. Auf diese Weise ist es möglich, den γ-Wert zu erniedrigen, während zugleich α und β sich vergrößern.

Vergleichbarkeit quasi-arithmetischer Mittel am Beispiel von Potenz- und Exponential-Mittelwerten[1]

Es wird eine iterativ erzeugte isotone Familie quasi-arithmetischer Mittelwerte (Exponential-Mittel) eingeführt und ihre Vergleichbarkeit mit den Hölderschen Potenz-Mittelwerten untersucht. Dies geschieht mit Hilfe des grundlegenden Kriteriums, das von Hardy, Littlewood und Pólya in ihrer klassischen Monografie

[1] Geschrieben 2015-2017; in revidierter Fassung veröffentlicht in: *Math. Semesterber.* 65/2 (2018), 171-182. DOI.org/10.1007/s00591-017-0207-2.

über Ungleichungen aufgestellt wurde. Speziell für den Vergleich mit Potenz-Mittelwerten lässt sich das Kriterium durch eine Grenzzahlen-Methode wirksam ergänzen; diese knüpft an eine Idee von Páles an und wird hier für quasi-arithmetische ϕ-Mittelwerte mit zweimal differenzierbarem ϕ ausgearbeitet.

1. Historisches und grundlegende Begriffe

Mittelbildungen waren schon in der pythagoräischen Musiklehre und Arithmetik Gegenstand theoretischer Untersuchungen. Den Grundton, den wir bei einer schwingenden Saite (normierter Länge $x = 1$) hören, klingt eine Oktave höher, wenn sie im Verhältnis $y = 2 : 1$ (der ganzen Saite zum halb so langen Abschnitt) geteilt wird. Dem arithmetischen Mittel $\mathsf{A}(x, y) = (x+y) : 2 = 3 : 2$ entspricht dann die Quinte zum Grundton und dem durch die Proportion $x : \mathsf{A}(x, y) = z : y$ bestimmten harmonischen Mittel $z = \mathsf{H}(x, y) = 2 : (\frac{1}{x} + \frac{1}{y}) = 4 : 3$ die Quarte.

Auch bei der Berechnung der Quadratwurzel (nach Heron) spielen diese beiden Mittelwerte eine Schlüsselrolle. Ein Rechteck mit den Seiten x, y wird dabei schrittweise einem flächengleichen Quadrat (mit der Seite z) angenähert; man hat dazu in der Gleichung $xy = \mathsf{A}(x, y)\mathsf{H}(x, y)$ lediglich x, y durch neue Seiten $x' = \mathsf{A}(x, y)$, $y' = \mathsf{H}(x, y)$ zu ersetzen und das solange zu wiederholen, bis sich die Längen der neuen Seiten hinreichend wenig von einander (und damit auch von z) unterscheiden. Die auf solche Weise angenäherte Gleichung $xy = z^2$ gibt Anlass zur Bildung des geometrischen Mittels $z = \mathsf{G}(x, y) = \sqrt{xy}$. Pappos von Alexandria (ca. 300 n. Chr.) hat die drei Mittelwerte in einer einzigen geometrischen Konstruktion dargestellt, aus der die berühmten Ungleichungen $\mathsf{H} \leq \mathsf{G} \leq \mathsf{A}$ hervorgehen (vgl. etwa [4], S. 137 f).

Das harmonische Mittel lässt sich auf einfache Weise durch das arithmetische Mittel ausdrücken: $\mathsf{H}(x, y) = \mathsf{A}(x^{-1}, y^{-1})^{-1}$. Eine tiefer dringende Betrachtung wird daher durch die Frage angeregt, ob eine Art von Verwandtschaftsbeziehung zwischen den Mittelwerten besteht. In der Tat führt hier der Ansatz zum Ziel, eine Familie von Potenz-Mittelwerten $\mathsf{P}_r(x, y) := \mathsf{A}(x^r, y^r)^{\frac{1}{r}}$ mit reellem Parameter $r \neq 0$ zu definieren. Man hat dann sofort $\mathsf{H} = \mathsf{P}_{-1}$ und $\mathsf{A} = \mathsf{P}_1$. Aber auch das geometrische Mittel kann dieser Familie eingegliedert werden, wenn wir den Grenzfall $r \to 0$

hinzunehmen. Dazu betrachten wir

$$\log \mathsf{P}_r(x,y) = \frac{1}{r} L(r), \text{ wobei } \quad L(r) := \log \frac{x^r + y^r}{2},$$

und werten den beim Grenzübergang $r \to 0$ unbestimmten Ausdruck $(1/r) \cdot L(r)$ mit der Regel von de l'Hospital aus. Es gilt $L'(r)|_{r=0} = (\log x + \log y)/2$ und damit

$$\lim_{r \to 0} \mathsf{P}_r(x,y) = \exp\left(\frac{\log x + \log y}{2}\right) = \sqrt{xy} = \mathsf{G}(x,y).$$

Das erst später in Erscheinung tretende quadratische Mittel $\mathsf{Q} := \mathsf{P}_2$ ist ein weiterer, naheliegender Sonderfall unter den Potenz-Mittelwerten. Auch Q besitzt zahlreiche inner- und außermathematische Anwendungen.

Einer weitergehenden Verallgemeinerung steht nun nichts mehr im Wege. Zunächst können die Mittelwerte aufgrund ihrer Symmetrie problemlos auf $N \geq 2$ Argumente $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}_+$ ausgedehnt werden ($\mathbb{R}_+$ = Menge der positiven reellen Zahlen). So lautet etwa das allgemeine arithmetische Mittel:

$$\mathsf{A}(x_1, \ldots, x_N) := \frac{x_1 + \cdots + x_N}{N}.$$

Im nächsten, wesentlichen Generalisierungschritt wird die an den Argumenten von P_r vorgenommene Operation $x_j \mapsto x_j^r$ durch eine stetige, streng monotone Funktion $\phi : I \to \mathbb{R}$ ersetzt ($I \subseteq \mathbb{R}_+$ ein nicht-ausgeartetes Intervall). Damit wird dann ein *quasi-arithmetischer ϕ-Mittelwert* $\mathsf{A}^\phi : I^N \to I$ folgendermaßen definiert (vgl. [2], Kapitel 4):

$$\mathsf{A}^\phi(x_1, \ldots, x_N) := \phi^{-1}\mathsf{A}(\phi(x_1), \ldots, \phi(x_N)). \tag{1}$$

Die klassischen Mittelwerte sind einfache Spezialfälle von (1): A für $\phi(u) = u$, H für $\phi(u) = 1/u$, G für $\phi(u) = \log u$ sowie Q für $\phi(u) = u^2$.

Die quasi-arithmetischen Mittelwerte $M = \mathsf{A}^\phi$ lassen sich durch Eigenschaften charakterisieren, die von Kolmogorov [8], Nagumo [9] und de Finetti [3] um 1930 unabhängig voneinander entdeckt wurden:

(i) M ist stetig, symmetrisch und in jedem Argument streng monoton wachsend;

(ii) M ist reflexiv, d. h. es gilt $M(a,\ldots,a) = a$ für alle $a \in I$;

(iii) M ist assoziativ, d. h. für alle $x_1,\ldots,x_N \in I$ und für jedes $p \le N$ folgt mit $m = M(x_1,\ldots,x_p)$ stets $M(m,\ldots,m,x_{p+1},\ldots,x_N) = M(x_1,\ldots,x_N)$.

Aus (i) und (ii) ergibt sich sofort die Internalität von M, die besagt, dass ein Mittelwert immer zwischen dem kleinsten und größten seiner Argumente liegt, d. h. es gilt für alle $x_1,\ldots,x_N \in I$

$$\min(x_1,\ldots,x_N) \le M(x_1,\ldots,x_N) \le \max(x_1,\ldots,x_N). \tag{2}$$

Die oben bereits betrachteten *Hölder-* oder *Potenz-Mittelwerte* P_r lassen sich nun als quasi-arithmetische π_r-Mittelwerte ($r \in \mathbb{R}$) auffassen, indem definiert wird:

$$\pi_r(u) = \begin{cases} u^r, & \text{falls } r \neq 0, \\ \log u, & \text{falls } r = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Es gilt dann für $r \neq 0$

$$\mathsf{P}_r(x_1,\ldots,x_N) = \mathsf{A}^{\pi_r}(x_1,\ldots,x_N) = \left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j^r\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Die Definition von π_r im Fall $r = 0$ liefert unmittelbar $\mathsf{P}_0 = \mathsf{A}^{\log} = \mathsf{G}$ und ist durch die eingangs gezeigte Tatsache motiviert, dass $\mathsf{P}_r \to \mathsf{G}$ für $r \to 0$. Als quasi-arithmetisches Mittel ist G dann nicht bloß Grenzwert von Potenz-Mittelwerten, sondern selbst ein Potenz-Mittelwert. Im Unterschied dazu liefern die Grenzübergänge $\mathsf{P}_r \to \min$ ($r \to -\infty$) und $\mathsf{P}_r \to \max$ ($r \to \infty$) allerdings nicht einmal quasi-arithmetische Mittelwerte. Die Schreibweisen $\mathsf{P}_{-\infty} = \min$, $\mathsf{P}_{\infty} = \max$ sind daher lediglich als symbolische Vereinbarungen zu verstehen (siehe [6], S. 15).

Zwei Funktionen F, G mit gemeinsamem Definitionsgebiet $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^N$ heißen dort *vergleichbar*, wenn $F(\underline{x}) \le G(\underline{x})$ (für alle $\underline{x} \in \mathcal{D}$) oder $F(\underline{x}) \ge G(\underline{x})$ (für alle $\underline{x} \in \mathcal{D}$) gilt.

Aus der Jensenschen Ungleichung ergibt sich, dass für konvexes $\phi : I \to J \subseteq \mathbb{R}_+$ die Mittelwerte $\mathsf{A}, \mathsf{A}^{\phi}$ auf ganz $(I \cap J)^N$ vergleichbar sind.

Dabei gilt $\mathsf{A} \leq \mathsf{A}^\phi$, wenn ϕ eine wachsende Funktion ist, hingegen $\mathsf{A} \geq \mathsf{A}^\phi$, wenn ϕ eine fallende Funktion ist (bei konkavem ϕ entsprechend umgekehrt). Hieraus lässt sich ein einfaches Vergleichbarkeitskriterium gewinnen (vgl. [6], Thm. 85 und [2], S. 276):

Lemma 1.

$A^\phi \leq A^\psi$ ist äquivalent mit folgender Aussage: Ist ψ wachsend (fallend), dann ist die zusammengesetzte Abbildung $\psi \circ \phi^{-1}$ konvex (konkav) auf $\phi[I]$.

Die bekannte Isotonie-Eigenschaft der Potenz-Mittelwerte

$$r \leq s \Longrightarrow \mathsf{P}_r(x_1, \ldots, x_N) \leq \mathsf{P}_s(x_1, \ldots, x_N) \tag{4}$$

für beliebige $r, s \in \mathbb{R}$ lässt sich mit diesem Kriterium leicht verifizieren.

Als Beispiel möge hier etwa der Fall $r > 0$ genügen. Dann sind π_r und π_s wachsende Funktionen auf $I = \mathbb{R}_+$. Dasselbe gilt für die Funktion $\pi_{s/r} = \pi_s \circ \pi_r^{-1}$, die wegen $s/r \geq 1$ zudem konvex ist. Lemma 1 liefert dann $\mathsf{P}_r = \mathsf{A}^{\pi_r} \leq \mathsf{A}^{\pi_s} = \mathsf{P}_s$. – Es gilt auch die strenge Isotonie, d. h. in (4) kann $<$ statt $\leq$ stehen (bei nicht sämtlich übereinstimmenden Argumenten $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}_+$). Wegen $s/r > 1$ ist nämlich $\pi_{s/r}$ streng konvex, was $\mathsf{A}^{\pi_r} < \mathsf{A}^{\pi_s}$ zur Folge hat.

Aus (4) ergibt sich sofort die bekannte Ungleichungskette

$$\mathsf{H} = \mathsf{P}_{-1} \leq \mathsf{P}_0 = \mathsf{G} \leq \mathsf{A} = \mathsf{P}_1 \leq \mathsf{P}_2 = \mathsf{Q}.$$

2. Vergleichbarkeit mit den Potenz-Mittelwerten

Im Folgenden soll untersucht werden, wann ein gegebener quasi-arithmetischer Mittelwert A^ϕ und ein Potenz-Mittelwert P_r vergleichbar sind. Im Hinblick auf die Isotonie der P_r ist es eine sinnvolle und interessante Verschärfung der Frage, jeweils nach einem r zu suchen, das sich in den Ungleichungen $\mathsf{P}_r \leq \mathsf{A}^\phi$ oder $\mathsf{A}^\phi \leq \mathsf{P}_r$ nicht mehr vergrößern bzw. verkleinern lässt. Páles benutzt diese Idee in [10] und [11], wo es (unter anderem) darum geht, die Ungleichungen $\mathsf{A}^\phi \leq \mathsf{P}_r$ und $\mathsf{P}_r \leq \mathsf{A}^\psi$ zugleich für ein reelles r zu erfüllen.

Für alles Weitere werde $\phi : I \to \mathbb{R}$ als streng monoton wachsende Funktion vorausgesetzt. $\overline{\mathbb{R}}$ bezeichne die um $-\infty$ und $+\infty$ erweiterte (kompaktifizierte) Menge der reellen Zahlen. Damit definieren wir:

$$
\begin{aligned}
&R_<(\phi) := \left\{r \in \overline{\mathbb{R}} \mid \mathsf{P}_r \le \mathsf{A}^\phi\right\},\\
&R_>(\phi) := \left\{r \in \overline{\mathbb{R}} \mid \mathsf{P}_r \ge \mathsf{A}^\phi\right\} \quad \text{sowie}\\
&r_*(\phi) := \sup R_<(\phi) \quad \text{und} \quad r^*(\phi) := \inf R_>(\phi).
\end{aligned}
$$

Im folgenden Satz sind grundlegende Eigenschaften der Grenzzahlen $r_*(\phi)$ und $r^*(\phi)$ zusammengestellt.

Proposition 1.

(i) $r_*(\phi) < \infty \quad \text{und} \quad r^*(\phi) > -\infty$

(ii) $r_*(\phi) \le r^*(\phi)$

(iii) $R_<(\phi) = [-\infty, r_*(\phi)]$

(iv) $R_>(\phi) = [r^*(\phi), \infty]$

(v) ϕ *konvex* $\iff 1 \le r_*(\phi)$

(vi) ϕ *konkav* $\iff r_*(\phi) \le 1$

(vii) ϕ *linear* $\iff r_*(\phi) = 1$

Beweis. Zu (i): Wir zeigen den ersten Teil der Aussage und nehmen dazu indirekt $r_*(\phi) = \infty$ an. Dann existiert eine Folge (r_k) mit $\mathsf{P}_{r_k} \le \mathsf{A}^\phi$ für alle $k \ge 1$ und $r_k \to \infty$ für $k \to \infty$. Hieraus folgt $\max = \lim_{k\to\infty} \mathsf{P}_{r_k} \le \mathsf{A}^\phi$. Da andererseits nach (2) $\mathsf{A}^\phi \le \max$ gilt, hat man $\mathsf{A}^\phi = \max$, was der Tatsache widerspricht, dass $\max$ kein quasi-arithmetischer Mittelwert ist. Der zweite Teil von (i) ergibt sich in völlig analoger Weise.

Zu (ii): Seien $r \in R_<(\phi)$, $s \in R_>(\phi)$ beliebig. Nach Definition gilt dann $\mathsf{P}_r \le \mathsf{A}^\phi \le \mathsf{P}_s$. Aufgrund der Isotonie der Potenz-Mittelwerte kann hier nur $r \le s$ sein. Die Ungleichung bleibt erhalten, wenn man auf der linken Seite zum Supremum und auf der rechten Seite zum Infimum übergeht.

Zu (iii): Für beliebiges $r \in R_<(\phi)$ gilt $r \le r_*(\phi)$ und somit $r \in [-\infty, r_*(\phi)]$. Sei nun umgekehrt $-\infty \le r \le r_*(\phi)$. Im Fall $r = -\infty$ erhalten wir aufgrund von (2): $\mathsf{P}_{-\infty} = \min \le \mathsf{A}^\phi$, also $r \in R_<(\phi)$. Im Fall

$r > -\infty$ ergibt sich aus der Isotonie der Potenz-Mittelwerte: $\mathsf{P}_r \leq \mathsf{P}_{r_*(\phi)}$. Wegen $\mathsf{P}_{r_*(\phi)} \leq \mathsf{A}^\phi$ gilt dann $\mathsf{P}_r \leq \mathsf{A}^\phi$, d. h. $r \in R_<(\phi)$.

Zu (iv): Analog zu (iii).

Zu (v): ϕ ist eine wachsende Funktion; daher ist die Konvexität von ϕ gleichbedeutend mit $(\mathsf{P}_1 =)\mathsf{A} \leq \mathsf{A}^\phi$, das heißt nach (iii): $1 \in R_<(\phi) = [-\infty, r_*(\phi)]$, woraus das Behauptete unmittelbar folgt.

Zu (vi): Analog zu (v).

Zu (vii): Unmittelbar aus (v) und (vi). $\Diamond$

Setzt man zweimalige Differenzierbarkeit von ϕ voraus, so gewinnt man eine genauere Aussage über den Aufbau der Grenzzahlen $r_*(\phi)$ und $r^*(\phi)$. Auskunft darüber gibt das folgende

Lemma 2.
Ist $\phi : I \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und zweimal differenzierbar im ganzen Intervall I, dann gilt:

$$\text{(i)} \qquad r_*(\phi) = \inf_{x \in I} \left(1 + x\frac{\phi''(x)}{\phi'(x)}\right),$$

$$\text{(ii)} \qquad r^*(\phi) = \sup_{x \in I} \left(1 + x\frac{\phi''(x)}{\phi'(x)}\right).$$

Beweis. Zu beliebiger reeller Zahl $r \neq 0$ definieren wir $\phi_r := \phi \circ \pi_r^{-1}$ und $J_r := \pi_r[I]$; es gilt also $\phi_r(u) = \phi(u^{\frac{1}{r}})$ für alle $u \in J_r$. Lemma 1 zufolge ist $\mathsf{P}_r \leq \mathsf{A}^\phi$ genau dann der Fall, wenn ϕ_r auf dem Intervall J_r konvex ist. Somit erhalten wir für alle $u \in J_r$

$$0 \leq \phi_r''(u) = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r} - 1\right) u^{-2+\frac{1}{r}} \phi'(u^{\frac{1}{r}}) + \frac{1}{r^2} \cdot u^{-2+\frac{2}{r}} \phi''(u^{\frac{1}{r}}).$$

Nach wenigen Umformungen ergibt sich hieraus die gleichwertige, für alle $x \in I$ gültige Bedingung

$$(r-1)\phi'(x) \leq x\phi''(x). \tag{5}$$

Hierbei wurde berücksichtigt, dass $u \in J_r$ sich eindeutig in der Form $u = x^r$ mit $x \in I$ schreiben lässt. Aufgrund von $\phi'(x) > 0$ $(x \in I)$ gewinnen wir aus (5) die Ungleichung

$$r \leq 1 + x\frac{\phi''(x)}{\phi'(x)} \qquad (x \in I). \tag{6}$$

Die größte der unteren Schranken für den Ausdruck rechterhand ist dann gerade $r_*(\phi)$, womit Behauptung (i) gezeigt ist. — (ii) ergibt sich in völlig analoger Weise durch Diskussion der Ungleichung $\mathsf{A}^\phi \leq \mathsf{P}_r$, die nach Lemma 1 bedeutet, dass $\pi_r \circ \phi^{-1}$ auf $\phi[I]$ konvex ist. In (5) und (6) braucht dann lediglich $\leq$ durch $\geq$ ersetzt zu werden.

Der Beweis wurde bis hierhin unter der Annahme $r \neq 0$ geführt. Dies stellt aber keine wirkliche Einschränkung dar, denn $\mathsf{G} = \mathsf{P}_0$ lässt sich als Grenzfunktion von Potenz-Mittelwerten P_{r_k} auffassen, wo die r_k sämtlich $\neq 0$ sind und eine Nullfolge bilden.[2] $\Diamond$

Lemma 2 liefert eine bequeme Methode, quasi-arithmetische Mittelwerte mit Potenz-Mittelwerten zu vergleichen, mehr noch: durch Potenz-Mittelwerte von unten und von oben her zu 'approximieren'. Einige einfache Beispiele mögen das illustrieren.

Beispiel 1. — Sei $\phi(x) = x^s$ mit $s > 0$; es ist also $\mathsf{A}^\phi = \mathsf{P}_s$. Man erhält sofort

$$1 + x\frac{\phi''(x)}{\phi'(x)} = 1 + \frac{s(s-1)x^{s-1}}{sx^{s-1}} = s$$

und damit erwartungsgemäß $r_*(\phi) = r^*(\phi) = s$.

Beispiel 2. — Zu fest vorgegebenem reellem $a \geq 0$ werde $\phi : (a, \infty) \to \mathbb{R}_+$ definiert durch $\phi(x) = x + x^3$ ($x > a$). Damit ergibt sich

$$1 + x\frac{\phi''(x)}{\phi'(x)} = 1 + \frac{6x^2}{1 + 3x^2}.$$

Hier wird die Abhängigkeit der unteren Grenzzahl von (a, ∞) ersichtlich; es ist $r_*(\phi) = (1 + 9a^2)/(1 + 3a^2)$. Bei maximaler Größe des Definitionsintervalls (für $a = 0$) nimmt $r_*(\phi)$ seinen kleinsten Wert 1 an, was der

[2] Nichtsdestoweniger lässt sich auch der Fall $r = 0$ direkt in die bisherigen Beweisüberlegungen einordnen. So ist etwa $\mathsf{P}_0 \leq \mathsf{A}^\phi$ äquivalent zur Konvexität von $\phi_0(u) = \phi(\mathrm{e}^u)$ auf dem Intervall $\pi_0[I]$. Auch aus $\phi_0''(u) \geq 0$ ergibt sich dann die Ungleichung (6) mit $r = 0$ auf der linken Seite.

Ungleichung $\mathsf{A} = \mathsf{P}_1 \leq \mathsf{A}^\phi$ entspricht. Auf der anderen Seite erhalten wir $r^*(\phi) = 3$, mithin $\mathsf{A}^\phi \leq \mathsf{P}_3$.

Beispiel 3. — Das Beispiel $\phi(x) = \mathrm{e}^x$ verdeutlicht auf besonders einfache Weise, wie sich das Definitionsintervall von ϕ auf die Vergleichbarkeit von A^ϕ mit einem Potenz-Mittelwert P_r auswirkt. Sei etwa $I = (a, b)$ mit $0 \leq a < b$. Es ergibt sich unmittelbar $r_*(\phi) = 1 + a$ und $r^*(\phi) = 1 + b$, also

$$\mathsf{P}_{1+a} \leq \mathsf{A}^{\exp} \leq \mathsf{P}_{1+b}.$$

Im Standard-Fall $I = (0, \infty)$ geht dies über in $\mathsf{A} \leq \mathsf{A}^{\exp} \leq \max$.

Beispiel 4. — Durch die frühere Definition (3) der erweiterten Potenzfunktion π_r wurde das geometrische Mittel den Potenz-Mittelwerten eingegliedert. Dies wird für $\phi(x) = \log x$ noch einmal – und zwar hier unabhängig vom Definitionsintervall für alle $x > 0$ – bestätigt durch

$$1 + x\frac{\phi''(x)}{\phi'(x)} = 0 = r_*(\log) = r^*(\log),$$

was der Tatsache $\mathsf{G} = \mathsf{A}^{\log} = \mathsf{P}_0$ entspricht.

Beispiel 5. — Es sei $\phi : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $\phi(x) = \log\log x$. Den zugehörigen quasi-arithmetischen Mittelwert $\mathsf{A}^\phi =: \mathsf{E}$ nennt Ginalska [5] *exponentiell* und notiert ihn in der Form

$$\mathsf{E}(x_1, \ldots, x_N) = \exp\left((\log x_1 \cdot \ldots \cdot \log x_N)^{\frac{1}{N}}\right).$$

Aus der Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel gewinnt sie die Ungleichung $\mathsf{E} \leq \mathsf{G}$, zeigt dann aber – als Hauptresultat – die Nicht-Vergleichbarkeit von E und H (siehe auch [2], S. 270). Dies geschieht durch den Nachweis, dass die Differenz $\mathsf{H} - \mathsf{E}$ das Vorzeichen wechselt, was sich schon speziell für $\mathsf{H}(x, 2) - \mathsf{E}(x, 2)$ im Intervall $4 \leq x \leq 5$ beobachten lässt.

Lemma 2 liefert diese Aussagen und darüber hinaus noch mehr. Zunächst erhalten wir für alle $x > 1$

$$1 + x\frac{\phi''(x)}{\phi'(x)} = -\frac{1}{\log x}.$$

Daher ist $r^*(\phi) = 0$, das heißt: $\mathsf{E} \leq \mathsf{P}_0 = \mathsf{G}$. Die untere Grenzzahl wird $r_*(\phi) = -\infty$. Daraus ergibt sich aber auch: Sämtliche P_r mit $r < 0$ sind nicht vergleichbar mit E. Speziell für $r = -1$ resultiert die Nicht-Vergleichbarkeit von E mit dem harmonischen Mittel.

Beispiel 6.— Sei $r \in \mathbb{R}_+$ beliebig und $\lambda_r : (0, \infty) \to \mathbb{R}_+$ definiert durch $\lambda_r(x) := \log(1 + rx)$. Die zugehörigen Funktionen $\mathsf{L}_r := \mathsf{A}^{\lambda_r}$ bilden nach Jäger [7] eine (bzgl. r) monoton fallende Familie von interpolierenden Mittelwerten zwischen G und A; genauer gilt: $\mathsf{G} \leq \mathsf{L}_r \leq \mathsf{A}$, wobei $\mathsf{L}_r \to \mathsf{G}$ für $r \to \infty$ und $\mathsf{L}_r \to \mathsf{A}$ für $r \to 0$. Eine leichte Rechnung liefert die Gleichung

$$\mathsf{L}_r(x_1, \ldots, x_N) = \frac{1}{r} \left(\prod_{j=1}^{N} (1 + rx_j)^{\frac{1}{N}} - 1 \right)$$

sowie die in [7] erörterte Tatsache, dass L_r ein „Verknüpfungsmittelwert" bezüglich der durch $u \otimes v := u + v + ruv$ gegebenen binären Operation darstellt (in dem Sinn, dass das N-fache $\otimes$-Produkt von $\mathsf{L}_r(x_1, \ldots, x_N)$ mit sich selbst gleich $x_1 \otimes \cdots \otimes x_N$ ist).

Auf besonders einfache Weise lässt sich hier die Aussage gewinnen, dass keines der L_r mit einem zwischen G und A gelegenen Potenz-Mittelwert vergleichbar ist. Eine Auswertung gemäß Lemma 2 ergibt nämlich

$$1 + x\frac{\lambda_r''(x)}{\lambda_r'(x)} = \frac{1}{1 + rx}$$

und damit sofort $r_*(\lambda_r) = 0$ und $r^*(\lambda_r) = 1$. Zum einen bestätigt dies die Ungleichungen $\mathsf{G} = \mathsf{P}_0 \leq \mathsf{L}_r \leq \mathsf{P}_1 = \mathsf{A}$, bedeutet zum anderen aber die weitergehende Tatsache, dass L_r und P_s für jedes $r > 0$ und jedes $s \in (0, 1)$ nicht vergleichbar sind.

3. Exponential-Mittelwerte

Soweit es in den Beispielen des vorangegangenen Abschnitts um Fragen der Vergleichbarkeit geht, ließen diese sich auch ohne Lemma 2 bereits allein mit Hilfe von Lemma 1 beantworten. Die Methode, die Grenzzahlen $r_*(\phi)$ und $r^*(\phi)$ nach Lemma 2 zu bestimmen, erweist sich aber in gewissen Fällen als deutlich einfacher und übersichtlicher. Zu diesen Fällen sind u. a.

iterativ erzeugte Folgen von Mittelwerten zu rechnen, genauer: Folgen von quasi-arithmetischen ϕ^k-Mittelwerten, wo $k \in \mathbb{Z}$ und ϕ^k die k-te Iterierte von ϕ bezeichnet. Letztere werden hier wie üblich definiert durch $\phi^0 = \mathrm{id}$, $\phi^k = \phi \circ \phi^{k-1}$ für $k \geq 1$ sowie $\phi^k = (\phi^{-1})^{-k}$ für $k < 0$.

Für das Folgende werde ϕ als streng monoton wachsende, konvexe Funktion vorausgesetzt. Nach der Jensenschen Ungleichung bilden dann die ϕ^k-Mittelwerte eine isotone Familie:

$$\ldots \leq \mathsf{A}^{\phi^{-3}} \leq \mathsf{A}^{\phi^{-2}} \leq \mathsf{A}^{\phi^{-1}} \leq \mathsf{A} \leq \mathsf{A}^{\phi} \leq \mathsf{A}^{\phi^2} \leq \mathsf{A}^{\phi^3} \leq \ldots \tag{7}$$

Dies ergibt sich unmittelbar aus der Beobachtung, dass in dieser Ungleichungskette rechts von A die Mittelwertbildung durch konvexe (wachsende) Funktionen erfolgt, links von A hingegen durch konkave (wachsende) Funktionen.

Sei nun speziell $\phi(x) = \mathrm{e}^x$ und ε_k die k-te Iterierte von ϕ. Die zugehörigen Mittel $\mathsf{E}_k := \mathsf{A}^{\varepsilon_k}$ mögen als *Exponential-Mittelwerte der Ordnung k* bezeichnet werden. Danach lässt sich das arithmetische Mittel als Exponential-Mittelwert der Ordnung 0 auffassen: $\mathsf{E}_0 = \mathsf{A}$; aber auch das geometrische Mittel reiht sich hier ein als $\mathsf{G} = \mathsf{A}^{\log} = \mathsf{E}_{-1}$. Dasselbe gilt für den Mittelwert E von Ginalska [5] aus Beispiel 5 von Abschnitt 2:

$$\mathsf{E} = \mathsf{G}^{\log} = (\mathsf{A}^{\log})^{\log} = \mathsf{E}_{-2}.$$

Man vergleiche zu diesen und verwandten ‘exponentiellen’ Mittelwerten etwa Bullen [2] (S. 269-270) sowie Bonferroni [1] und Rennie [12].

Aus der Überlegung zu (7) ergibt sich unmittelbar die Isotonie der Exponential-Mittelwerte:

$$r \leq s \Longrightarrow \mathsf{E}_r(x_1, \ldots, x_N) \leq \mathsf{E}_s(x_1, \ldots, x_N), \tag{8}$$

wobei $r, s \in \mathbb{Z}$. Im Unterschied zur entsprechenden Ungleichung (4) für die Potenz-Mittelwerte, gilt (8) jedoch im allgemeinen *nicht* für alle positiven reellen $x_1, \ldots, x_N$. Es bezeichne I_k das größtmögliche Teilintervall von $(0, \infty)$, in dem ε_k definiert ist. Offenbar gilt $I_k = (0, \infty)$ für alle $k \geq 0$, für $k < 0$ hingegen $I_k = (\varepsilon_{|k|-2}(1), \infty)$. Ist somit $r \leq s$ ($r, s \in \mathbb{Z}$), so erhalten wir $I_r \subseteq I_s$; und daraus folgt: (8) gilt für alle $x_1, \ldots, x_N > 0$ im

Falle $r \geq 0$ (sogar einschließlich $r = -1$), jedoch im Falle $r \leq -2$ lediglich für $x_1, \ldots, x_N > \varepsilon_{|r|-2}(1)$. Diese linke Grenze des Definitionsintervalls hat man bei der Untersuchung der Vergleichbarkeit der Exponential-Mittelwerte mit den Potenz-Mittelwerten im Auge zu behalten.

Über die Ungleichungen zwischen Mitgliedern dieser beiden Mittelwert-Familien gibt die Proposition 2 erschöpfende Auskunft. Das folgende Diagramm möge vorab schon einmal die Lage der betreffenden Mittelwerte in der näheren Umgebung von G und A verdeutlichen:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\ldots \leq \mathsf{P}_{-1} & \leq \ldots \leq & \mathsf{P}_0 & \leq \ldots \leq & \mathsf{P}_1 & \leq \ldots \leq & \mathsf{P}_2 \leq \ldots \\
\| & & \| & & \| & & \| \\
\mathsf{H} & \leq & \mathsf{G} & \leq & \mathsf{A} & \leq & \mathsf{Q} \\
& & \| & & \| & & \\
\ldots \leq \mathsf{E}_{-3} \leq \mathsf{E}_{-2} & \leq & \mathsf{E}_{-1} & \leq & \mathsf{E}_0 & \leq & \mathsf{E}_1 \leq \mathsf{E}_2 \leq \ldots
\end{array}$$

Übergänge von einer Mittelwertfamilie zur anderen sind ausschließlich bei G und A möglich. Dem Schema lassen sich Ungleichungen wie $\mathsf{H} \leq \mathsf{E}_1$ oder $\mathsf{E}_{-2} \leq \mathsf{Q}$ unmittelbar entnehmen, ebenso die Unvergleichbarkeit etwa von E_1, Q oder von $\mathsf{E}_{-2}, \mathsf{H}$ (Ginalska).

Proposition 2.
Zwischen den Potenz-Mittelwerten P_r $(r \in \mathbb{R})$ *und den Exponential-Mittelwerten* E_k $(k \in \mathbb{Z})$ *bestehen die folgenden Ungleichungsketten*:

$$\begin{array}{lll}
\text{(i)} & \mathsf{P}_r \leq \mathsf{P}_0 = \mathsf{G} = \mathsf{E}_{-1} \leq \mathsf{E}_k & \textit{für } r \leq 0 \textit{ und } k \geq 0, \\
\text{(ii)} & \mathsf{P}_r \leq \mathsf{P}_1 = \mathsf{A} = \mathsf{E}_0 \leq \mathsf{E}_k & \textit{für } r \leq 1 \textit{ und } k \geq 1, \\
\text{(iii)} & \mathsf{E}_k \leq \mathsf{E}_{-1} = \mathsf{G} = \mathsf{P}_0 \leq \mathsf{P}_r & \textit{für } k \leq -2 \textit{ und } r \geq 0, \\
\text{(iv)} & \mathsf{E}_k \leq \mathsf{E}_0 = \mathsf{A} = \mathsf{P}_1 \leq \mathsf{P}_r & \textit{für } k \leq -1 \textit{ und } r \geq 1.
\end{array}$$

Darüberhinaus bestehen keine weiteren Ungleichungen; d. h., für alle anderen Paare (r, k) *sind* P_r *und* E_k *nicht vergleichbar.*

Beweis. Die Ungleichungen (i)-(iv) ergeben sich bereits aus der Isotonie der Potenz- und der Exponential-Mittelwerte sowie aus den früher erörterten Spezialfällen, in denen diese mit dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel übereinstimmen. Zu zeigen ist daher noch die wesentliche

Aussage, dass den genannten Ungleichungen keine weiteren hinzugefügt werden können. Mit Hilfe der Grenzzahlen der E_k lässt sich dies wie folgt präzise ausdrücken:

$$r_*(\varepsilon_k) = \begin{cases} -\infty & \text{für } k \le -2 \\ 0 & \text{für } k = -1 \\ 1 & \text{für } k \ge 0 \end{cases} \qquad r^*(\varepsilon_k) = \begin{cases} 0 & \text{für } k \le -1 \\ 1 & \text{für } k = 0 \\ \infty & \text{für } k \ge 1 \end{cases} \tag{9}$$

Zur Ermittlung dieser Werte wenden wir Lemma 2 an und diskutieren die in den Fallunterscheidungen angegebenen Bedingungen. Der Kürze halber werde dazu für beliebiges $k \in \mathbb{Z}$ definiert:

$$\Psi_k(x) := 1 + x \cdot \frac{\varepsilon_k''(x)}{\varepsilon_k'(x)} \qquad (x \in I_k).$$

Im Fall $k = 0$ ist $\varepsilon_0(x) = x$; es ergibt sich $\Psi_0(x) \equiv 1$ und folglich $r_*(\varepsilon_0) = 1$ sowie $r^*(\varepsilon_0) = 1$. Damit ist in (9) für $r^*(\varepsilon_k)$ die zweite Fallzeile gezeigt.

Im Fall $k \ge 1$ setzen wir $g_k(x) := \varepsilon_k''(x)/\varepsilon_k'(x)$ und beweisen die folgende Hilfsbehauptung: Es ist $g_k : [0, \infty) \to \mathbb{R}_+$ eine Funktion mit positiver unterer Schranke, genauer: $g_k(x) \ge 1$ für alle $x \ge 0$. Wir zeigen dies durch Induktion. Für $k = 1$ ist die Behauptung sofort klar wegen $\varepsilon_1(x) = \mathrm{e}^x$ und folglich $g_1(x) \equiv 1$. Induktionsschritt ($k \to k + 1$): Es ist $\varepsilon_{k+1}(x) = \exp(\varepsilon_k(x))$ und somit

$$\varepsilon_{k+1}'(x) = \exp(\varepsilon_k(x)) \cdot \varepsilon_k'(x) = \varepsilon_{k+1}(x) \cdot \varepsilon_k'(x). \tag{10}$$

Hieraus folgt weiter

$$\begin{aligned} g_{k+1}(x) &= \frac{\varepsilon_{k+1}''(x)}{\varepsilon_{k+1}'(x)} = \frac{\varepsilon_{k+1}'(x)\varepsilon_k'(x) + \varepsilon_{k+1}(x)\varepsilon_k''(x)}{\varepsilon_{k+1}(x)\varepsilon_k'(x)} \\ &= \frac{\varepsilon_{k+1}'(x)}{\varepsilon_{k+1}(x)} + \frac{\varepsilon_k''(x)}{\varepsilon_k'(x)} \\ &= \varepsilon_k'(x) + g_k(x). \end{aligned}$$

Mit der Induktionsannahme ergibt sich $g_{k+1}(x) \ge \varepsilon_k'(x) + 1 > 1$, womit die Hilfsbehauptung gezeigt ist.

Nach Lemma 2 erhalten wir nun

$$r_*(\varepsilon_k) = \inf_{x>0} \Psi_k(x) = \inf_{x>0} (1 + g_k(x)x) = 1,$$
$$r^*(\varepsilon_k) = \sup_{x>0} \Psi_k(x) = \sup_{x>0} (1 + g_k(x)x) = \infty.$$

In (9) sind damit die dritte Fallzeile von $r_*(\varepsilon_k)$ und die dritte Fallzeile von $r^*(\varepsilon_k)$ bestätigt.

Zum Beweis der übrigen Fallzeilen in (9) sind nun noch negative k zu betrachten. Daher werde $k \le -1$ angenommen. Es ist $\varepsilon_{-1}(x) = \log x$ und $\varepsilon_k = \log^{|k|}$ (hier zu lesen als $|k|$-te Iterierte von log).

Für $k = -1$ entnehmen wir Beispiel 4 (von Abschnitt 2) $r_*(\varepsilon_{-1}) = r^*(\varepsilon_{-1}) = 0$. Für $k = -2$ liefert Beispiel 5 die Identität

$$\Psi_{-2}(x) = 1 + x \cdot \frac{\varepsilon''_{-2}(x)}{\varepsilon'_{-2}(x)} = -\frac{1}{\log x} \qquad (x > 1).$$

Mittels Induktion lässt sich für den allgemeinen Fall die folgende Darstellung gewinnen:

$$\Psi_k(x) = -\sum_{j=1}^{|k|-1} \frac{1}{\log x \cdot \log^2 \ldots \cdot \log^j x} \qquad (x > \varepsilon_{|k|-2}(1)). \tag{11}$$

Der Logarithmus ist eine streng monoton wachsende Funktion. Für $x > \varepsilon_{|k|-2}(1)$ und $1 \le j \le |k| - 1$ hat man daher: $\log^j x > \varepsilon_{|k|-2-j}(1) > 0$, und speziell für den höchsten Exponenten: $\log^{|k|-1} x > \varepsilon_{-1}(1) = \log 1 = 0$. Infolgedessen sind die Nenner aller Summanden in (11) positiv und $\Psi_k(x) < 0$. Für $x \to \infty$ strebt $\Psi_k(x)$ gegen Null; die obere Grenzzahl wird damit

$$r^*(\varepsilon_k) = \sup_{x>\varepsilon_{|k|-2}(1)} \Psi_k(x) = 0.$$

Für $x \to \varepsilon_{|k|-2}(1)$ konvergieren die ersten $|k| - 2$ Summanden von (11) jeweils gegen einen endlichen Wert. Im Nenner des letzten Summanden geht allerdings $\log^{|k|-1} x \to \log 1 = 0$, so dass sich insgesamt für die untere Grenzzahl ergibt:

$$r_*(\varepsilon_k) = \inf_{x > \varepsilon_{|k|-2}(1)} \Psi_k(x) = -\infty.$$

Damit ist Proposition 2 bewiesen. $\Diamond$

Zum Vergleich sei abschließend einmal skizziert, wie – alternativ zur Methode der Grenzzahlen – die Unvergleichbarkeit von $\mathsf{E}_{-2}, \mathsf{P}_r$ für beliebige reelle $r < 0$ mittels Lemma 1 nachzuweisen wäre.

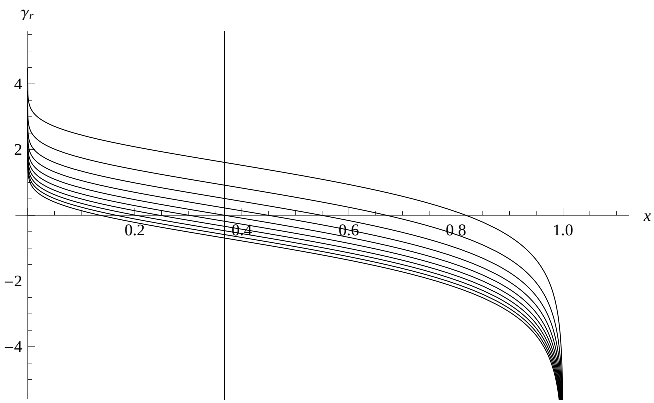


Abbildung 1. Die γ_r-Graphen für $r = -2; -1{,}8; -1{,}6; \ldots; -0{,}1$.
Die Gerade $x = x_w = 1/\mathrm{e}$ schneidet sämtliche Kurven in deren Wendepunkten.

Für $r < 0$ sind π_r und π_r^{-1} monoton fallende Funktionen. Die Ungleichung

$$\mathsf{P}_r = \mathsf{A}^{\pi_r} \leq \mathsf{A}^{\log \circ \log} = \mathsf{E}_{-2}$$

ist daher nach Lemma 1 genau dann gültig, wenn die Funktionen $\gamma_r(x) := \log(\log x^{\frac{1}{r}})$ auf $(0,1)$ konkav sind. Tatsächlich sind die Graphen von γ_r $(r < 0)$ jedoch inflexiv; sie besitzen sogar, wie man leicht nachrechnet, sämtlich Wendepunkte mit der identischen Abszisse $x_w = 1/\mathrm{e} \approx 0{,}3679$ (vgl. Abbildung 1).

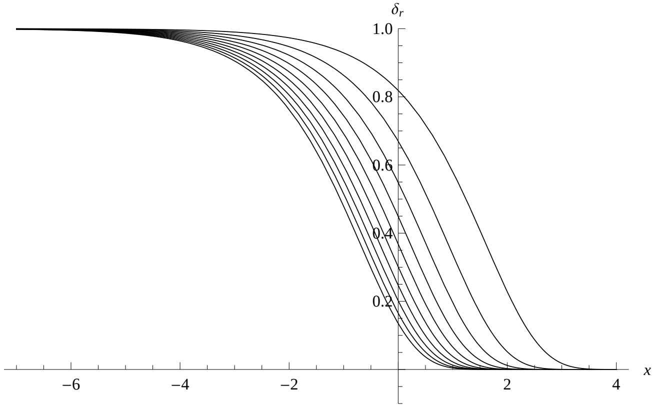


Abbildung 2. Die δ_r-Graphen für $r = -2; -1{,}8; -1{,}6; \ldots; -0{,}1$.
Die Funktionen δ_r sind – auch im Intervall $(0, \infty)$ – sämtlich nicht konkav.

Um nun auch die umgekehrte Ungleichung $\mathsf{A}^{\log \circ \log} \leq \mathsf{A}^{\pi_r}$ auszuschließen, müssen wir nach Lemma 1 zeigen, dass die Funktionen $\delta_r(x) := \exp(\exp(x))^r$ ($r < 0$) auf $(0, \infty)$ nicht konkav sind (vgl. Abbildung 2).

Aus der Gleichung $\delta_r''(x) = 0$ lässt sich herleiten, dass die δ_r Wendepunkte bei $x_w = \log(-\frac{1}{r})$ besitzen. Für $r \leq -1$ liegen diese im 2. Quadranten (bzw. auf der Ordinatenachse), d. h. δ_r ist konvex über $(0, \infty)$. Für $-1 < r < 0$ rückt der entsprechende Wendepunkt in den 1. Quadranten, die δ_r-Graphen sind dort somit inflexiv. Die standardmäßige Kurvendiskussion kann dem Leser überlassen bleiben.

SUPPLEMENT

Páles hat in [10] und [11] die Frage untersucht (und beantwortet), wann zwischen zwei quasi-arithmetischen Mittelwerten ein Potenz-Mittelwert liegt. Es ist dies die Situation

$$\mathsf{A}^{\phi} \leq \mathsf{P}_r \leq \mathsf{A}^{\psi} \quad \text{für ein geeignetes } r \in \mathbb{R}. \tag{*}$$

Anhand von Proposition 1 erkennt man unschwer, dass sich (*) äquivalent durch die Grenzzahlen-Ungleichung $r^*(\phi) \leq r \leq r_*(\psi)$ ausdrücken lässt.

Aus (*) folgt aufgrund der (positiven) Homogenität der Potenz-Mittelwerte für alle reellen $t > 0$ und $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}_+$:

$$\mathsf{A}^\phi(tx_1, \ldots, tx_N) \leq \mathsf{P}_r(tx_1, \ldots, tx_N) = t\mathsf{P}_r(x_1, \ldots, x_N) \leq t\mathsf{A}^\psi(x_1, \ldots, x_N),$$

mithin

$$\mathsf{A}^\phi(tx_1, \ldots, tx_N) \leq t\mathsf{A}^\psi(x_1, \ldots, x_N). \tag{**}$$

Páles hat unter schwachen Annahmen umgekehrt auch die nicht-tiviale Richtung $(**) \implies (*)$ gezeigt (sog. Trennungssatz). Setzt man die zweifache Differenzierbarkeit von ϕ und ψ voraus, so wird mit der Grenzzahlen-Methode (Lemma 2) ein erheblich einfacherer Beweis dafür möglich. Dazu nehmen wir (**) an und definieren $\sigma_t(u) := t \cdot u$. Nach wenigen Umformungen erhalten wir aus (**) zunächst $\mathsf{A}^{\phi\circ\sigma_t} \leq \mathsf{A}^\psi$ und wegen der Monotonie von ψ:

$$\mathsf{A}^{\phi\circ\sigma_t\circ\psi^{-1}} \leq \mathsf{A}. \tag{†}$$

Die das quasi-arithmetische Mittel erzeugende Funktion $g(t, u) := \phi(t\cdot\psi^{-1}(u))$ ist monoton wachsend (im Argument u) und wegen (†) konkav. Wir drücken letzteres durch $\frac{\partial^2}{\partial u^2} g(t, u) \leq 0$ aus. Es ist

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} g(t, u) = t^2 \left(\frac{d\psi^{-1}}{du}\right)^2 \cdot \phi''(t\psi^{-1}(u)) + t\phi'(t\psi^{-1}(u)) \cdot \frac{d^2\psi}{du}.$$

Der Ausdruck rechterhand ist ≤ 0 genau dann, wenn

$$t\frac{\phi''(t\psi^{-1}(u))}{\phi'(t\psi^{-1}(u))} \leq -\frac{d^2\psi^{-1}}{du^2} \cdot \left(\frac{d\psi^{-1}}{du}\right)^{-2} = \frac{\psi''(\psi^{-1}(u)))}{\psi'(\psi^{-1}(u)))}.$$

Setzen wir $x = \psi^{-1}(u)$, so ergibt sich

$$t\frac{\phi''(tx)}{\phi'(tx)} \leq \frac{\psi''(x)}{\psi'(x)}$$

und folglich auch
$$1 + tx\frac{\phi''(tx)}{\phi'(tx)} \leq 1 + x\frac{\psi''(x)}{\psi'(x)}.$$

Indem wir hier auf der rechten Seite zum Infimum übergehen, liefert Proposition 2:

$$1 + tx\frac{\phi''(tx)}{\phi'(tx)} \leq r_*(\psi).$$

Wir bilden nun das Supremum auf der linken Seite dieser Ungleichung und erhalten abermals mit Proposition 2: $r^*(\phi) \leq r_*(\psi)$. Es existiert also ein $r \in \mathbb{R}$ mit $r^*(\phi) \leq r \leq r_*(\psi)$; infolgedessen gilt für dieses r auch $\mathsf{A}^\phi \leq \mathsf{P}_r \leq \mathsf{A}^\psi$. ◊

Als Korollar des Trennungssatzes gewinnen wir den bekannten Sachverhalt, dass die Potenz-Mittelwerte die einzigen positiv-homogenen quasi-arithmetischen Mittel sind. Denn ist A^ϕ homogen, so gilt für alle $t > 0$:

$$\mathsf{A}^\phi(tx_1, \ldots, tx_N) = t\mathsf{A}^\phi(x_1, \ldots, x_N).$$

Der Trennungssatz liefert uns dann ein reelles r mit $\mathsf{A}^\phi \leq \mathsf{P}_r \leq \mathsf{A}^\phi$, d. h. $\mathsf{A}^\phi = \mathsf{P}_r$.

Literatur

[1] Bonferroni, C. E.: La media esponenziale in matematica finanziaria, *Annuario R. Ist. Sc. Econ. Comm. Bari*, 1-14 (1923-4).

[2] Bullen, P. S.: *Handbook of Means and Their Inequalities*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 2003.

[3] De Finetti, B.: Sul concetto di media, *Giorn. Ist. Ital. Attuari* **2**, 369-396 (1931).

[4] Gericke, H.: *Mathematik in Antike und Orient*, 4. Auflage, Wiesbaden 1996.

[5] Ginalska, S.: On the exponential mean, *Demonstratio mathematica* **29**/1, 217-218 (1996).

[6] Hardy, G. H.; Littlewood, J. E.; Pólya, G.: *Inequalities*, Cambridge University Press, 1934^1, 1952^2, Reprint 1978.

[7] Jäger, J.: Verknüpfungsmittelwerte, *Math. Semesterber.* **52**, 63-79 (2005).

[8] Kolmogorov, A. N.: Sur la notion de la moyenne, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* **6**/12, 388-391 (1930).

[9] Nagumo, M.: Über eine Klasse der Mittelwerte, *Japan. J. Math.* **7**, 71-79 (1930).

[10] Páles, Zs.: Strong Hölder and Minkowski inequalities for quasiarithmetic means, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **65**, 493-503 (1999).

[11] Páles, Zs.: Nonconvex functions and separation by power means, *Math. Inequal. Appl.* **3**, 169-176 (2000).

[12] Rennie, B. C.: Exponential means, *James Cook Math. Notes* **6**, 6023-6024 (1991).

Notiz über eine interpolierende Folge von Mittelwerten[1]

Es seien $U(\underline{x})$ und $V(\underline{x})$ Mittelwerte von Stichproben $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_N)$ positiver reeller Zahlen. Das ist genauer wie folgt zu verstehen: Die Werte von U und V liegen stets zwischen dem Minimum und dem Maximum der $x_1, \ldots, x_N$ (Internalität); sie sind unabhängig von der Reihenfolge der Argumente (Symmetrie), und es gilt $U(a, \ldots, a) = V(a, \ldots, a) = a$ für beliebiges $a > 0$ (Reflexivität). Ferner werde für das Weitere vorausgesetzt, dass U und V vergleichbar sind. Ohne Einschränkung sei etwa $U \leq V$.

Aus Mittelwertfunktionen U, V lassen sich leicht weitere bilden, die zwischen ihnen liegen, z. B. $(U + V)/2$. Es soll hier aber ein von U und V abhängiger asymmetrischer Ausdruck J_m betrachtet werden, der eine isotone Folge von interpolierenden Mittelwerten liefert:

$$J_m = J_m(U, V) = ((2^m - 1)\, V^m + U^m)^{\frac{1}{m}} - V.$$

Es gelten die folgenden Aussagen (deren Beweise hier ausgespart bleiben):

(1) $U \leq J_m \leq V,$

(2) $1 \leq m < n \Longrightarrow J_m < J_n,$

(3) $J_1 = U, \quad J_\infty := \lim\limits_{m \to \infty} J_m = V,$

(4) J_m ist eine Mittelwertfunktion (im oben definierten Sinn).

Die Interpolation reicht über das gesamte Intervall von U bis V. Dabei können allerdings spezifische Eigenschaften der interpolierten Mittelwerte verlorengehen. So sind beispielsweise das arithmetische Mittel A und das quadratische Mittel Q quasi-arithmetische Mittelwerte mit $A \leq Q$. Hingegen ist $J_2(A, Q) = \sqrt{3Q^2 + A^2} - Q$ ein nicht-assoziativer und daher (nach einem bekannten Satz von Kolmogoroff) kein quasi-arithmetischer Mittelwert mehr.

[1] Unveröffentlicht, 2017.

Teil III.
Funktionen aus algebraischer Sicht

Aufbau eines Funktionenkalküls[1]

§ 1. Präliminarien: Rechnen mit Funktionen

Vorbetrachtung. — In den Anfängen der Analysis waren Funktionen hauptsächlich ein Mittel, die Abhängigkeit zwischen veränderlichen Größen zu beschreiben. Maßgebliche Anregungen gab dazu von jeher die Physik. Zu den einfachsten Beispielen aus der Fülle physikalischer Anwendungen gehören etwa: der im freien Fall zurückgelegte Weg abhängig von der Zeit, die Temperaturabhängigkeit eines Gasvolumens bei konstantem Druck, oder die Schwingungsdauer eines Fadenpendels abhängig von seiner Länge. Gesetzmäßigkeiten dieser Art werden dann in Gestalt einer Funktionsgleichung $y = f(x)$ notiert, wo x die unabhängig veränderliche Größe und y die in Abhängigkeit von x sich verändernde Größe bezeichnet. Das Symbol f steht für die Funktion selbst, welche die Abhängigkeitsbeziehung üblicherweise in Gestalt eines mit analytischen Sprachmitteln gebildeten Terms $f(x)$ expliziert.

In weniger überschaubaren Fällen wird f zunächst *indirekt* beschrieben, zum Beispiel durch eine Differentialgleichung, in der neben dem (noch) unbestimmten f auch gewöhnliche oder (im Fall mehrerer Veränderlicher) partielle Ableitungen von f auftreten können. Das legt nahe, die Lösungsgesamtheiten solcher Gleichungen systematisch aufzusuchen und zu studieren. Damit bahnt sich ein Sichtwechsel an. Funktionen sind nicht mehr allein *Mittel* zur Beschreibung von Abhängigkeiten, sondern geraten nun selbst in die Rolle von *Objekten*, die (als Elemente einer strukturierten Menge) bestimmten Operationen unterworfen sind. Auf diese Weise können sie, etwa nach Einführung einer Addition und einer Multiplikation, einen alge-

[1] Der vorliegende Text bildet das erste Kapitel einer geplanten Monographie über multivariable Polynome, die mit gewissen Operationen auf unendlich-dimensionalen Algebren assoziiert sind und zudem eine kombinatorische Interpretation gestatten. Das Kapitel sollte dabei vor allem der schrittweisen Einführung einer Funktions- und Differentialrechnung auf Algebren formaler Potenzreihen dienen, denen in diesem Zusammenhang eine Schlüsselrolle zukommt. Aus verschiedenen Gründen habe ich das 2022 begonnene Buchprojekt wieder aufgegeben, kann mir aber vorstellen, dass dieses vorbereitende Kapitel zumindest noch von didaktischem Nutzen ist, etwa ergänzend zu meiner Abhandlung *Stirling Polynomials in Several Indeterminates* (Logos-Verlag: Berlin 2021)

braischen Ring oder Körper bilden. Mit einer Skalarmultiplikation wird daraus ein Vektorraum. Wird für die ›Vektoren‹ schließlich noch eine Norm definiert, so gelangt man zu den normierten linearen Räumen, die in der Funktionalanalysis eine so bedeutende Stellung einnehmen.

Ein Ring reellwertiger Funktionen. — Wir wollen nun einige der algebraischen Aspekte etwas näher betrachten. Es bezeichne wie üblich $\mathbb{R}$ den Körper der reellen Zahlen. Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ irgendein fest vorgegebenes Intervall, so bilden wir die Menge $\mathrm{F}(I, \mathbb{R})$ aller reellwertigen Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$, die auf ganz I definiert sind. Zu beliebigen $f, g \in \mathrm{F}(I, \mathbb{R})$ lassen sich dann eine Summe $f + g$ und ein Produkt $f \cdot g$ ›argumentweise‹ definieren, d. h. durch die für alle $x \in I$ geforderten Auswertungsvorschriften

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &:= f(x) + g(x),\\ (f \cdot g)(x) &:= f(x) \cdot g(x).\end{aligned}$$

Ist c eine reelle Zahl, so soll die Funktion, die auf I überall den konstanten Wert c annimmt, ebenfalls als c notiert werden; wir haben demnach

$$(c \cdot f)(x) = c(x) \cdot f(x) = c \cdot f(x)$$

und damit speziell auch eine *Skalarmultiplikation* zur Verfügung. Die konstanten Funktionen 0 und 1 erweisen sich erwartungsgemäß als neutrale Elemente:

$$f + 0 = f \quad \text{und} \quad f \cdot 1 = f \quad \text{für alle } f \in \mathrm{F}(I, \mathbb{R}).$$

Ersichtlich vererben sich noch weitere algebraische Eigenschaften von $\mathbb{R}$ auf $\mathrm{F}(I, \mathbb{R})$. Wie man mühelos erkennt, sind beide Funktionsverknüpfungen $(+, \cdot)$ assoziativ und kommutativ; zudem erfüllen sie das Distributivgesetz:

$$(f + g) \cdot h = f \cdot h + g \cdot h.$$

Auf der rechten Seite sind die Klammern um die Produkte eingespart, da wir stillschweigend von der geläufigen Vorrangregel für die Multiplikation Gebrauch machen. Produkte werden vereinfachend häufig auch ohne Multiplikationszeichen notiert, insbesondere bei der Skalarmultiplikation.

Wir fragen nun noch nach der Umkehrbarkeit der Funktionsverknüpfungen. Dazu sei $f \in \mathrm{F}(I, \mathbb{R})$ beliebig vorgegeben. Gibt es dann ein $g \in \mathrm{F}(I, \mathbb{R})$, für das $f + g = 0$ gilt? Man findet die einzig mögliche Lösung für g durch schrittweises Umformen der Gleichung $f + g = 0$ zu

$$\begin{aligned} (-1)f + (f + g) &= (-1)f, \\ ((-1)f + f) + g &= (-1)f, \\ g &= (-1)f. \end{aligned}$$

Dabei haben wir bereits von $(-1)f + f = ((-1) + 1) \cdot f = 0$ Gebrauch gemacht, was ja nur heißt, dass $(-1)f$ tatsächlich eine Lösung ist. Das (eindeutig bestimmte) additive Inverse von f ist demnach die Funktion $-f := (-1)f$. Dementsprechend notieren wir, wie allgemein üblich, Summen der Gestalt $f + (-g)$ auch mit zweistelligem Operationszeichen $(-)$ als Differenz $f - g$.

Definitionsgemäß ist $\mathrm{F}(I, \mathbb{R})$ aufgrund der bisher konstatierten Eigenschaften ein *kommutativer Ring mit Einselement.* Im Unterschied zu $\mathbb{R}$ ist allerdings $\mathrm{F}(I, \mathbb{R})$ kein Körper, da zu $f \neq 0$ eine Funktion $g \in \mathrm{F}(I, \mathbb{R})$ mit $f \cdot g = 1$ nicht in jedem Fall existiert. Denn ist etwa $a \in I$ und $f(x) := x - a$, so führt die Annahme $f(x) \cdot g(x) = 1$ für $x = a$ unmittelbar zum Widerspruch $0 = f(a) \cdot g(a) = 1$. Andererseits ist es nicht schwer, Funktionen anzugeben, die ein multiplikatives Inverses besitzen, zum Beispiel $f(x) = \mathrm{e}^x$ und das zugehörige $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Allgemein bezeichnen wir das multiplikative Inverse einer Funktion f auch als die *zu f reziproke Funktion* und notieren sie in der Form f^{-1} oder $1/f$. Selbstverständlich gilt $(f^{-1})^{-1} = f$.

Die multiplikativ invertierbaren Elemente eines Rings werden *Einheiten* genannt. Die Einheiten eines Rings bilden eine Gruppe bezüglich der im Ring gegebenen Multiplikation.

Auch die Nullteilerfreiheit von $\mathbb{R}$ geht in $\mathrm{F}(I, \mathbb{R})$ verloren, d. h. $\mathrm{F}(I, \mathbb{R})$ ist kein Integritätsring. Legen wir uns dazu ein einfaches Beispiel zurecht. Sei a irgendein innerer Punkt von I. Definieren wir nun Funktionen f, g auf I wie folgt: $f(x) = 0$ für $x < a$ und $f(x) = x - a$ für $x \geq a$ sowie $g(x) = x - a$ für $x < a$ und $g(x) = 0$ für $x \geq a$. Offenbar verschwindet dann das Produkt $f(x)g(x)$ auf dem ganzen Intervall und es gilt $f \cdot g = 0$, obwohl $f \neq 0$ und $g \neq 0$ der Fall ist.

Schließlich wird $(\mathrm{F}(I,\mathbb{R}),+,\cdot\,)$ mit der bereits oben erwähnten Skalarmultiplikation auch zu einem *Vektorraum über* $\mathbb{R}$. Die Gültigkeit der zugehörigen Axiome geht unmittelbar aus den schon festgestellten Ringeigenschaften hervor; wir haben dazu nur die Skalarmultiplikation an die Stelle der Ringmultiplikation zu setzen. Letztere ermöglicht es aber auch, das Produkt irgend zweier Vektoren zu bilden, womit sich $\mathrm{F}(I,\mathbb{R})$ als eine *Algebra über* $\mathbb{R}$ erweist. Dazu ist definitionsgemäß gefordert, dass die Multiplikation bilinear in Bezug auf die Vektorraumstruktur ist (vgl. dazu Aufgabe 1, S. 160).

Unterringe. — Die nähere Betrachtung von $\mathrm{F}(I,\mathbb{R})$ sollte hier in erster Linie vor Augen führen, auf welche Weise sich die Operationen einer algebraischen Struktur wie $(\mathbb{R},+,\cdot\,)$ auf Funktionen vom Typ $f : I \to \mathbb{R}$ übertragen, gewissermaßen hochziehen lassen. Die Funktionenalgebra $\mathrm{F}(I,\mathbb{R})$ selbst ist freilich zu weitgefasst und – hinsichtlich der Eigenschaften ihrer Elemente – viel zu unspezifisch, um nennenswerten mathematischen Nutzen zu entfalten.

Bei Unterstrukturen kann das durchaus anders aussehen. Ein bekanntes Beispiel eines Unterrings von $\mathrm{F}(I,\mathbb{R})$ liefert die Menge $\mathrm{C}^0(I)$ aller stetigen reellwertigen Funktionen auf I. Summen, skalare Vielfache sowie Produkte stetiger Funktionen sind ja ihrerseits wieder stetig. Sofern das obige Gegenbeispiel zur Nullteilerfreiheit stetige Funktionen verwendet, ist auch $\mathrm{C}^0(I)$ kein Integritätsring.

Durch zusätzliche Bedingungen lassen sich innerhalb von $\mathrm{C}^0(I)$ weitere Unterringe (bzw. Unteralgebren) aussondern. Vornehmlich zu nennen sind hier die Mengen $\mathrm{C}^n(I)$ $(n = 1,2,3,\ldots)$ aller reellwertigen Funktionen, die auf dem Intervall I n-fach stetig differenzierbar sind. Sie bilden eine strikt absteigende Kette von Unterringen $\mathrm{C}^0(I) \supset \mathrm{C}^1(I) \supset \mathrm{C}^2(I) \supset \ldots$, ihr Durchschnitt ist somit der Unterring $\mathrm{C}^\infty(I)$ der auf I unendlich oft differenzierbaren Funktionen.[2] Besonders einfache Beispiele sind die Poly-

[2] $\mathrm{C}^\infty(I)$ umfasst als echten Unterring die Gesamtheit $\mathrm{C}^\omega(I)$ der auf I analytischen Funktionen. Zur Erinnerung: Eine reelle Funktion $f(x)$ heißt *analytisch im Punkt* $x = a$, wenn sie sich in einer Umgebung von a als konvergente Potenzreihe in $x - a$ darstellen lässt. Dafür ist $f \in \mathrm{C}^\infty$ keineswegs hinreichend, wie folgendes in Anfängervorlesungen zur Analysis beliebte Gegenbeispiel zeigt (hier für den Punkt $a = 0$): $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$, falls $x > 0$, und $f(x) = 0$ sonst.

nomfunktionen

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m \tag{1}$$

mit beliebigen reellen Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$. Sie sind für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert und bilden in ihrer Gesamtheit einen nullteilerfreien Unterring $\mathrm{P}(\mathbb{R})$ von $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$. Er enthält auch die konstanten Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (vermöge der Spezialisierung $a_k = 0$, $k \geq 1$). Diese bilden einen Unterring, den wir mit $\mathbb{R}$ identifizieren, da die Abbildung, die einer reellen Zahl c die Funktion mit dem konstanten Wert c zuordnet, eine isomorphe Einbettung von $\mathbb{R}$ in $\mathrm{P}(\mathbb{R})$ (und alle Oberringe) darstellt. Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen stellt den kleinsten Unterring von $\mathbb{R}$ dar, der (wie $\mathbb{R}$) noch ein Körper ist, hier: der Quotientenkörper des Rings $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen. Natürlich ist $\mathbb{Z}$ der kleinste Unterring. – Bei dem späteren Aufbau einer formalen Funktionenalgebra (in diesem Kapitel) werden die algebraischen Fassungen der polynomialen und C^∞-Funktionen eine maßgebliche Rolle spielen.

Funktionsspezifische Definitionsbereiche. — In vielen Fällen hat es die Analysis mit reellen Funktionen zu tun, deren natürlicher Definitionsbereich kein Intervall ist. Zum Beispiel ist es wenig sinnvoll, den Tangens auf das schmale Intervall $I = (-\pi/2, \pi/2)$ einzuschränken, welches keine seiner Polstellen $\pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) enthält. Der Sachlage angemessener ist es, $\tan$ als Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ zu definieren und dabei seine Polstellen auszunehmen.

Allgemein wollen wir nach diesem Vorbild mit jeder reellwertigen Funktion f den für sie spezifischen (maximalen) Definitionsbereich D_f verbinden und als die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ festlegen, für die der Ausdruck $f(x)$ einen Sinn hat, d. h. eine reelle Zahl bedeutet. Sollen nun Summe oder Produkt zweier Funktionen $f : \mathrm{D}_f \to \mathbb{R}$ und $g : \mathrm{D}_g \to \mathbb{R}$ gebildet werden, so ergibt sich deren gemeinsamer Definitionsbereich als Durchschnitt $\mathrm{D}_f \cap \mathrm{D}_g$ der Definitionsbereiche von f und g.

Auch einer Gleichheitsaussage $f = g$ über Funktionen f, g kann auf ähnliche Weise ein Definitionsbereich zugewiesen werden, indem man $f = g$ auf den Durchschnitt $\mathrm{D}_f \cap \mathrm{D}_g$ relativiert. Dementsprechend liegt es nahe, die Gleichheitsaussage $f = g$ als die Behauptung zu verstehen, dass für alle $x \in \mathrm{D}_f \cap \mathrm{D}_g$ die Gleichheit $f(x) = g(x)$ gilt. Diese Auffassung steht in Einklang mit der gängigen mathematischen Praxis. Beispielsweise behauptet man in der Potenzreihendarstellung einer Funktion f die Gleichheit zwischen dem Ausdruck $f(x)$ (linker Hand) und einem von x abhängigen Summen-Grenzwert (rechter Hand), was natürlich in jedem Fall die Angabe eines Konvergenzintervalls erfordert, für dessen Punkte x auch die rechte Seite der Gleichung ein wohldefinierter Ausdruck ist.

Bemerkung. Zwar sind nun in der eben beschriebenen Weise die rationalen Rechenoperationen auch für Funktionen mit unterschiedlichen Definitionsbereichen erklärt, doch ergibt sich dabei letztlich keine Ringstruktur. So muss in einem Ring etwa das Distributivgesetz in der Form $(f+g)\cdot h = f\cdot h + g\cdot h$ für ausnahmslos *alle* Funktionen erfüllt sein. Durch die hier erforderliche Relativierung auf den gemeinsamen Definitionsbereich $M = \mathrm{D}_f \cap \mathrm{D}_g \cap \mathrm{D}_h$ geht die Gleichheitsaussage allerdings in folgende generalisierte Subjunktion über:

$$\forall x(x \in M \Longrightarrow (f(x)+g(x))\cdot h(x) = f(x)\cdot h(x) + g(x)\cdot h(x)).$$

Um daraus wieder eine unrelativierte Gleichheitsaussage zu erhalten, sind die beteiligten Funktionen sämtlich durch ihre jeweiligen Einschränkungen auf M zu ersetzen. Bei letzteren handelt es sich jedoch tatsächlich im Allgemeinen um *andere* Funktionen als die, von denen wir ursprünglich im Distributivgesetz ausgegangen waren.

Die leere Funktion. — Unter den geschilderten allgemeinen Bedingungen lässt es sich nicht vermeiden, dass auch einmal ein leerer Definitionsbereich entsteht. Zum Beispiel hat die Summe $f+g$, wo $f(x) = \log x$ und $g(x) = \log(-x)$, den Definitionsbereich $\mathrm{D}_{f+g} = (0,\infty) \cap (-\infty, 0) = \emptyset$, weshalb $f+g$ nur die *leere Funktion* $\emptyset$ sein kann. Es sei daran erinnert, dass eine Funktion mengentheoretisch als Teilmenge des kartesischen Produkts von Definitions- und Wertebereich aufgefasst wird. Ist demnach der Definitionsbereich einer Funktion $= \emptyset$, so gilt dies auch für das besagte kartesische Produkt und damit für die Funktion selbst. Umgekehrt mache man sich klar: Die leere Menge $\emptyset$ *ist* in der Tat eine Funktion (rechtseindeutige Relation).

Wie ist nun mit der leeren Funktion mathematisch korrekt zu verfahren? Es besteht eine gewisse Analogie zum Umgang mit der Zahl 0, etwa in Gleichheitsaussagen wie $2\cdot 0 = 0 = 3\cdot 0$. Würde man hier aus der linken und rechten Seite jeweils die 0 herauskürzen, so ergäbe sich die falsche Aussage $2 = 3$. Ähnlich verhält es sich mit der leeren Funktion. Während aber die Null lediglich von ihrer Rolle als Divisor ausgeschlossen wird, müssen wir, um Widersprüche zu vermeiden, *die leere Funktion generell als Operand von Verknüpfungen ausschließen.* – Wir verdeutlichen das anhand der Funktionen im obigen Beispiel, für die $f + g = \emptyset$ gilt. Erlauben wir nun hypothetisch etwa die Addition von $(-f)$ auf beiden Seiten dieser Gleichung, so erhalten wir $g = -f + \emptyset = \emptyset$, mithin einen Widerspruch zu $D_g = (-\infty, 0)$. Natürlich lässt sich mit denselben Funktionen auch aus der Produktgleichung $f \cdot g = \emptyset$ die falsche Aussage $g = (1/f) \cdot \emptyset = \emptyset$ herleiten. Allgemein: Würden wir das Operieren mit der leeren Funktion zulassen, könnte man ganz unabhängig von diesem Beispiel für beliebige Funktionen f, g einen Widerspruch erzeugen, indem auf beiden Seiten der Gleichung $f + \emptyset = \emptyset = g + \emptyset$ die leere Funktion ›subtrahiert‹ wird.

Aus den genannten Gründen ist es generell üblich (und wird auch im Weiteren als Vereinbarung übernommen), *beliebig vorgegebene Funktionen stillschweigend als nicht-leer vorauszusetzen.*

Aufgaben

1. Zeige: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $f, g, h \in \mathrm{F}(I, \mathbb{R})$ gelten die Identitäten $(af + bg)h = a(fh) + b(gh)$ und $h(af + bg) = a(hf) + b(hg)$.

2. Beweise, dass $x^0, x^1, x^2, \ldots$ eine Basis des reellen Vektorraums $\mathrm{P}(\mathbb{R})$ bilden (*kanonische Basis*). — Die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m, 0, 0, \ldots$ der Normalform (1) erscheinen in dieser Betrachtungsweise dann gerade als die Koordinaten der betreffenden Polynomfunktion bezüglich dieser Basis.

3. Es seien $f, g \in \mathrm{P}(\mathbb{R})$ mit $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$ und $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$ gegeben. Bestimme die Koordinaten (Koeffizienten) von $f + g$ und $f \cdot g$ bezüglich der kanonischen Basis in $\mathrm{P}(\mathbb{R})$.

4. Der größte Exponent m mit $a_m \neq 0$ wird als *Grad* der in (1) gegebenen Polynomfunktion bezeichnet. Eine konstante Polynomfunktion $\neq 0$ hat den Grad 0. Beweise folgende Verallgemeinerung der Aussage von Aufgabe 2: Eine beliebige Folge von Polynomfunktionen p_n vom Grad $n = 0, 1, 2, \ldots$ bildet eine Basis von $\mathrm{P}(\mathbb{R})$.

5. Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig und $p_n(x) = (x - c)^n$ für $n \geq 0$. Nach Aufgabe 4 bilden die

Funktionen $p_0, p_1, p_2, \ldots$ eine Basis von $\mathrm{P}(\mathbb{R})$. Stelle x^n bezüglich dieser Basis dar.

6. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $\hat{\mathrm{F}}(I, \mathbb{R})$ die Menge aller Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$, für die gilt: Ist f nicht die identisch verschwindende Funktion, so gibt es höchstens endlich viele Stellen in I, an denen f Null wird oder nicht definiert ist.
Zeige: $\hat{\mathrm{F}}(I, \mathbb{R})$ ist ein Körper (mit der argumentweise erklärten Addition und Multiplikation von Funktionen).

§ 2. Komposition. Involutorische Funktionen

In der Analysis ist es ein viel geübtes Verfahren, zwei gegebene Funktionen f, g zu einer neuen Funktion $f \circ g$ zusammenzusetzen (sprich: ›f *nach* g‹). Diese Verknüpfung, üblicherweise *Komposition* oder *Verkettung* genannt, ist durch die Vorschrift

$$(f \circ g)(x) := f(g(x))$$

erklärt, welche verlangt, das Argument x im Funktionsausdruck $f(x)$ durch den Wert $g(x)$ zu ersetzen. Das ist natürlich nur für solche $x \in \mathrm{D}_g$ möglich, für die $g(x)$ dem Definitionsbereich von f angehört. Das unter dieser Voraussetzung existierende Verknüpfungsergebnis $f \circ g$ nennen wir im Folgenden *Verkettungs-* oder *Kompositionsprodukt*, gelegentlich auch *zusammengesetzte Funktion*. Ihr Definitionsbereich lässt sich wie folgt darstellen:

$$\mathrm{D}_{f \circ g} = \{x \in \mathrm{D}_g \mid g(x) \in \mathrm{D}_f\}\,.$$

Für auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktionen f, g ist $f \circ g$ ebenfalls auf ganz $\mathbb{R}$ definiert; insbesondere kann $\circ$ auf dem Ring $\mathrm{P}(\mathbb{R})$ der reellen Polynomfunktionen uneingeschränkt ausgeführt werden. Doch selbst auf dem Ring $\mathrm{F}(I, \mathbb{R})$ erweist sich die Komposition als eine nur *partielle*, d. h. nicht für alle Operanden ausführbare Verknüpfung. Beispielsweise ist das Verkettungsprodukt $f \circ g$ der Funktionen $f, g : I = (0, \infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = \log x$ und $g(x) = -\sqrt{1/x}$, wegen $\mathrm{D}_{f \circ g} = \emptyset$ die leere Funktion.

Es ist zudem sofort klar, dass $\circ$ nicht kommutativ ist, d. h. wir haben im Allgemeinen $f \circ g \neq g \circ f$. Hingegen gilt das Assoziativgesetz

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h). \tag{2}$$

Die Funktion $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $\mathrm{id}(x) = x$ und im Folgenden *Identität* genannt, erweist sich wegen

$$f \circ \mathrm{id} = \mathrm{id} \circ f = f \tag{3}$$

als (eindeutig bestimmtes) neutrales Element der Komposition.

Bezüglich der Addition und Multiplikation von Funktionen erfüllt $\circ$ die folgenden Verträglichkeitsbedingungen in Gestalt von Distributivgesetzen:

$$(f+g) \circ h = (f \circ h) + (g \circ h), \tag{4}$$

$$(f \cdot g) \circ h = (f \circ h) \cdot (g \circ h). \tag{5}$$

Die Gleichungen (2)–(5) ergeben sich unmittelbar aus den Definitionen der Verknüpfungen.

Existiert zu gegebener Funktion $f : \mathrm{D}_f \to A$ eine Funktion $g : A \to \mathrm{D}_f$ mit $\mathrm{D}_g = A$ derart, dass $f \circ g = \mathrm{id}$ und $g \circ f = \mathrm{id}$, so heißt g *inverse Funktion*[3] (oder *Umkehrfunktion*) von f. Eine Funktion kann höchstens eine Umkehrfunktion besitzen; sind nämlich g_1, g_2 invers zu f, so erhalten wir unter Verwendung von (2) und (3)

$$\begin{aligned} g_1 = g_1 \circ \mathrm{id} &= g_1 \circ (f \circ g_2) \\ &= (g_1 \circ f) \circ g_2 \\ &= \mathrm{id} \circ g_2 = g_2. \end{aligned}$$

Eine Funktion f heißt (*kompositionell*) *invertierbar*, wenn sie eine Umkehrfunktion besitzt. Diese ist eindeutig bestimmt und wird im Folgenden mit $\bar{f}$ bezeichnet. Offensichtlich gilt $\overline{\mathrm{id}} = \mathrm{id}$ sowie $\bar{\bar{f}} = f$.

Bemerkung. Man beachte, dass die Definitionsbereiche von $f \circ \bar{f}$ und $\bar{f} \circ f$ im Allgemeinen nicht übereinstimmen müssen. Das gilt beispielsweise für die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ und den (natürlichen) Logarithmus $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, die jeweils Umkehrfunktionen voneinander sind. Dementsprechend haben auch die Gleichungen $\log \circ \exp = \mathrm{id}$ und $\exp \circ \log = \mathrm{id}$ unterschiedliche Definitionsbereiche ($\mathbb{R}$ bzw. $(0, \infty)$).

[3] Gelegentlich wird die Bezeichnung *kompositionelle Inverse* verwendet, um diese von der multiplikativen Inversen zu unterscheiden.

Der Ausdruck ›id‹ auf den rechten Seiten bedeutet daher strenggenommen nicht dieselbe Funktion, sondern jeweils die auf den zugehörigen Definitionsbereich bezogene (eingeschränkte) Identität.

Die (kompositionell) invertierbaren Funktionen lassen sich auf einfache Weise charakterisieren.

Satz 1. *Eine Funktion ist invertierbar genau dann, wenn sie bijektiv ist.*

Beweis. Sei $f : \mathrm{D}_f \to A$ irgendeine Funktion. — 1. Ist f invertierbar und $\bar{f}$ die zu ihr inverse Funktion, so erhalten wir für alle $u, v \in \mathrm{D}_f$ mit $f(u) = f(v)$

$$u = (\bar{f} \circ f)(u) = \bar{f}(f(u)) = \bar{f}(f(v)) = (\bar{f} \circ f)(v) = v,$$

was besagt, dass die Funktion f injektiv (oder: eineindeutig) ist. Sie ist auch surjektiv, denn zu jedem $x \in A$ haben wir für $u := \bar{f}(x)$ selbstverständlich

$$f(u) = f(\bar{f}(x)) = (f \circ \bar{f})(x) = x.$$

2. Wir setzen nun umgekehrt f als bijektiv voraus. Die Menge A besteht (wegen der Surjektivität von f) aus genau denjenigen x, die f als Werte annehmen kann, d. h. für die $x = f(u)$ mit einem $u \in \mathrm{D}_f$ erfüllt ist. Aufgrund der Injektivität von f ist das u in $x = f(u)$ sogar *eindeutig* von x abhängig. Folglich lässt sich damit vermöge $g(x) = u$ eine Funktion $g : A \to \mathrm{D}_f$ definieren. Diese ist invers zu f, denn es gilt

$$\begin{array}{lll} & (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(u) = x & \text{für alle } x \in A = \mathrm{D}_g, \\ \text{sowie} & (g \circ f)(x) = g(f(x)) = x & \text{für alle } x \in \mathrm{D}_f. \end{array} \qquad \Diamond$$

Die folgende Aussage gibt Auskunft über die Inversenbildung bei einer zusammengesetzten Funktion.

Satz 2 (Umkehrregel). *Seien f, g irgend zwei invertierbare Funktionen, für die das Verkettungsprodukt $f \circ g$ definiert ist. Dann ist auch $f \circ g$ invertierbar, und es gilt:*

$$\overline{f \circ g} = \bar{g} \circ \bar{f}.$$

Beweis. Wir bestätigen, dass $\bar{g} \circ \bar{f}$ invers zu $f \circ g$ ist. In der Tat ergibt sich mit (2) und (3) sofort

$$\begin{aligned}(\bar{g} \circ \bar{f}) \circ (f \circ g) &= (\bar{g} \circ (\bar{f} \circ f)) \circ g \\ &= (\bar{g} \circ \mathrm{id}) \circ g \\ &= \bar{g} \circ g = \mathrm{id}.\end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung geht im Übrigen unmittelbar hervor, dass das Kompositionsprodukt $\bar{g} \circ \bar{f}$ wohldefiniert ist, nämlich auf der Menge aller $(f \circ g)(x)$ mit $x \in \mathrm{D}_{f \circ g}$. – Auf dieselbe Weise lässt sich natürlich auch die Gleichheit $(f \circ g) \circ (\bar{g} \circ \bar{f}) = \mathrm{id}$ verifizieren. $\Diamond$

Involutorische Funktionen. — Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *involutorisch* (oder *Involution*), wenn $f \circ f = \mathrm{id}$ gilt. Es ist unmittelbar klar, dass ein solches f invertierbar ist (und damit bijektiv nach Satz 1). Dabei gilt $\bar{f} = f$, d. h. f ist Umkehrfunktion von sich selbst. Die Ausdrücke $-x$ und ${}^1/_x$ definieren einfachste Beispiele involutorischer Funktionen.

Im Folgenden sollen einige grundlegende Eigenschaften zusammengestellt werden.

Satz 3. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Involution $\neq \mathrm{id}$. Dann ist f streng monoton fallend und besitzt genau einen Fixpunkt $a \in \mathbb{R}$ mit $f(a) = a$.*

Beweis. 1. Als involutorische Funktion ist f invertierbar. Zusammen mit der Stetigkeit von f ergibt sich daraus nach einem bekannten Satz der Analysis[4], dass f streng monoton ist. Tatsächlich kann f, da involutorisch, nur eine fallende Funktion sein. Zum Beweis werde ein $c \in \mathbb{R}$ mit $f(c) \neq c$ gewählt (was wegen $f \neq \mathrm{id}$ stets möglich ist). Wir nehmen zunächst $f(c) > c$ an. Wäre f streng monoton wachsend, so ergäbe sich hieraus sofort der Widerspruch $c = f(f(c)) > f(c)$; und auch der verbleibende Fall $f(c) < c$ führt auf einen Widerspruch: $c = f(f(c)) < f(c)$.

2. Um die Existenz eines Fixpunkts zu zeigen, betrachten wir die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion $\phi(x) := f(x) - x$. Wie in Teil 1 wählen wir wieder ein

[4] Vgl. etwa Friedhelm Erwe: *Differential- und Integralrechnung*, Band I, Bibliographisches Institut, Mannheim 1962, rev. Nachdruck 1964, S. 116–117.

$c \in \mathbb{R}$ mit $f(c) \neq c$. Man überzeugt sich unmittelbar davon, dass $\phi(c)$ und $\phi(f(c))$ verschiedene Vorzeichen haben. Der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen sichert dann die Existenz einer zwischen c und $f(c)$ gelegenen Zahl a mit $\phi(a) = 0$, d. h. $f(a) = a$.

3. Schließlich zeigen wir die Einzigkeit des Fixpunkts. Sei dazu indirekt $b \neq a$ mit $f(b) = b$ angenommen. Ohne Einschränkung können wir $a < b$ voraussetzen. Da f streng monoton fällt, hat man sofort den Widerspruch $a = f(a) > f(b) = b$. ◊

Korollar. *Ist f im Fixpunkt a differenzierbar, so hat die Tangente dort die Steigung $f'(a) = -1$.*

Beweis. Die Kettenregel für zusammengesetzte Funktionen liefert

$$(f \circ f)'(a) = f'(f(a)) \cdot f'(a) = f'(a)^2 = 1.$$

Da f streng monoton fällt, kann hier nur $f'(a) = -1$ sein. ◊

Stetige Involutionen erlauben eine charakteristische Zerlegung, die in folgender Aussage genauer spezifiziert wird.

Satz 4. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion $\neq \mathrm{id}$. Es gilt: f ist involutorisch genau dann, wenn eine stetige und bijektive Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert, so dass $f = g \circ (-\mathrm{id}) \circ \bar{g}$, das heißt: $f(x) = g(-\bar{g}(x))$ für alle $x \in \mathbb{R}$.*

Beweis. 1. Da $-\mathrm{id}$ involutorisch ist, gilt dies auch für f (siehe Aufgabe 11).

2. Wir wollen nun umgekehrt zeigen[5], dass für jede stetige Involution $\neq \mathrm{id}$ eine solche Darstellung erreicht werden kann. Sei a der eindeutig bestimmte Fixpunkt von f, dessen Existenz durch Satz 3 garantiert ist. Damit definieren wir die (stetige) Funktion

$$f^*(x) := f(x + a) - a, \tag{6}$$

die ebenfalls involutorisch ist, nun aber 0 als einzigen Fixpunkt besitzt (vgl. Aufgabe 12). Zunächst soll die behauptete Darstellung für f^* angegeben

[5] Dabei folgen wir einer Beweisidee von Patrick J. McCarthy: Functional nth Roots of Unity, *The Mathematical Gazette*, Vol. 64, No. 428 (1980), 107–115.

werden. Dazu nutzen wir die Tatsache, dass der Fixpunkt 0 den Funktionsgraphen von f^* in zwei spiegelbildliche Hälften zerteilt. Da f^* streng monoton fällt, verläuft sein Graph links vom Nullpunkt vollständig im zweiten Quadranten des Koordinatensystems, denn wir haben $f^*(x) \geq f^*(0) = 0$ für $x \leq 0$. Die Einschränkung von f^* auf diesen Bereich wollen wir im Folgenden mit $\varphi : (-\infty, 0] \to [0, \infty)$ bezeichnen; es gilt demnach

$$\varphi(x) := f^*(x) \geq 0 \quad \text{für alle } x \leq 0. \tag{7}$$

Als Einschränkung einer bijektiven Funktion ist φ ebenfalls bijektiv und besitzt damit nach Satz 1 eine Umkehrfunktion $\overline{\varphi} : [0, \infty) \to (-\infty, 0]$. Deren Graph verläuft vollständig im vierten Quadranten (als an der Geraden $y = x$ gespiegeltes Bild des Graphen von φ); es gilt nämlich

$$\overline{\varphi}(x) = f^*(x) \leq 0 \quad \text{für alle } x \geq 0. \tag{8}$$

Damit erklären wir nun die Funktion $g^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch die Vorschrift

$$g^*(x) := \begin{cases} \overline{\varphi}(-x) & \text{falls } x \leq 0; \\ x & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

Ersichtlich ist g^* stetig und invertierbar. Die Umkehrfunktion lautet

$$\overline{g^*}(x) = \begin{cases} -\varphi(x) & \text{falls } x \leq 0; \\ x & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

Sei nun $x \leq 0$. Dann erhalten wir aus (7) zunächst $\varphi(x) \geq 0$ und aufgrund der Eigenschaften von g^*

$$g^*(-\overline{g^*}(x)) = g^*(\varphi(x)) = \varphi(x).$$

Andererseits wird für $x \geq 0$

$$g^*(-\overline{g^*}(x)) = g^*(-x) = \overline{\varphi}(-(-x)) = \overline{\varphi}(x).$$

Insgesamt ergibt sich hieraus mit (7) und (8) eine Darstellung von f^* in der gewünschten Form: $f^*(x) = g^*(-\overline{g^*}(x))$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

3. Schließlich soll auch die ursprünglich vorgegebene Involution f, welche a als Fixpunkt hat, auf solche Weise dargestellt werden. Setzen wir dazu $g(x) := g^*(x)+a$, so ergibt sich aus (6) und der Darstellung für f^* in Teil 2 für alle reellen x:

$$\begin{aligned} f(x) &= f^*(x-a)+a \\ &= g^*(-\overline{g^*}(x-a))+a \\ &= g(-\bar{g}(x)). \end{aligned}$$

Natürlich ist auch g stetig, womit der Satz bewiesen ist. $\Diamond$

Bemerkung. (a) Die in der Zerlegung von f auftretende Funktion g ist keineswegs eindeutig bestimmt. So lässt sich in Teil 2 des Beweises die Funktion g^* allgemeiner wie folgt definieren:

$$g^*(x) := \begin{cases} \overline{\varphi}(h(-x)) & \text{falls } x \leq 0; \\ h(x) & \text{falls } x \geq 0, \end{cases}$$

wo h eine irgendeine stetige Bijektion $[0,\infty) \to [0,\infty)$ mit $h(0) = 0$ sein kann.

(b) Zwei Funktionen g_1, g_2 besitzen die für g in Satz 4 bewiesene Eigenschaft genau dann, wenn die eine aus der anderen durch Komposition mit einer bijektiven, stetigen und ungeraden Funktion $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hervorgeht, d. h. wenn gilt: $g_2 = g_1 \circ \psi$.

Aufgaben

7. Folgere die Distributivgesetze (4) und (5) direkt aus den Definitionen von Addition, Multiplikation und Komposition.

8. Für beliebiges reelles a sei $f_a(x) := a \cdot \cos x$. Für welche a ist $\tan \circ f_a$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert?

9. Sei $h(x) := {}^1\!/_x$. Bestimme den Definitionsbereich von $h \circ \sin \circ h$.

10. (a) Für welche Werte von $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ ist die gebrochene lineare Funktion $f(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ invertierbar? Gib den Ausdruck $\bar{f}(x)$ für die Umkehrfunktion an.

(b) Für welche $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ ist f involutorisch?
(c) Erörtere Anzahl und Lage der Fixpunkte von f (aus (b)).

11. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ irgendeine invertierbare Funktion. Zeige: f ist involutorisch genau dann, wenn $g \circ f \circ \bar{g}$ involutorisch ist.

12. Sei f eine Involution, $a, b \in \mathbb{R}$ und f^* definiert durch $f^*(x) = f(x + a - b) - a + b$. Zeige: f^* ist involutorisch, und es gilt $f(a) = a$ genau dann, wenn $f^*(b) = b$.

13. Beweise die Aussagen (a) und (b) in der Bemerkung zu Satz 4.

§ 3. Ein axiomatischer Rahmen

Eine Reihe von grundlegenden algebraischen Sachverhalten, die in den beiden vorangehenden Abschnitten exemplarisch für das Rechnen mit reellen Funktionen herausgearbeitet wurden, sollen nun als Axiome in die Definition einer abstrakten Struktur $\mathbb{F}$ einfließen. Die Elemente (Objekte) aus $\mathbb{F}$ übernehmen dabei rein formal die Rolle von Funktionen (eines einzigen Arguments). Ebenso undefiniert bleiben die zweistelligen Operationen (hier: Addition ›$+$‹, Multiplikation ›$\cdot$‹ und Komposition ›$\circ$‹), die auf der Trägermenge $\mathbb{F}$ eine algebraische Struktur etablieren. Das ganze Verfahren unterscheidet sich also in nichts von der formalen Axiomatik, mittels der man in gewohnter Weise abstrakte Begriffe wie ›Gruppe‹, ›Körper‹ oder ›Vektorraum‹ einführt.

Axiomensystem für eine Funktionenalgebra. — Nach den in §§ 1-2 entwickelten Vorbereitungen bieten die Axiome für den auf unsere Zwecke zugeschnittenen Begriff einer *Funktionenalgebra* keine wirklichen Überraschungen mehr. Das Addieren und Multiplizieren von Funktionen ist summarisch in folgendem Axiom geregelt:

(F0) $\mathbb{F}$ ist ein unitärer kommutativer Integritätsring der Charakteristik 0.

Diese Aussage soll hier zunächst etwas näher erläutert werden. Dass die Struktur $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ ein unitärer kommutativer Integritätsring ist, beinhaltet im Einzelnen folgende Sachverhalte:

(i) $\mathbb{F}$ ist bezüglich der Addition eine kommutative Gruppe (deren neutrales Element wie üblich mit 0 bezeichnet werde).

(ii) $\mathbb{F}$ ist bezüglich der Multiplikation eine kommutative Halbgruppe mit neutralem Element (das wie üblich mit 1 bezeichnet werde).

(iii) Es gilt das Distributivgesetz[6] $f \cdot (g+h) = f \cdot g + f \cdot h$ für alle $f, g, h \in \mathbb{F}$.

(iv) $\mathbb{F}$ ist nullteilerfrei, d. h. es gilt $f \cdot g \neq 0$ für alle $f, g \in \mathbb{F}$ mit $f \neq 0$ und $g \neq 0$. Äquivalent dazu ist die Kürzungsregel: $f \cdot g = f \cdot h$ mit $f \neq 0$ impliziert $g = h$ (für alle $f, g, h \in \mathbb{F}$).

Die Elemente $f \in \mathbb{F}$ stehen für ›reine‹, argumentfrei zu denkende Funktionen; diese haben von sich aus keinen Definitionsbereich und sind somit auch nicht durch einen Ausdruck der Form $f(x)$ spezifiziert. Eine neben und unabhängig von $\mathbb{F}$ bestehende Menge von Zahlen, die als Argumente dienen könnten, kommt hier zudem ohnehin nicht ins Spiel. Immerhin haben aber 0 und 1, als Elemente von $\mathbb{F}$, ›zahlenartigen‹ Charakter, und in der Tat lassen sich mit ihrer Hilfe Konstanten definieren, nämlich in Gestalt ›konstanter Funktionen‹ in $\mathbb{F}$.

Eine erste, naheliegende Idee besteht darin, zu gegebener natürlicher Zahl $n \geq 0$ die Summe $s(n) := 1 + 1 + \cdots + 1$ zu bilden, worin die Eins von $\mathbb{F}$ n-mal als Summand auftritt.[7] Es ist durchaus möglich, dass $s(n)$ für gewisse positive Werte von n Null wird, wie etwa im Restklassenring modulo 5, wo $s(5) = 0$ gilt. Ist jedoch – wie in (F0) gefordert – die Charakteristik von $\mathbb{F}$ gleich Null, so besagt dies gerade, dass $s(n) \neq 0$ für alle $n \geq 1$.

Schließlich können wir die Abbildung s sinngemäß noch auf ganz $\mathbb{Z}$ erweitern, indem wir für $n < 0$ den Wert $s(n) := -s(-n)$ festlegen. Man überzeugt sich jetzt leicht davon, dass s ein Monomorphismus $(\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{F}, +)$ ist (siehe Aufgabe 14); durch ihn erscheint die Gesamtheit der $s(n)$ $(n \in \mathbb{Z})$ als isomorphes Bild der additiven Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ innerhalb von $\mathbb{F}$. Diese strukturelle Übereinstimmung rechtfertigt es, auch bezeichnungstechnisch nicht mehr zwischen den speziellen ›konstanten Funktionen‹

[6] Da die Multiplikation kommutativ ist, folgt hieraus auch das rechtsseitige Distributivgesetz $(g + h) \cdot f = g \cdot f + h \cdot f$, das für Ringe im allgemeinen Fall eigens zu postulieren ist.

[7] Diese etwas saloppe Erklärung kann präziser gefasst werden, indem man die Abbildung s rekursiv durch $s(0) = 0, s(n + 1) = s(n) + 1$ definiert.

$s(n)$ von $\mathbb{F}$ und den durch sie dargestellten ganzen Zahlen n zu unterscheiden, d. h. wir schreiben künftig einfach n anstelle von $s(n)$ und identifizieren dementsprechend auch die Mengen $\{s(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ und $\mathbb{Z}$.

Die restlichen Axiome regeln den Gebrauch der Komposition – auch hier vorausgesetzt als eine lediglich *partielle Operation* auf $\mathbb{F}$ – und ihr Zusammenwirken mit der in $\mathbb{F}$ gegebenen Addition und Multiplikation. Dazu gehört die Annahme eines bezüglich $\circ$ neutralen Elements, das hier (in (F4)) und künftighin mit ι bezeichnet werden soll:

(F1) $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h,$

(F2) $(f + g) \circ h = (f \circ h) + (g \circ h),$

(F3) $(f \cdot g) \circ h = (f \circ h) \cdot (g \circ h),$

(F4) $f \circ \iota = \iota \circ f = f,$

(F5) $1 \circ 0 = 1.$

Die Axiome (F1–4) entsprechen in dieser Reihenfolge den Regeln (2), (4), (5) und (3), die wir bereits aus § 2 in ihrer Fassung für (einstellige) reelle Funktionen kennen. Das feste Symbol ›ι‹ für das neutrale Element der Komposition ist gerechtfertigt, da dieses durch (F4) eindeutig bestimmt ist.[8] Sinngemäß, d. h. aufgrund seiner Entsprechung zu id, bezeichnen wir ι auch als *Identitätsfunktion* (oder kurz *Identität*).

Im Folgenden stellen wir zunächst einfachste Tatsachen und Begriffsbildungen zusammen, die sich direkt aus den obigen Axiomen ergeben bzw. von den §§ 1–2 wörtlich übernehmen lassen.

Aus (F2) folgt für alle $f, g \in \mathbb{F}$

$$0 \circ f = 0, \tag{9}$$

$$(-f) \circ g = -(f \circ g). \tag{10}$$

Die simplen Beweise können hier ausgespart bleiben (siehe Aufgabe 15).

Ferner gilt

$$\iota \neq 0 \quad \text{und} \quad \iota \neq 1. \tag{11}$$

Beweis. Aufgrund seiner Charakteristik ist der Ring $\mathbb{F}$ nichttrivial, d. h. es ist $1 \neq 0$. Wäre nun $\iota = 0$, so hätte man nach (F4) (mit $f = 1$) und (9) sofort

[8] Ist nämlich auch ι_1 ein neutrales Element, so hat man sofort $\iota = \iota_1 \circ \iota = \iota \circ \iota_1 = \iota_1$.

den Widerspruch $1 = 1 \circ 0 = 0 \circ 1 = 0$. — Wäre hingegen $\iota = 1$, so ergäbe sich mittels (F5) derselbe Widerspruch: $0 = \iota \circ 0 = 1 \circ 0 = 1$. $\Diamond$

Die *Einheitengruppe* von $\mathbb{F}$ werde mit $\mathbb{F}^\times$ bezeichnet. Sie besteht aus den Elementen $f \in \mathbb{F}$, die ein multiplikatives Inverses f^{-1} besitzen (gleichbedeutend auch in reziproker Form $1/f$ notiert). In jedem Fall gehören 1 und -1 zu $\mathbb{F}^\times$.

Ähnlich wie in § 2 definieren wir zueinander (kompositionell) *inverse* Funktionen $f, g \in \mathbb{F}$ durch die Bedingung $f \circ g = g \circ f = \iota$. Ebenso übernehmen wir die früher eingeführte Schreibweise $\bar{f}$ für die dann zu f eindeutig bestimmte Umkehrfunktion g. Natürlich gilt auch $f = \bar{g}$ und behält wortwörtlich die in Satz 2 formulierte Umkehrregel ihre Gültigkeit. Eine Funktion $f \in \mathbb{F}$ ist involutorisch, wenn $f \circ f = \iota$ (und damit $\bar{f} = f$).

Konstanten. Polynomiale Funktionen. — Das soweit vorgestellte Axiomensystem einer Funktionenalgebra $\mathbb{F}$ bezieht sich auf nur eine Sorte von Dingen, die als *Funktionen* bezeichnet werden, da dies der informellen inhaltlichen Vorstellung entspricht, an der sich die Formulierung der Axiome und die daran geknüpften Begriffsbildungen ausrichten. Anders als bei den in §§ 1-2 betrachteten reellen Funktionen gibt es hier nicht mehr die ontologische Zweiteilung in Zahlen einerseits und auf Zahlenmengen operierenden Funktionen andererseits. Nichtsdestoweniger ist es möglich, aus dem in $\mathbb{F}$ gegebenen ›Material‹ eine gewisse Teilmenge auszusondern, deren Elemente (Funktionen) ersatzweise die Rolle von Zahlen übernehmen. Die Rekonstruktion der ganzzahligen ›Konstanten‹ $n \in \mathbb{Z}$ als spezielle Elemente von $\mathbb{F}$ ist ein Beispiel dafür.

Spätestens jetzt benötigen wir daher aber auch eine Definition, die allgemein und in plausibler Weise festlegt, wann eine Funktion als konstant anzusehen ist. Das folgende einfache Kriterium hat Karl Menger [*Algebra of Analysis*, Notre Dame Mathematical Lectures No. 3, Indiana 1944] vorgeschlagen:

Definition 1. Eine Funktion $f \in \mathbb{F}$ heißt *Konstante* oder *konstante Funktion*, wenn $f \circ 0 = f$ gilt. Die Menge der Konstanten werde mit $\mathbb{K}$ bezeichnet.

Auf den ersten Blick mag dieses Kriterium als schwach erscheinen; es reicht aber gleichwohl aus, um die Konstanz einer Funktion wie folgt in uneingeschränkter Form zur Geltung zu bringen:

$$\text{Für alle } c \in \mathbb{K} \text{ und für alle } f \in \mathbb{F} \text{ gilt: } \; c \circ f = c. \tag{12}$$

Beweis. Mit (2), (9) sowie zweimaliger Anwendung von Definition 1 erhalten wir $c \circ f = (c \circ 0) \circ f = c \circ (0 \circ f) = c \circ 0 = c$. ◊

Satz 5. $\mathbb{K}$ *ist ein unter der Komposition* $\circ$ *abgeschlossener unitärer und nullteilerfreier Unterring von* $\mathbb{F}$*; der kleinste solche Unterring ist* $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{K}$.

Beweis. 1. Axiom (F5) besagt gerade, dass $1 \in \mathbb{K}$. Seien nun $a, b \in \mathbb{K}$ beliebig gewählt. Wir haben lediglich zu zeigen, dass dann auch $a - b$, $a \cdot b$ und $a \circ b$ konstante Funktionen gemäß Definition 1 sind. In der Tat ergibt sich mittels Axiom (F2) und (10)

$$(a - b) \circ 0 = (a \circ 0) + ((-b) \circ 0) = a - (b \circ 0) = a - b.$$

Noch einfacher erhalten wir mittels Axiom (F3)

$$(a \cdot b) \circ 0 = (a \circ 0) \cdot (b \circ 0) = a \cdot b.$$

Nach (12) haben wir speziell $a \circ b = a \in \mathbb{K}$ und damit auch die Abgeschlossenheit von $\mathbb{K}$ unter der Komposition. Die Nullteilerfreiheit ist selbstverständlich, da bereits im Oberring $\mathbb{F}$ gegeben.

2. $\mathbb{Z}$ ist der von 1 (= Eins von $\mathbb{F}$) erzeugte und damit kleinste unitäre Unterring von $\mathbb{F}$. Es ist daher noch zu zeigen, dass die Elemente von $\mathbb{Z}$ tatsächlich Konstanten sind (was dem Leser überlassen bleibt; siehe Aufgabe 17). Hieraus ergibt sich dann die Abgeschlossenheit bezüglich $\circ$ als triviale Folgerung. ◊

Bemerkung. Ist das Verkettungsprodukt zweier Funktionen $f, g \in \mathbb{F}$ nicht definiert, so heißt das: Es gibt kein $h \in \mathbb{F}$ mit $f \circ g = h$. In Anlehnung an die leere Funktion (siehe Ende von § 1), die bei der Zusammensetzung konkreter Funktionen (mit Definitionsbereich) entstehen kann, können wir hier ein abstraktes Analogon $\curlywedge$ zu $\emptyset$ einführen, das vereinbarungsgemäß *nicht* in $\mathbb{F}$ enthalten ist und als Operand in jeglichem Funktionsterm diesen zu $\curlywedge$ annihiliert. Die Gleichung $f \circ g = \curlywedge$ drückt dann gerade aus, dass $f \circ g$ nicht definiert ist. Im Hinblick auf diese Vereinbarung ($\curlywedge \notin \mathbb{F}$) besagt nun umgekehrt die Abgeschlossenheit einer Menge $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{F}$ unter $\circ$, dass die Komposition dort eine *totale* Verknüpfung der Form $\mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ ist.

Die Argumente einer gewöhnlichen Funktion, etwa vom Typ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sind Konstanten (reelle Zahlen). Da sich nun – wie Satz 5 zeigt – auch in einer abstrakten Funktionenalgebra $\mathbb{F}$ ein ihr eigener, gleichsam von Haus aus mitgegebener Ring $\mathbb{K}$ von Konstanten abgrenzen lässt, liegt es nahe, die Anwendung einer Funktion auf eine Konstante (als Argument) mit Hilfe der in $\mathbb{F}$ gegebenen Verkettung nachzubilden. Mit jedem $f \in \mathbb{F}$ assoziieren wir daher eine Abbildung $f^* : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ vermöge der Vorschrift

$$f^*(c) := f \circ c. \tag{13}$$

Man beachte: Die Funktion f^* ist keinesfalls ein Element von $\mathbb{F}$, sondern eine Abbildung im gewöhnlichen Sinn. Ihr Definitionsbereich besteht aus allen Konstanten $c \in \mathbb{K}$, für die $f \circ c$ existiert. Ist letzteres der Fall, so ist $f \circ c$ in der Tat eine Konstante, denn man hat $(f \circ c) \circ 0 = f \circ (c \circ 0) = f \circ c$.

Wir bezeichnen nun mit $\mathbb{F}^*$ die Menge $\{f^* : \mathbb{K} \to \mathbb{K} \mid f \in \mathbb{F}\}$ und etablieren auf ihr die (wie üblich argumentweise definierten) Verküpfungen: Addition, Multiplikation und Verkettung von Funktionen (als Ersetzung nach dem Muster von § 3). Der Einfachheit halber sollen diese Operationen mit denselben Symbolen der Funktionenalgebra $\mathbb{F}$ notiert werden; durch die Kennzeichnung der ›echten‹ Funktionen mit einem Stern sind Missverständnisse dabei nicht zu befürchten.

Es zeigt sich, dass $\mathbb{F}^*$ ein strukturtreues Abbild der zugrunde liegenden abstrakten Funktionenalgebra $\mathbb{F}$ ist:

Satz 6. *Die Abbildung* $\mathbb{F} \ni f \mapsto f^* \in \mathbb{F}^*$ *ist ein Homomorphismus, d. h. für alle* $f, g \in \mathbb{F}$ *gelten die Aussagen:* $(f + g)^* = f^* + g^*$, $(f \cdot g)^* = f^* \cdot g^*$, $(f \circ g)^* = f^* \circ g^*$*; ferner gilt* $a^* = a$ *für* $a \in \mathbb{K}$ *sowie* $\iota^* = \mathrm{id}$.

Beweis. Sei $c \in \mathbb{K}$ beliebig. Dann ergibt sich mit (13) und (F2)

$$\begin{aligned}(f + g)^*(c) &= (f + g) \circ c \\ &= (f \circ c) + (g \circ c) \\ &= f^*(c) + g^*(c) \\ &= (f^* + g^*)(c)\end{aligned}$$

und damit $(f+g)^* = f^* + g^*$. Auf dieselbe Weise erhält man mittels (F3) die Aussage zur Multiplikation. — Für die Verkettung liefert (F1):

$$\begin{aligned} (f \circ g)^*(c) &= (f \circ g) \circ c \\ &= f \circ (g \circ c) \\ &= f \circ g^*(c) \\ &= f^*(g^*(c)) \\ &= (f^* \circ g^*)(c). \end{aligned}$$

Für beliebiges $a \in \mathbb{K}$ hat man nach (12) speziell $a^*(c) = a \circ c = a$. Somit ist a^* die Funktion $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, die für jedes Argument die Konstante a liefert. Die Gleichheit $\iota^* = \mathrm{id}$ folgt unmittelbar aus $\iota^*(c) = \iota \circ c = c$. ◊

Die Frage liegt nahe, ob der Homomorphismus in Satz 6 darüber hinaus ein Monomorphismus ist, d. h. ob $f^* = g^*$ die Gleichheit $f = g$ impliziert. Offensichtlich ist dies äquivalent zur Aussage[9]

$$\forall c \in \mathbb{K} : f \circ c = g \circ c \Longrightarrow f = g. \tag{14}$$

Es ist in dieser Allgemeinheit nicht ohne weiteres zu erkennen, ob (14) sich bereits aus den Axiomen (F0-5) folgern lässt. Schwächt man (F0) allerdings dahingehend ab, dass $\mathbb{F}$ ein beliebiger kommutativer Ring mit $1 \neq 0$ sein darf, so lassen sich leicht endliche Modelle (bestehend aus gewissen Polynomen über Restklassenringen) angeben, in denen (14) ungültig wird [vgl. K. Menger (1944),13–15]. Im Fall unendlicher Integritätsringe jedoch liegen Gegenbeispiele nicht eben auf der Hand. Die weiter unten beschriebenen Modelle für (F0–5) sind aus klassischen Funktionen bestehende Algebren und erfüllen erwartungsgemäß sämtlich auch (14).

Die Frage, inwieweit (14) aus (F0–5) gefolgert werden kann, hat aber zumindest teilweise eine positive Antwort. Dazu betrachten wir den Ring $\mathbb{K}[X]$ der (algebraisch aufgefassten) Polynome über $\mathbb{K}$ in einer Unbestimmten X. Ein solches Polynom hat die Gestalt

$$p = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n \quad \text{mit } a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K}.$$

[9] K. Menger [*Algebra of Analysis*, 1944] spricht von einer *Konstantenbasis* $\mathbb{K}$ in $\mathbb{F}$, wenn dieses Postulat in der Funktionenalgebra $\mathbb{F}$ erfüllt ist

Natürlich ist p kein Element von $\mathbb{F}$. Ersetzen wir aber in p die Unbestimmte X durch eine Funktion $h \in \mathbb{F}$, so gehört das Ergebnis

$$E_p(h) := a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n \tag{15}$$

zur Funktionenalgebra $\mathbb{F}$. Die speziell für $h = \iota$ entstehenden Funktionen nennen wir *polynomial* oder *innere Polynome von* $\mathbb{F}$ und bezeichnen die zugehörige Gesamtheit sinngemäß mit $\mathbb{K}[\iota]$. Somit ist $f \in \mathbb{K}[\iota]$ genau dann, wenn $f = E_p(\iota)$ für ein $p \in \mathbb{K}[X]$.

Aufschlussreich ist nun der Übergang von f zu f^*. Nach Satz 6 ergibt sich

$$\begin{aligned} E_p(\iota)^* = f^* &= a_0^* + a_1^* \iota^* + a_2^* (\iota^*)^2 + \cdots + a_n^* (\iota^*)^n \\ &= a_0 + a_1 \mathrm{id} + a_2 \mathrm{id}^2 + \cdots + a_n \mathrm{id}^n = E_p. \end{aligned} \tag{16}$$

Die Menge aller $E_p : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ mit $p \in \mathbb{K}[X]$ werde mit $\mathrm{P}(\mathbb{K})$ bezeichnet (in Analogie zum Ring $\mathrm{P}(\mathbb{R})$ aus § 1).

Satz 7. *Es bestehen (bezüglich Addition, Multiplikation und Komposition) die Isomorphien:* $\mathbb{K}[\iota] \cong \mathbb{K}[X] \cong \mathrm{P}(\mathbb{K})$.

Beweis. 1. Wir stellen zunächst fest, dass die Identität $\iota \in \mathbb{F}$ ein in Bezug auf $\mathbb{K}$ transzendentes Element ist. Denn anderenfalls hätte man $E_p(\iota) = 0$ für ein geeignetes $p = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ und damit nach (16): $E_p(\iota)^* = 0^* = 0$. Da jedoch die Potenzen id^0, id^1, $\mathrm{id}^2, \ldots$ eine Basis des Vektorraums $\mathrm{P}(\mathbb{K})$ bilden[10], müssen sämtliche Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ verschwinden. Dies ist ein Widerspruch zu $p \neq 0$, womit die Transzendenz von ι gezeigt ist.

2. Nach einem bekannten Lehrsatz der Algebra ergibt sich aus der Transzendenz von ι bezüglich $\mathbb{K}$ die Isomorphie $\mathbb{K}[X] \cong \mathbb{K}[\iota]$, und zwar vermittelt durch den Ringisomorphismus[11]

$$\mathbb{K}[X] \ni p \mapsto E_p(\iota) \in \mathbb{K}[\iota].$$

---

[10] Vgl. dazu die Aufgabe 2–§ 1, deren Lösung beinahe wörtlich auch für den Fall gilt, dass die Koeffizienten aus dem unendlichen Integritätsring $\mathbb{K}$ statt aus $\mathbb{R}$ genommen werden.

[11] Siehe etwa L. J. Okunjew: Der Ring der Polynome und der Körper der rationalen Funktionen (hier: Satz 3, S. 124–126); in: Alexandroff, Markuschewitsch, Chinchin, *Enzyklopädie der Elementarmathematik*, Band II: Algebra; Berlin 1972.

Eine einfache Rechnung bestätigt, dass dieser Isomorphismus auch die Komposition einbezieht, d. h. es gilt $E_{p\circ q}(\iota) = E_p(\iota) \circ E_q(\iota)$ für alle $p, q \in \mathbb{K}[X]$. Hierbei ist $p \circ q$ als das Polynom definiert, welches entsteht, indem wir in p die Unbestimmte X durch das Polynom q ersetzen.

3. Die Abbildung $E : p \mapsto E_p$, welche die Unbestimmte eines Polynoms p durch die Identität id ersetzt, ist ein Ringhomomorphismus $\mathbb{K}[X] \to \mathrm{P}(\mathbb{K})$. Sofern nun aber mit $\mathbb{K}$ ein unendlicher Integritätsring vorliegt, ist E nach einem grundlegenden Satz der Algebra[12] sogar injektiv; das heißt: Die Polynomfunktionen $E_p, E_q \in \mathrm{P}(\mathbb{K})$, die aus voneinander verschiedenen Polynomen p, q hervorgehen, sind ebenfalls voneinander verschieden. Auch dieser Isomorphismus erstreckt sich auf die Komposition, denn mit (16) und Satz 6 ergibt sich unter Verwendung der Gleichung aus der obigen Nr. 2:

$$E_{p\circ q} = E_{p\circ q}(\iota)^* = (E_p(\iota) \circ E_q(\iota))^* = E_p(\iota)^* \circ E_q(\iota)^* = E_p \circ E_q.$$

Damit ist der Nachweis von $\mathbb{K}[X] \cong \mathrm{P}(\mathbb{K})$ erbracht. $\Diamond$

Satz 8. *Die inneren Polynome von $\mathbb{F}$ bilden einen unter der Komposition $\circ$ abgeschlossenen unitären kommutativen und nullteilerfreien Unterring $\mathbb{K}[\iota]$ von $\mathbb{F}$, in dem (14) erfüllt ist.*

Beweis. Die Menge $\mathbb{K}[\iota] \subseteq \mathbb{F}$ ist nach Satz 7 isomorph zum Polynomring $\mathbb{K}[X]$ und daher ein kommutativer Unterring von $\mathbb{F}$; die $1 \in \mathbb{F}$ ist auch das Einselement von $\mathbb{K}[\iota]$. Aus der Algebra ist bekannt[13], dass der Polynomring über einem Integritätsring wieder ein Integritätsring ist; folglich ist auch $\mathbb{K}[\iota]$ nullteilerfrei. Die Abgeschlossenheit von $\mathbb{K}[\iota]$ unter $\circ$ ist ebenfalls schon in Satz 7 enthalten (Abschnitt Nr. 2 des Beweises; vgl. auch Aufgabe 17).

Wir haben somit lediglich noch (14) zu verifizieren.

Laut Satz 6 ist die Abbildung $\mathbb{F} \ni f \mapsto f^* \in \mathbb{F}^*$ ein Homomorphismus (bezüglich Addition, Multiplikation und Komposition). Er lässt sich auf die Unteralgebra $\mathbb{K}[\iota]$ einschränken zu einer Abbildung $\mathbb{K}[\iota] \to \mathrm{P}(\mathbb{K})$. Letztere ist nun in der Tat injektiv (und vermittelt infolgedessen die Isomorphie $\mathbb{K}[\iota] \cong \mathrm{P}(\mathbb{K})$, die ja schon anderweitig – aufgrund von Satz 7 – feststeht).

[12] Vgl. auch dazu Okunjew (Fußnote 11), Satz 11, S. 153–154
[13] Siehe Okunjew (Fußnote 11), Satz 4, S. 128.

Zum Beweis seien irgend zwei polynomiale Funktionen $f, g \in \mathbb{K}[\iota]$ mit $f^* = g^*$ angenommen. Dann gilt $f = E_p(\iota)$ und $g = E_q(\iota)$ mit geeigneten $p, q \in \mathbb{K}[X]$. Hieraus folgt mittels (16): $E_p = E_p(\iota)^* = E_q(\iota)^* = E_q$. In Abschnitt Nr. 3 des Beweises zu Satz 7 wurde die Injektivität der Abbildung $E : \mathbb{K}[X] \ni p \mapsto E_p \in \mathrm{P}(\mathbb{K})$ dargelegt; aus ihr gewinnen wir $p = q$ und damit auch $f = g$. ◊

Bemerkung (*über rationale Funktionen von* $\mathbb{F}$). Da $\mathbb{K}[\iota]$ ein Oberring von $\mathbb{K}$ ist, liefert Satz 8 eine gegenüber Satz 5 erweiterte Aussage. Ihr zufolge muss jede Funktionenalgebra, d. h. jedes Modell der Axiome (F0–5), eine Unteralgebra von polynomialen Funktionen enthalten. Wenn wir darüber hinausgehend annehmen, dass $\mathbb{K}[\iota]$ Unterring eines (nicht näher bezeichneten) Teilkörpers von $\mathbb{F}$ ist, können wir in letzterem den zu $\mathbb{K}[\iota]$ gehörenden Körper der Brüche $f/g = fg^{-1}$ $(f, g \in \mathbb{K}[\iota],\ g \neq 0)$ bilden. Dieser ist (auch unter Einbeziehung der Komposition) isomorph zum Körper $\mathbb{K}(X)$ der rationalen Funktionen über $\mathbb{K}$ in der Unbestimmten X. Sinngemäß bezeichnen wir ihn daher mit $\mathbb{K}(\iota)$. Addition und Multiplikation in $\mathbb{K}(\iota)$ erfolgen nach den Regeln der gewöhnlichen Bruchrechnung. Sind $f, g \in \mathbb{K}[\iota]$, $g \neq 0$ und $h \in \mathbb{K}(\iota)$, so ergibt sich für die Komposition $\circ$ gemäß Axiom (F3) und unter Beachtung von Aufgabe 18:

$$\frac{f}{g} \circ h = (f \cdot g^{-1}) \circ h = (f \circ h) \cdot (g^{-1} \circ h) = (f \circ h) \cdot (g \circ h)^{-1} = \frac{f \circ h}{g \circ h}. \quad (*)$$

Da $\mathbb{K}(\iota)$ eine Unteralgebra von $\mathbb{F}$ ist, sind sämtliche Verkettungsprodukte in $(*)$ bereits dann wohldefiniert, wenn $g \circ h \neq 0$ ist.

Beispiele: Modelle des Axiomensystems (F0–5). — Bei den im Folgenden aufgeführten Beispielen handelt es sich um konkrete Strukturgebilde, welche die Axiome (F0) bis (F5) erfüllen. Der Begriff ›Funktionenalgebra‹ soll für diese Strukturen auch dann verwendet werden, wenn sich die in ihnen gegebene Komposition als nicht durchgängig ausführbare Verknüpfung erweist.

1. Entsprechend Satz 8 sind die einfachsten Beispiele von Funktionenalgebren zwangsläufig die Ringe der polynomialen (ganz-rationalen) Funktionen mit Koeffizienten aus einem unitären kommutativen Integritätsring der Charakteristik Null. Der in § 1 bereits erwähnte Ring $\mathrm{P}(\mathbb{R})$ ist ein solches Beispiel; auf ihm wird das Verkettungsprodukt $f \circ g$ in üblicher Weise

als eine Ersetzung definiert: $(f \circ g)(x) := f(g(x))$ (siehe § 3). Das Ergebnis $f \circ g$ ist in allen Fällen wieder eine polynomiale Funktion $\in \mathrm{P}(\mathbb{R})$. Das neutrale Element der Verkettung ist die Identitätsfunktion id.[14] Der Unterring der Konstanten besteht aus den konstanten Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. – Ersetzt man in diesem Beispiel $\mathbb{R}$ durch den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen, so erhält man mit $\mathrm{P}(\mathbb{C})$ ein völlig analoges Modell für (F0–5).

2. Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ und $\mathrm{H}(U)$ die Menge der auf U holomorphen Funktionen $f : U \to \mathbb{C}$. Mit der (wie in § 1) argumentweise erklärten Addition und Multiplikation von Funktionen erfüllt $\mathrm{H}(U)$ das Axiom (F0). Auch den übrigen Bedingungen (F1–5) ist Genüge getan, sofern die Fälle ausgenommen werden, in denen ein Verkettungsprodukt $f \circ g$ nicht existiert (weil Bildpunkte von g außerhalb U liegen). Im allgemeinen ist daher $\circ$ nur eine partielle Operation auf $\mathrm{H}(U)$. Die Komposition wird hingegen uneingeschränkt ausführbar, wenn man $U = \mathbb{C}$ voraussetzt und damit zum Integritätsring $\mathrm{H}(\mathbb{C})$ der ganzen Funktionen übergeht. Wie in Beispiel 1 erhält man so einen unter $\circ$ abgeschlossenen Ring. Die konstanten Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bilden den Unterring seiner Konstanten.

Bemerkung. Zu den frühen Quellen einer strukturtheoretisch ausgerichteten Untersuchung von Funktionenringen mit uneingeschränkt ausführbarer Komposition gehört die Arbeit von Irving Adler [Composition Rings. *Duke Math. J.* 29/4 (1962), 607–623]. Sich auf diese Klasse von Kompositionsalgebren festzulegen, würde freilich unsere späteren Betrachtungen in mancher Hinsicht zu sehr einengen. Zudem dienen uns hier, anders als bei den von Adler angeregten Studien, algebraische Strukturen vornehmlich als ein Mittel, die gewöhnliche Praxis des rechnerischen Umgangs mit Funktionen formal widerzuspiegeln. Für diesen Zweck erweist es sich als sachgerecht und ausreichend, die Zusammensetzbarkeit von Funktionen fallweise, d. h. für bestimmte Teilmengen $\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2$ von $\mathbb{F}$ sicherzustellen, und zwar in dem Sinn, dass $f \circ g$ jedenfalls dann als Element von $\mathbb{F}$ definiert ist, wenn nur $f \in \mathbb{H}_1$ und $g \in \mathbb{H}_2$ gilt.

3. Den Körper der (einstelligen) *rationalen Funktionen* über $\mathbb{R}$ können wir entstanden denken als Quotientenkörper des Integritätsrings $\mathrm{P}(\mathbb{R})$. Zusammen mit der (in § 2 erklärten) Komposition von Funktionen ist er ein Modell der Axiome (F0–5). Wie in Beispiel 2 sind seine Konstanten die konstanten

[14] Das gilt auch für die übrigen hier aufgeführten Beispiele.

Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Eine rationale Funktion f lässt sich in der Form eines Bruchs

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \text{mit} \;\; p, q \in \mathrm{P}(\mathbb{R}), \;\; q \neq 0,$$

darstellen, worin gemeinsame Faktoren von Zähler- und Nennerpolynom bereits herausgekürzt seien. Insbesondere sind damit die p und q gemeinsamen Nullstellen gleicher Vielfachheit beseitigt und die dadurch bedingten hebbaren Unstetigkeiten gehoben. Auszuschließen sind ferner die höchstens endlich vielen Nullstellen $a \in \mathbb{R}$ von q (mithin Polstellen von f), für die $f \circ a = f(a)$ nicht definiert ist. Die rationalen Funktionen f sind somit auf ganz $\mathbb{R}$ außerhalb einer endlichen Menge P_f von Polstellen erklärt. Man überzeugt sich leicht davon, dass auch ihre Verkettungsprodukte diese Eigenschaft besitzen (siehe Aufgabe 19); der Körper der rationalen Funktionen ist infolgedessen abgeschlossen unter der Komposition. — Ersetzt man den Koeffizientenkörper $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$, so gelten *mutatis mutandis* dieselben Verhältnisse für die so entstehenden rationalen Funktionen im Komplexen.

4. Ähnlich wie die rationalen Funktionen durch Quotientenbildung aus den ganz-rationalen Funktionen hervorgehen, erhalten wir die Gesamtheit $\mathrm{M}(\mathbb{C})$ der *meromorphen Funktionen* auf der komplexen Ebene als Quotientenkörper des Integritätsrings $\mathrm{H}(\mathbb{C})$ der ganzen (d. h. auf $\mathbb{C}$ holomorphen) Funktionen. Eine meromorphe Funktion f besitzt *höchstens außerwesentliche Singularitäten*. Denken wir uns, wie in Beispiel 3, die hebbaren von ihnen stets schon gehoben, so bleibt allenfalls noch eine diskrete Menge P_f von Polstellen (= Nullstellen der Nennerfunktion von f) übrig. Die Funktion f ist dann auf $\mathbb{C} \setminus P_f$ holomorph. — Summen, Produkte und Reziproke meromorpher Funktionen sind ebenfalls wieder meromorph.[15] Nimmt man die Komposition $\circ$ als dritte Verknüpfung hinzu, so erfüllt auch $\mathrm{M}(\mathbb{C})$ die Axiome (F0–5) einer Funktionenalgebra. Die Konstanten sind dieselben wie in Beispiel 2.

Im Unterschied zu den vorausgegangenen Modellen ist die reichhaltigere Funktionenklasse $\mathrm{M}(\mathbb{C})$ jedoch nicht abgeschlossen unter $\circ$; die Komposition ist daher eine partielle Verknüpfung auf $\mathrm{M}(\mathbb{C})$. Das zeigen schon ein-

[15] Einzelheiten dazu findet man in zahlreichen Lehrbüchern zur komplexen Analysis; vgl. etwa Henri Cartan: *Elementare Theorie der analytischen Funktionen einer oder mehrerer komplexen Veränderlichen.* Bibliographisches Institut, Mannheim 1966, Kapitel I, Abschnitt 4.5.

fache Gegenbeispiele wie das Verkettungsprodukt $f(z) = \mathrm{e}^{1/z}$ der (ganzen) Exponentialfunktion mit der (meromorphen) Stürzung $z \mapsto 1/z$. Es gilt nämlich $f(z) \to \infty$ für $z \to +0$, hingegen $f(z) \to 0$ für $z \to -0$, was impliziert, dass f im Nullpunkt eine wesentliche singuläre Stelle besitzt.

Aufgaben

14. Beweise: Die auf Seite 169 (Fußnote 7) definierte Abbildung $s : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{F}, +)$ ist ein injektiver Homomorphismus der additiven Gruppen.

15. Gib Beweise für (9) und (10).

16. Zeige: $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{K}$. (Hier ist $\mathbb{Z}$ zu verstehen als das isomorphe Bild der Menge der ganzen Zahlen unter der Abbildung s aus Aufgabe 14.)

17. Zeige: $E_{p \circ q}(\iota) = E_p(\iota) \circ E_q(\iota)$ für alle $p, q \in \mathbb{K}[X]$.

18. Es sei $g \in \mathbb{F}^\times$ und $h \in \mathbb{F}$. Zeige: $g \circ h \in \mathbb{F}^\times$ und $g^{-1} \circ h = (g \circ h)^{-1}$.

19. Seien f, g irgend zwei rationale Funktionen über $\mathbb{R}$. Beweise: $f \circ g$ ist eine rationale Funktion über $\mathbb{R}$, die überall außerhalb einer endlichen Menge $P_{f \circ g}$ von Polstellen definiert ist. Gib eine genauere Beschreibung von $P_{f \circ g}$.

20. Die Funktionen $f(z) = \mathrm{e}^z$, $g(z) = (z-1)^{-1}$ und $h(z) = z^{-1}$ sind sämtlich meromorph. Warum ist $g \circ f \circ h$ nicht meromorph?

§ 4. Formale Differentialrechnung

Der axiomatisch gekennzeichneten Funktionenalgebra $\mathbb{F}$ soll im Folgenden ein einstelliger Operator $D : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ hinzugefügt werden, der das formale Gegenstück zum Differential bzw. zur Ableitung von Funktionen in der klassischen Analysis darstellt. Zu diesem Zweck sind Axiome zu formulieren, welche die Wirkung von D auf die drei in $\mathbb{F}$ vorhandenen Verknüpfungen irgend zweier Funktionen $f, g \in \mathbb{F}$ beschreiben:

(D1) $\quad D(f + g) = D(f) + D(g),$

(D2) $D(f \cdot g) = D(f) \cdot g + f \cdot D(g)$,

(D3) $D(f \circ g) = (D(f) \circ g) \cdot D(g)$.

Leicht wiederzuerkennen sind hier die aus der Analysis bekannte Summenregel (D1), Produktregel (D2) und Kettenregel (D3).

Definition 2. Der Ring $\mathbb{F}$ wird *Differentialring* und D eine *Derivation* oder *Ableitung auf* $\mathbb{F}$ genannt, wenn (D1) und (D2) für alle $f, g \in \mathbb{F}$ erfüllt sind. $D(f)$ heißt dann *Derivierte von* f oder *von* f *abgeleitete Funktion*. Eine Derivation D heißt *trivial*, wenn $D(f) = 0$ für alle $f \in \mathbb{F}$.

Für das Folgende werde D als nichttriviale Derivation vorausgesetzt. Auf der Funktionenalgebra $\mathbb{F}$ ist natürlich auch die Komposition als dritte Verknüpfung einzubeziehen. Eine Derivation, die zusätzlich (D3) erfüllt, nennen wir *Derivation mit Kettenregel*. (D3) handhaben wir hier als optionales Axiom, was bedeuten soll, dass auch Ableitungen betrachtet werden, für welche die Kettenregel nicht gilt. Ein einfaches Beispiel dafür ist θD, wo $\theta \in \mathbb{F}$, $\theta \neq 0$, und D eine nichttriviale Derivation mit Kettenregel ist. Dann ist auch θD eine nichttriviale Derivation; allerdings erfüllt diese (D3) nur für $\theta = 1$ (siehe Aufgabe 21). Nebenbei erweist sich so, dass die Kettenregel von (D1) & (D2) unabhängig ist.

Wir wollen $(\mathbb{F}, D)$ eine *Funktionenalgebra mit Derivation* nennen, wenn beide Axiomengruppen (F0–5) und (D1-3) erfüllt sind[16].

Bemerkung. Fügt man den vier Modellen von (F0–5), die am Ende von § 3 beschrieben wurden, die gewöhnliche reelle bzw. komplexe Ableitung hinzu, so gelten in ihnen auch die Differentiationsregeln (D1–3). Ferner ist $D(f) \in \mathbb{F}$ für $f \in \mathbb{F}$ gewährleistet, da die betreffenden (polynomialen, holomorphen, etc.) Funktionen in ihren Definitionsbereichen beliebig oft differenzierbar sind.

Grundformeln im Differentialring $\mathbb{F}$. — Im Folgenden sind einige grundlegende Eigenschaften einer Derivation D zusammengestellt, soweit sie sich bereits aus den Axiomen (D1) und (D2) gewinnen lassen.

$$\text{Für alle } m \in \mathbb{Z}, f \in \mathbb{F} \text{ gilt:} \quad D(mf) = mD(f). \tag{17}$$

[16] Später wird noch ein weiteres Axiom (D4) hinzukommen; siehe Seite 186.

Beweis. Nach (D2) hat man $D(mf) = D(m)f + mD(f)$. Somit bleibt noch $D(m) = 0$ zu zeigen. – Mit (D1) ergibt sich $D(0) = D(0+0) = D(0) + D(0)$, also $D(0) = 0$. Nach (D2) ist $D(1) = D(1 \cdot 1) = D(1) \cdot 1 + 1 \cdot D(1)$, mithin $D(1) = 0$. Hieraus folgt mit (D1) die Gültigkeit von $D(m) = 0$ für alle ganzen $m \geq 0$. Ebenfalls aus (D1) erhalten wir $0 = D(-f + f) = D(-f) + D(f)$ und damit $D(-f) = -D(f)$, woraus ersichtlich wird, dass $D(m) = 0$ auch für $m < 0$ gilt. ◊

Die Produktregel (D2) lässt sich leicht auf mehrere Faktoren $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{F}$ verallgemeinern (siehe Aufgabe 22):

$$D(f_1 \cdots f_n) = \sum_{k=1}^{n} f_1 \cdots f_{k-1}\, D(f_k) f_{k+1} \cdots f_n. \tag{18}$$

Hieraus erhält man speziell für $f_1 = \ldots = f_n = f \in \mathbb{F}$ die *Potenzregel*

$$D(f^n) = nf^{n-1}D(f). \tag{19}$$

Für Einheiten $f \in \mathbb{F}^\times$ gilt die folgende *Reziprokenregel*:

$$D(f^{-1}) = -f^{-2}D(f). \tag{20}$$

Beweis. Aus $1 = f \cdot f^{-1}$ ergibt sich mit (17) und (D2) die Gleichung $0 = D(f \cdot f^{-1}) = D(f)f^{-1} + fD(f^{-1})$, die noch nach $D(f^{-1})$ aufzulösen ist. ◊

Ist f eine Einheit von $\mathbb{F}$, so gilt die Potenzregel (19) auch für $n \leq 0$. Für $n = 0$ ist das klar. Für $n < 0$ gilt definitionsgemäß $f^n = (f^{-1})^{-n}$, woraus unter Verwendung von (19) und (20) folgt:

$$D(f^n) = -n(f^{-1})^{-n-1}D(f^{-1}) = -nf^{n+1}D(f^{-1}) = nf^{n-1}D(f).$$

Unmittelbar aus (D2) und (20) ergibt sich für alle $f \in \mathbb{F}$, $g \in \mathbb{F}^\times$ die *Quotientenregel*

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{D(f)g - fD(g)}{g^2}. \tag{21}$$

Die Ableitung polynomialer Funktionen. — Es soll im Folgenden untersucht werden, inwieweit sich die Derivierte $D(f)$ einer polynomialen

Funktion $f = a_0 + a_1\iota + \cdots + a_n\iota^n \in \mathbb{K}[\iota]$ mit Hilfe der bisher bekannten Regeln bestimmen lässt. Zunächst ist klar, dass dies durch (D1) auf die Aufgabe zurückgeführt wird, die Summanden $a_k\iota^k$ abzuleiten. Mittels (D2) und (19) erhalten wir für $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\begin{aligned} D(a_k\iota^k) &= D(a_k)\iota^k + a_k D(\iota^k) \\ &= D(a_k)\iota^k + k a_k \iota^{k-1} D(\iota) \end{aligned}$$

und nach Aufsummierung für f (und Umordnung der Summanden):

$$D(f) = \sum_{k=0}^{n} D(a_k)\iota^k + \left(\sum_{k=1}^{n} k a_k \iota^{k-1}\right) \cdot D(\iota). \tag{$*$}$$

Die erste Summe auf der rechten Seite von $(*)$ werde vorläufig mit f_D, die zweite (geklammerte) Summe mit $\partial(f)$ abgekürzt. Damit wird $(*)$ zu

$$D(f) = f_D + \partial(f)D(\iota). \tag{22}$$

Offensichtlich entspricht $\partial(f)$ der Form nach der gewöhnlichen Ableitung von ganz-rationalen Funktionen oder – was auf dasselbe hinausläuft – der *formalen Ableitung* von algebraisch aufgefassten Polynomen. Seien p, q solche Polynome über dem Ring $\mathbb{K}$ mit $f = E_p(\iota)$ und $\partial(f) = E_q(\iota)$:

$$p = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n, \quad q = a_1 + 2a_2X + \cdots + na_nX^{n-1};$$

dann entsteht q aus p definitionsgemäß durch ›formales Ableiten[17] nach der Unbestimmten X‹.

Mittels einer einfachen Rechnung bestätigt man, dass ∂ tatsächlich eine Derivation auf $\mathbb{K}[\iota]$ ist, d. h. (D1) und (D2) erfüllt (siehe Aufgabe 24).

Konvention: Auch für Polynome $p \in \mathbb{K}[X]$ soll im Folgenden anstelle der häufig anzutreffenden Bezeichnung p' (für das obige q) die Notation $\partial(p)$ verwendet werden. Das hat den Vorteil, ein selbständiges Operatorzeichen

[17] Die Operation hat rein algebraischen Charakter und ist an keinerlei Begriffe der Analysis gebunden wie ›Grenzwert‹ oder ›Differentialquotient‹.

zur Verfügung zu haben. In Fällen, wo der Bezug auf eine Unbestimmte von Belang ist, verwenden wir vorzugsweise Bezeichnungen[18] wie

$$q = \partial_X p \quad \text{oder} \quad q = \frac{\partial p}{\partial X}.$$

Zudem soll die Ersetzung der Unbestimmten künftig direkt (d. h. ohne den Ersetzungsoperator E) durch Anfügen einer Argumentklammer in herkömmlicher Weise notiert werden, also etwa im obigen Beispiel: $f = p(\iota)$ und $\partial(f) = \partial_X p(\iota)$. Der Einfachheit und Einheitlichkeit halber werden von nun an auch die Elemente von $\mathbb{K}[\iota]$ als *Polynome* bezeichnet. Missverständnisse sind dabei nicht zu befürchten, zumal unter den hier gemachten Annahmen ohnehin die algebraische und die funktionale Auffassung zur Deckung kommen (vgl. Satz 7).

Wenden wir nun unsere Aufmerksamkeit erneut der Gleichung (22) zu. Um darin weitere Vereinfachungen zu erzielen, sind noch die folgenden Fragen zu klären:

- Was ist die Derivierte $D(\iota)$?
- Was ist die Derivierte einer Konstanten aus $\mathbb{K}$?

Führen wir uns vor Augen, dass die Identität ι ebenso wie die konstanten Funktionen Elemente von $\mathbb{F}$ sind, deren ›Verhalten‹ ausschließlich über die Komposition festgelegt wird, so leuchtet es ohne weiteres ein, dass allein auf der Basis von (D1) und (D2) eine zufriedenstellende Antwort nicht zu gewinnen ist. Das ändert sich erst, wenn man für D auch das Erfülltsein der Kettenregel fordert. Erwartungsgemäß und in Übereinstimmung mit den aus der klassischen Analysis vertrauten Tatsachen ergibt sich dann $D(\iota) = 1$ sowie $D(c) = 0$ für alle $c \in \mathbb{K}$ (siehe weiter unten den Abschnitt: Einbeziehung der Kettenregel).

Wenn die Derivation D die Konstanten zum Verschwinden bringt, wird auch der Ausdruck f_D in (22) gleich Null. In diesem Fall ist die Derivierte $D(f)$ eines Polynoms f *bis auf den festen Faktor* $D(\iota)$ *eindeutig bestimmt* als die formale (oder gewöhnliche) Ableitung von f:

$$D(f) = \partial(f) \cdot D(\iota). \tag{23}$$

[18] Diese Schreibweisen kommen vor allem dann zum Zug, wenn wir uns mit Polynomen in mehreren Unbestimmten beschäftigen.

Dieses Resultat erhalten wir aber für Polynome $f \in \mathbb{Z}[\iota]$ bereits ohne die Einbeziehung der Kettenregel, denn nach (17) gilt $D(m) = 0$ zumindest für die ganzzahligen Konstanten $m \in \mathbb{Z}$.

Da in Differentialringen ohne Komposition die Menge $\mathbb{K}$ ohnehin nicht definiert werden kann, erklärt man dort Konstanten von vornherein als diejenigen Elemente von $\mathbb{F}$, die durch Anwendung von D annulliert werden.

Definition 3. Sei D eine Derivation auf dem Integritätsring $\mathbb{F}$. Eine Funktion $f \in \mathbb{F}$ mit $D(f) = 0$ heiße *D-Konstante*[19]. Die Menge aller D-Konstanten werde mit $\mathbb{K}_D$ bezeichnet.

Ebenso wie $\mathbb{K}$ ist auch $\mathbb{K}_D$ ein Unterring von $\mathbb{F}$ (siehe Aufgabe 25). Wie sich beide Unterringe zueinander verhalten, muss weitgehend offen bleiben, solange wir über die Natur der Funktionen nichts Genaueres wissen. In jedem Fall hat man aber $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{K}_D \cap \mathbb{K}$ und – wie wir weiter unten sehen werden – $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}_D$ bei Hinzunahme der Kettenregel.

Bemerkung. Für spezielle Unterringe (oder Modelle) von $\mathbb{F}$ kann auch umgekehrt $\mathbb{K}_D \subseteq \mathbb{K}$ der Fall sein. Ein Beispiel dafür ist $\mathbb{Z}[\iota]$. Sei dazu D als Derivation auf $\mathbb{Z}[\iota]$ und $f = a_0 + a_1\iota + \cdots + a_n\iota^n \in \mathbb{Z}[\iota]$ mit $D(f) = 0$ vorausgesetzt. Nach (23) gilt dann $\partial(f)D(\iota) = 0$. Da D nichttrivial ist, muss $D(\iota) \neq 0$ sein und somit $\partial(f) = a_1 + 2a_2\iota + \cdots + na_n\iota^{n-1} = 0$ wegen der Nullteilerfreiheit von $\mathbb{Z}[\iota]$. Mit denselben Überlegungen wie im Beweis zu Satz 7 (Abschnitt Nr. 1) ergibt sich dann, dass $a_1 = 2a_2 = \ldots = na_n = 0$ und infolgedessen $f = a_0$ ist. Andererseits haben wir $f \circ 0 = a_0$ und damit, wie behauptet, $f \circ 0 = f \in \mathbb{K}$. Natürlich ist $\mathbb{K}_D = \mathbb{K} = \mathbb{Z}$.

Der folgende Satz konstatiert eine abgespeckte Version der Kettenregel für den Fall, dass die ›äußere‹ Funktion des Verkettungsprodukts ein Polynom mit D-Konstanten als Koeffizienten ist.

Satz 9. *Sei D eine Derivation auf $\mathbb{F}$ mit $D(\iota) = 1$. Es gilt dann für alle $f \in \mathbb{K}_D[\iota]$ und $g \in \mathbb{F}$:* $D(f \circ g) = (D(f) \circ g) \cdot D(g)$.

Beweis. Siehe Aufgabe 26. ◊

[19] Üblicherweise spricht man einfach von den *Konstanten* des Differentialrings. Um jedoch nicht in Konflikt mit unserer früheren und davon völlig unabhängigen Definition 1 zu geraten, müssen wir die Konstanten eines Differentialrings bezeichnungstechnisch abgrenzen.

Zweifellos ist das Nebeneinander von zweierlei Konstantenbegriffen eine unbefriedigende Situation. Innerhalb unseres axiomatischen Rahmens lässt sie sich naturgemäß aber nur harmonisieren, indem man die Forderungen an eine Derivation bezüglich der Komposition in hinlänglicher Weise spezifiziert. Immerhin zeigt (26) (siehe unten), dass aus der Kettenregel die Inklusion $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}_D$ folgt. Deren Umkehrung (und damit Gleichheit von $\mathbb{K}$ und $\mathbb{K}_D$) ergibt sich erst, wenn wir der zweiten Axiomengruppe (D1–3) eine weitere Formel hinzufügen:

(D4) $\quad D(f) = 0 \Longrightarrow f \circ 0 = f.$

Vorläufig machen wir von Axiom (D4) keinen Gebrauch. Die komplette Gruppe (D1–4) wird dann aber von Beginn des nächsten Kapitels an generell in Kraft gesetzt.

Einbeziehung der Kettenregel. — Um beliebige Verkettungsprodukte von Funktionen aus $\mathbb{F}$ untersuchen zu können, setzen wir jetzt die Gültigkeit von (D3) voraus. Als erstes grundlegendes Resultat erhalten wir für jede nichttriviale Derivation D mit Kettenregel:

$$D(\iota) = 1. \tag{24}$$

Beweis. (D3) und (F4) liefern $D(\iota) = D(\iota \circ \iota) = (D(\iota) \circ \iota) \cdot D(\iota) = D(\iota)^2$ und damit $D(\iota)(D(\iota) - 1) = 0$. Da $\mathbb{F}$ ein Integritätsring ist, kann nur $D(\iota) = 0$ oder $D(\iota) = 1$ sein. Der erste Fall lässt sich leicht ausschließen, denn dann hätte man für jedes $f \in \mathbb{F}$: $D(f) = D(f \circ \iota) = (D(f) \circ \iota)) \cdot D(\iota) = 0$ im Widerspruch zur Nichttrivialität von D. Also bleibt nur $D(\iota) = 1$. $\Diamond$

Mit (24) lässt sich auf einfache Weise die Derivierte einer (kompositionellen) Inversen bestimmen. Sei $f \in \mathbb{F}$ invertierbar. Die Anwendung der Kettenregel auf $f \circ \bar{f} = \iota$ liefert dann

$$D(\bar{f}) = \frac{1}{D(f) \circ \bar{f}}. \tag{25}$$

Die Wirkung von D auf die ganzen Konstanten des Rings war schon aus Gleichung (17) ersichtlich. Nun können wir allgemeiner feststellen, dass

$$D(c) = 0 \quad \text{für alle } c \in \mathbb{K}. \tag{26}$$

Beweis. Definitionsgemäß hat man $c = c \circ 0$ und daraus mit Hilfe der Kettenregel: $D(c) = (D(c) \circ 0) \cdot D(0) = (D(c) \circ 0) \cdot 0 = 0$. $\Diamond$

Die Produktregel und (26) liefern nun auch sogleich das entsprechende Gegenstück zu (17):

$$\text{Für alle } c \in \mathbb{K}, f \in \mathbb{F} \text{ gilt:} \quad D(cf) = cD(f). \tag{27}$$

Der folgende Satz zeigt, dass ein linearer Operator auf dem Polynomring $\mathbb{K}[\iota]$, der die Kettenregel und eine schwache Gradbedingung erfüllt, bereits eindeutig bestimmt ist als die gewöhnliche (formale) Ableitung ∂ auf $\mathbb{K}[\iota]$.

Satz 10. *Sei $D : \mathbb{K}[\iota] \to \mathbb{K}[\iota]$ eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung mit Grad $D(\iota^2) = 1$. Dann gilt: $D = \partial \iff D$ erfüllt die Kettenregel.*

Beweis. 1. $\Rightarrow$: Trivialerweise erfüllt ∂ die Voraussetzungen des Satzes. Darüberhinaus ist ∂ eine Derivation auf $\mathbb{K}[\iota]$ (Aufgabe 24), wobei $\mathbb{K}_\partial = \mathbb{K}$ (Aufgabe 25). Damit gilt für ∂ nach Satz 9 auch die Kettenregel.

2. $\Leftarrow$: Sei nun ein $\mathbb{K}$-lineares D vorgegeben mit (D3) und der im Satz genannten Gradbedingung. Aufgrund der Kettenregel allein haben wir (nach (24)) $D(\iota) = 1$. Es genügt daher zu zeigen, dass D die Produktregel (D2) erfüllt (also eine Derivation ist); denn dann erhalten wir mit (23) $D(f) = \partial(f)D(\iota) = \partial(f)$ für alle $f \in \mathbb{K}[\iota]$, d. h. $D = \partial$.

Der Gradbedingung entnimmt man die Existenz von $a, b \in \mathbb{K}$ mit $b \neq 0$ und $D(\iota^2) = a + b\iota$. Ferner halten wir fest, dass aufgrund der $\mathbb{K}$-Linearität von D insbesondere gilt: $D(c) = D(c \cdot 1) = D(c)D(1) = 0$ für alle $c \in \mathbb{K}$.

Um a zu bestimmen, berechnen wir $D((a + b\iota)^2)$ auf zwei unterschiedliche Weisen. Zunächst durch direkte Auswertung des Binoms:

$$\begin{aligned} D((a + b\iota)^2) &= D(a^2 + 2ab\iota + b^2\iota^2) \\ &= D(a^2) + 2abD(\iota) + b^2 D(\iota^2) \\ &= 2ab + b^2(a + b\iota) \\ &= 2ab + ab^2 + b^3\iota, \end{aligned}$$

sodann durch Anwendung der Kettenregel:

$$\begin{aligned} D((a+b\iota)^2) &= D(\iota^2 \circ (a+b\iota)) \\ &= (D(\iota^2) \circ (a+b\iota)) \cdot D(a+b\iota) \\ &= ((a+b\iota) \circ (a+b\iota))(D(a)+bD(\iota)) \\ &= (a+b(a+b\iota))b \\ &= ab+ab^2+b^3\iota. \end{aligned}$$

Ein Vergleich der Koeffizienten ergibt $ab = 0$, also $a = 0$ wegen $b \neq 0$.

Wendet man dasselbe Verfahren auf das Binom $(1 + b\iota)^2$ an, so liefert die Kettenregel $D((1 + b\iota)^2) = b^2 + b^3\iota$, das direkte Auswerten hingegen $D((1 + b\iota)^2) = 2b + b^3\iota$. Der Koeffizient b $(\neq 0)$ erfüllt somit die Gleichung $2b = b^2$, und wir erhalten mit der Kürzungsregel $b = 2$.

Damit ist $D(\iota^2) = 2\iota$ gezeigt, und es ergibt sich mit Hilfe der Kettenregel für alle $f \in \mathbb{K}[\iota]$:

$$\begin{aligned} D(f^2) &= D(\iota^2 \circ f) = (D(\iota^2) \circ f) \cdot D(f) \\ &= ((2\iota) \circ f) \cdot D(f) = (2 \circ f) \cdot (\iota \circ f) \cdot D(f) \\ &= 2fD(f). \end{aligned}$$

Abschließend verallgemeinern wir diesen Sonderfall ($n = 2$) von (19) zur Produktregel (D2). Ausgehend von beliebigen Polynomen f, g über $\mathbb{K}$ erhalten wir zunächst

$$2fg = (f+g)^2 - f^2 - g^2$$

und nach Anwendung von D auf beide Seiten:

$$\begin{aligned} 2D(fg) &= D((f+g)^2) - D(f^2) - D(g^2) \\ &= 2(f+g)D(f+g) - 2fD(f) - 2g(D(g) \\ &= 2(D(f)g + fD(g)). \end{aligned}$$

Die Kürzungsregel erlaubt Kürzung von $2(\neq 0)$, und man hat (D2). $\Diamond$

Bemerkung. Die in Satz 10 gegebene Charakterisierung der formalen Ableitung von Polynomen durch die Kettenregel wurde angeregt durch einen Artikel von J. W. Burgmeier und R. E. Prather [Polynomial Calculus with D-like Operators. *Amer. Math. Monthly* 82/7 (1975), 730–737]. Die Autoren betrachten lineare Operatoren auf dem Vektorraum P($\mathbb{R}$), die jedem Polynom vom Grade n eines vom Grade $n-1$ zuordnen (»unit-degree-decreasing«). Ihr Theorem 7 besagt dann, dass die gewöhnliche Ableitung auf P($\mathbb{R}$) der einzige dieser Operatoren ist, welcher die Kettenregel erfüllt. Burgmeier und Prather erblicken darin mit einer gewissen Berechtigung einen Beitrag zur Einsicht in die »essential uniqueness of the classical differential calculus«. Die Beobachtung, dass die Gradbedingung entscheidend abgeschwächt werden kann, hat mich wenig später auf eine andere, mehr algebraisch orientierte Beweisidee gebracht [Zur algebraischen Analyse der Kettenregel. *Math.-phys. Semesterber.* n. F. 25/1 (1978), 79–96. Für eine verbesserte Fassung vgl. meine *Didaktische Schriften zur Elementarmathematik*, Logos-Verlag: Berlin 2014, 38–46].

Polynome in mehreren Unbestimmten. — Zunächst soll hier daran erinnert werden[20], dass man sich den Ring $\mathbb{K}[X_1,\ldots,X_n]$ der Polynome über $\mathbb{K}$ in den Unbestimmten $X_1,\ldots,X_n$ rekursiv erzeugt denken kann als den Ring $\mathbb{K}[X_1,\ldots,X_{n-1}][X_n]$ der Polynome in X_n über $\mathbb{K}[X_1,\ldots,X_{n-1}]$. Schreiten wir nach diesem Muster weiter rückwärts, so erscheint $\mathbb{K}[X_1,\ldots,X_n]$ am Ende als das über $\mathbb{K}$ n-stufig aufgeschichtete Gebilde $\mathbb{K}[X_1]\ldots[X_n]$, wobei es keine Rolle spielt, in welcher Reihenfolge die Unbestimmten hinzugefügt werden. Da $\mathbb{K}$ nullteilerfrei ist, entsteht zudem auf jeder dieser Stufen ein Integritätsring.

Jedes Polynom $P\in\mathbb{K}[X_1,\ldots,X_n]$ lässt sich eindeutig darstellen in der folgenden *Normalform*

$$P = P(X_1,\ldots,X_n) = \sum c_{j_1\ldots j_n} X_1^{j_1}\cdots X_n^{j_n}, \tag{28}$$

worin die Koeffizienten $c_{j_1\ldots j_n}$ dem Ring $\mathbb{K}$ angehören und die Summe über eine gewisse endliche Menge von n-Tupeln $(j_1,\ldots,j_n)$ nichtnegativer ganzer Zahlen läuft. Zu jedem Summanden (*Monom*) $c_{j_1\ldots j_n}X_1^{j_1}\cdots X_n^{j_n}$ definiert man die Summe $k = j_1+\cdots+j_n$ der Exponenten als seinen *Grad*. Ein Polynom P heißt dann *homogen vom Grad* k, wenn seine sämtli-

[20] Zu den wichtigsten Tatsachen über Polynome in mehreren Unbestimmten vgl. man etwa Kapitel II von Okunjew (zitiert in Fußnote 11).

chen Monome denselben Grad k besitzen. Offensichtlich ist dies gleichbedeutend damit, dass P für alle $t \in \mathbb{K}$ die folgende Gleichung erfüllt:

$$P(tX_1, \ldots, tX_n) = t^k P(X_1, \ldots, X_n). \tag{29}$$

Beispiel 1. Der multinomiale Ausdruck $M_{n,k} := (X_1+X_2+\cdots+X_n)^k$ ist ein homogenes Polynom vom Grad k. Es taucht in vielen Zusammenhängen auf und erweist sich als bedeutsam aufgrund seiner Normalform

$$M_{n,k} = \sum_{\substack{j_1, \ldots, j_n \geq 0 \\ j_1+\cdots+j_n=k}} \frac{k!}{j_1! \cdots j_n!} X_1^{j_1} \cdots X_n^{j_n}, \tag{30}$$

die eine Verallgemeinerung der Binomialformel (für $M_{2,k}$) darstellt. Der hier auftretende Koeffizient erlaubt eine anschauliche kombinatorische Deutung als Anzahl der Möglichkeiten, k unterscheidbare Objekte in n numerierte Schachteln zu legen, und zwar j_ν Objekte in Schachtel Nr. ν, $1 \leq \nu \leq n$ (siehe Aufgabe 28).

Wenden wir uns nun den Derivationen auf $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ zu.[21] Im Abschnitt über die Ableitung polynomialer Funktionen hatten wir gesehen, dass eine Derivation auf $\mathbb{K}[\iota]$ bis auf einen Faktor eindeutig als die formale Ableitung ∂ bestimmt ist. Auf $\mathbb{K}[X]$ entspricht dem die Derivation ∂_X. Da es für den Ring $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ im Endergebnis gleichgültig ist, in welcher Reihenfolge die Unbestimmten hinzugefügt werden, können wir ihn für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ auch in der Form

$$\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_{j-1}, X_{j+1}, \ldots, X_n][X_j] \tag{$*$}$$

darstellen und erhalten auf diese Weise die zugehörigen sog. *partiellen Ableitungen* ∂_{X_j} auf $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$. Die Namenswahl gründet sich darauf, dass ausschließlich solche Polynome durch ∂_{X_j} nicht annulliert werden, welche die Unbestimmte X_j als echten Faktor enthalten. Man beachte: Ein Polynom in den Unbestimmten $X_1, \ldots, X_n$ über $\mathbb{K}$

[21] Der interessierte Leser findet die diesbezügliche (weiterführende) algebraische Theorie in voller formaler Strenge entwickelt bei O. Zariski, P. Samuel: *Commutative Algebra*, Vol. I, Springer-Verlag: New York, Heidelberg, Berlin 1975; vgl. dort § 17 von Chapter II.

wird gemäß $(*)$ als Polynom in der Unbestimmten X_j über dem Ring $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_n]$ aufgefasst. Als Koeffizienten spielen dessen Polynome P für die partielle Ableitung nach X_j die Rolle von ∂_{X_j}-Konstanten, d. h. es gilt $\partial_{X_j}(P) = 0$.

In der Funktionenalgebra $\mathbb{F}$ haben die bisher für den Ring $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ geschilderten Verhältnisse keine unmittelbare Entsprechung. Während für $n = 1$ nach Satz 7 in der Unteralgebra $\mathbb{K}[\iota]$ ein zu $\mathbb{K}[X_1]$ isomorphes Gegenstück vorliegt, lässt sich für $n > 1$ unter den allgemein gehaltenen Voraussetzungen kein zu $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ isomorpher Unterring von $\mathbb{F}$ auszeichnen. Für unsere Zwecke ist dies kein Verlust, denn unser Hauptaugenmerk liegt auf der *Ersetzung der Unbestimmten durch andere Polynome oder Funktionen.*

Die Ersetzung durch Polynome lässt sich in hinlänglicher Allgemeinheit wie folgt beschreiben: Sei P ein Polynom aus $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ und $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{F}$ ein Oberring von $\mathbb{K}$. Ersetzen wir nun jede Unbestimmte X_j in P durch ein Polynom $Q_j \in \mathbb{H}[X_1, \dots, X_m]$, so ist das Ergebnis ein Polynom aus $\mathbb{H}[X_1, \dots, X_m]$, das wir in herkömmlicher Weise mit $P(Q_1, \dots, Q_n)$ bezeichnen. Alternativ dazu notieren wir $P(Q_1, \dots, Q_n)$ auch in der kürzeren, aber nicht weniger sinnfälligen Form als Verkettungsprodukt[22] $P \circ Q_\sharp$. Das hier verwendete Nummernzeichen ($\sharp$) markiert die bezifferte Stelle im einzusetzenden Ausdruck, deren Wert mit dem Index der in P durch diesen Ausdruck zu ersetzenden Unbestimmten zusammenfällt.

Beispiele 2. Einige einfache Beispiele mögen das illustrieren.

(i) Für $P = X_2^3 + 2X_5$ hat man $P \circ 2^\sharp = P(2^2, 2^5) = 4^3 + 2 \cdot 32$.

(ii) Mit dem Polynom aus Beispiel 1 ergibt sich $M_{n,1} \circ \sharp = 1 + 2 + \cdots + n$.

(iii) Für alle Polynome $P \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ gilt $P \circ X_\sharp = P$.

Wir betrachten nun noch zwei Spielarten der Ersetzung, die für das Weitere von besonderem Interesse sind.

(1) Wenn sämtliche einzusetzenden Polynome übereinstimmen, d. h. wenn etwa $Q_1 = Q_2 = \ldots = Q$ gilt, so notieren wir die Verkettung

[22] Natürlich sollte, trotz Verwendung desselben Symbols, die Komposition von Polynomen in einer oder mehreren Unbestimmten nicht mit der entsprechenden abstrakten Operation innerhalb der Funktionenalgebra $\mathbb{F}$ verwechselt werden.

ohne das Nummernzeichen und sagen, dass $P(Q,\dots,Q)$ bzw. $P\circ Q$ *aus P durch Unifikation zum Wert Q* hervorgeht. Aus einem Polynom P in mehreren Unbestimmten entsteht durch Unifikation zum Wert X die zugehörige univariate Form $P\circ X = P(X,\dots,X)$. Der am häufigsten vorkommende Fall ist die Unifikation zur Konstanten $1\in\mathbb{K}$, künftig schlicht *Unifikation* (ohne Zusatz) genannt. Ihr Ergebnis $P\circ 1$ ist wieder eine Konstante $\in\mathbb{K}$, nämlich die Summe der Koeffizienten von P in der Normalform (28).

(2) Zu gegebenen Funktionen $f_1,\dots,f_n\in\mathbb{F}$ ist $P\circ f_\sharp = P(f_1,\dots,f_n)$ ebenfalls eine Funktion aus $\mathbb{F}$. Die dergestalt durch P vermittelte Zuordnung $\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}$ ist offensichtlich nichts anderes als eine Verallgemeinerung von (15) auf Polynome in mehreren Unbestimmten. Man wird daher erwarten, dass sich auch die in Satz 9 ausgesprochene Kettenregel für Polynome entsprechend verallgemeinern lässt. Der folgende Satz bestätigt dies und zeigt zudem, dass die Derivierte von $P\circ f_\sharp$ die Gestalt eines vollständigen Differentials annimmt.

Satz 11. *Sei D eine Derivation[23] auf $\mathbb{F}$ und P ein beliebiges Polynom über $\mathbb{K}_D$ in den Unbestimmten $X_1,\dots,X_n$. Dann gilt für alle $f_1,\dots,f_n\in\mathbb{F}$*

$$D(P(f_1,\dots,f_n)) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial P}{\partial X_k}(f_1,\dots,f_n)\cdot D(f_k).$$

Beweis. Wir denken uns P in der Normalform (28) dargestellt mit Koeffizienten $c_{j_1\dots j_n}\in\mathbb{K}_D$ und bestimmen die Normalform der partiellen Ableitung von P nach X_k zu

$$\frac{\partial P}{\partial X_k} = \sum j_k c_{j_1\dots j_n} X_1^{j_1}\cdots X_k^{j_k-1}\cdots X_n^{j_n}.$$

Hieraus erhalten wir mit (18) und (19) unter Beachtung der $\mathbb{K}_D$-Linearität von D:

$$\begin{aligned} D(P(f_1,\dots,f_n)) &= \sum c_{j_1\dots j_n} D(f_1^{j_1}\cdots f_n^{j_n}) \\ &= \sum c_{j_1\dots j_n}\sum_{k=1}^{n} f_1^{j_1}\cdots D(f_k^{j_k})\cdots f_n^{j_n} \end{aligned}$$

[23] Es wird nur das Erfülltsein von (D1) und (D2) vorausgesetzt.

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum j_k c_{j_1 \dots j_n} f_1^{j_1} \cdots f_k^{j_k - 1} \cdots f_n^{j_n} \cdot D(f_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial P}{\partial X_k}(f_1, \dots, f_n) \cdot D(f_k). \qquad \Diamond$$

Bemerkung. Unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass D die Kettenregel (D3) erfüllt, erhält man aufgrund von $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}_D$ und (27) die Behauptung des Satzes auch für Polynome über $\mathbb{K}$.

Höhere Ableitungen. — Nicht anders als in der klassischen Analysis entstehen die Derivierten höherer Ordnung einer Funktion $f \in \mathbb{F}$ durch mehrmaliges Anwenden des Ableitungsoperators D: auf f, auf $D(f)$, auf $D(D(f))$, usw. Wir definieren für ganze $n \geq 0$ rekursiv

$$D^0(f) = f \quad \text{und} \quad D^{n+1}(f) = D(D^n(f)).$$

Obwohl (wie gleich zu sehen sein wird) D^n für $n > 1$ keine Derivation darstellt, spricht man herkömmlicherweise etwas lax von »höheren Ableitungen«, wo es genauer und passender wäre, $D^n(f)$ als *Derivierte von f der Ordnung n* (oder kurz: *k-te Derivierte von f*) zu bezeichnen. Wir machen, je nach Gelegenheit, von jeder dieser Sprechweisen Gebrauch.

Zunächst stellt sich die Frage, wie D^n auf Summen und Produkte von Funktionen wirkt. Die Antworten sind hier sehr einfach zu finden (anders als bei der Komposition, die weitere Vorbereitungen benötigt und daher erst später behandelt wird).

Man sieht ohne weiteres, dass die Bildung höherer Ableitungen der Summenregel (D1) genügt:

$$D^n(f+g) = D^n(f) + D^n(g). \tag{31}$$

Bei (D2) liegt der Fall etwas anders; hier erfährt die Produktregel eine Verallgemeinerung zu einer als *Regel von Leibniz* geläufigen Form.

Satz 12. *Für alle $f, g \in \mathbb{F}$ und $n \geq 0$ gilt:*

$$D^n(f \cdot g) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} D^j(f) D^{n-j}(g).$$

Beweis. Der einfache Beweis durch Induktion nach der Ordnung n kann dem Leser zur Übung überlassen bleiben (siehe Aufgabe 31). $\Diamond$

Die rechte Seite der Gleichung von Satz 12 steht offensichtlich in einer Analogie zur Binomialformel (wobei die j-fache Anwendung von D dem Erheben zur j-ten Potenz entspricht). Erweitert man das Funktionenprodukt auf mehrere Faktoren, so entsteht gemäß dieser Analogie ein Ausdruck nach dem Muster der Normalform (30):

$$D^n(f_1 \cdots f_s) = \sum_{\substack{j_1+\cdots+j_s=n \\ j_1,\ldots,j_s \geq 0}} \frac{n!}{j_1! \cdots j_s!} D^{j_1}(f_1) \cdots D^{j_s}(f_s). \tag{32}$$

Auch diese Formel lässt sich unter Verwendung der Produktregel leicht durch Induktion verifizieren (hier: nach der Anzahl s der Faktoren).

Für den Rest dieses Kapitels setzen wir die Gültigkeit der Kettenregel (D3) voraus. Damit erhalten wir unter Beachtung von (26) und (23) einen häufig genutzten Spezialfall von (32):

$$D^n(\iota^s) = \partial^n(\iota^s) = \begin{cases} n!\binom{s}{n}\iota^{s-n}, & \text{falls } n \leq s; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{33}$$

Beweis. Die für $f_1 = \ldots = f_s = \iota$ in (32) auftretenden Derivierten $D^{j_k}(\iota)$ sind wegen $D(\iota) = 1$ genau dann von Null verschieden, wenn $j_k \in \{0, 1\}$, $1 \leq k \leq s$. Unter dieser Bedingung wird $j_1! \cdots j_s! = 1$. Ferner ist die Gleichung $j_1 + \cdots + j_s = n$ genau dann erfüllt, wenn n der s Summanden gleich 1 (und die übrigen $s - n$ Summanden gleich 0) sind. Dafür gibt es $\binom{s}{n}$ Möglichkeiten, deren jede zu einem Summanden in (32) gehört. $\Diamond$

Natürlich erhält man (33) unabhängig von (32) auch direkt durch wiederholtes Anwenden von D $(= \partial)$ auf ι^s nach der Potenzregel (19). Der im Fall $n \leq s$ auftretende Koeffizient von ι^{s-n} nimmt dabei die Form eines Produkts aus n fallenden Faktoren an:

$$s(s-1)\cdots(s-n+1).$$

Wir nennen diesen Ausdruck *fallende Faktorielle von s der Länge n* und kürzen ihn im Folgenden durch das Symbol $(s)_n$ ab. Ergänzend vereinbaren wir $(s)_0 = 1$ sowie $(s)_n = 0$ für $n > s$. Damit schreibt sich (33) nun einfacher:

$$\partial^n(\iota^s) = (s)_n \iota^{s-n}. \tag{33'}$$

Bemerkung. Es sei hier an die kombinatorische Bedeutung der fallenden Faktoriellen erinnert. Danach ist $(s)_n$ die Anzahl der geordneten Folgen der Länge n, die sich aus s unterscheidbaren Objekten (Elementen einer Menge) bilden lassen, von denen jedes höchstens einmal in der Folge vorkommt. Folgen dieser Art heißen *n-Permutationen von s Objekten ohne Wiederholung*. Dürfen sich die Objekte in der Folge wiederholen, so lautet die Anzahl solcher n-Permutationen s^n (wobei die Bedingung $n \leq s$ natürlich entfallen kann).

Wir kommen nun zu der einfachen, aber bedeutsamen Tatsache, dass zwischen den Koeffizienten eines Polynoms und seinen höheren Ableitungen ein direkter Zusammenhang besteht. Dieser ergibt sich unmittelbar aus der obigen Gleichung (33'). Ist nämlich $f = a_0 + a_1\iota + \cdots + a_n\iota^n \in \mathbb{K}[\iota]$, so erhalten wir für die Derivierte k-ter Ordnung

$$\partial^k(f) = (k)_k a_k + (k+1)_k a_{k+1}\iota + \cdots + (n)_k a_n \iota^{n-k}$$

und daraus $\quad \partial^k(f)(0) = \partial^k(f) \circ 0 = k! a_k. \qquad (34)$

Die in (34) ermittelten Konstanten bezeichnen wir als die *Taylor-Koeffizienten von f*. Sie entsprechen den Koeffizienten von $x^k/k!$, denen man in den nach Brook Taylor (1685–1731) benannten Potenzreihenentwicklungen der klassischen Differentialrechnung begegnet.

Beispiel 3. Am simplen Beispiel der binomialen Funktion

$$b_n := (1+\iota)^n = \sum_{k=0}^{n} c_n(k)\iota^k \in \mathbb{Z}[\iota]$$

soll illustriert werden, auf welche Weise durch höhere Ableitungen kalkulatorische und kombinatorische Aspekte der in der Normalform auftretenden Koeffizienten $c_n(k) = \binom{n}{k}$ zum Vorschein kommen.

Einerseits haben wir nach (19) (oder auch direkt mittels der Kettenregel)

$$\partial(b_n) = n(1+\iota)^{n-1}\partial(1+\iota) = n(1+\iota)^{n-1},$$

folglich $\partial^k(b_n) = (n)_k(1+\iota)^{n-k}$ für $0 \le k \le n$, und somit schließlich $\partial^k(b_n)(0) = (n)_k$. Andererseits ergibt sich aus (34), angewandt auf die obige Normalform, der Taylor-Koeffizient $\partial^k(b_n)(0) = k!c_n(k)$. Wir erhalten also $k!c_n(k) = (n)_k$ und damit die bekannte Darstellung der Binomialkoeffizienten als Quotient zweier Produkte:

$$c_n(k) = \binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k}.$$

Ähnlich wie im Beweis zu (33) können wir die k-te Derivierte von b_n alternativ aber auch mittels der verallgemeinerten Regel von Leibniz (32) wie folgt auswerten:

$$\begin{aligned}\partial^k(b_n) &= \partial^k\big(\underbrace{(1+\iota)\cdots(1+\iota)}_{n-\text{mal}}\big)\\ &= k! \cdot \sum_{\substack{j_1+\cdots+j_n=k\\ 0\le j_1,\ldots,j_n\le 1}} \partial^{j_1}(1+\iota)\cdots\partial^{j_n}(1+\iota).\end{aligned}$$

Natürlich ist hier $\partial^{j_\nu}(1+\iota)(0) = 1$ für alle $\nu \in \{1,\ldots,n\}$ und daher

$$\partial^k(b_n)(0) = k! \cdot \sum_{1\le\nu_1<\ldots<\nu_k\le n} 1.$$

Hierbei sind die ν_s gerade die Indizes der $1, 2, \ldots, n$, für welche $j_{\nu_s} = 1$ gilt, $1 \le s \le k$. — Die Summationsbedingung liefert uns nun auch eine kombinatorische Interpretation der Binomialzahlen $\binom{n}{k}$: nämlich als Anzahl der *k-Kombinationen von* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *ohne Wiederholung*; das ist die Anzahl der Möglichkeiten, aus einer n-elementigen Menge eine (ungeordnete) Teilmenge von k Elementen auszuwählen.

Aufgaben

21. Sei D eine Derivation mit Kettenregel auf $\mathbb{F}$ und $\theta \in \mathbb{F}$ eine fest vorgegebene Funktion mit $\theta \neq 0$. Es werde $\widetilde{D} := \theta D$ definiert durch $\widetilde{D}(f) = \theta \cdot D(f)$ für $f \in \mathbb{F}$.

Beweise: (a) $\widetilde{D}$ ist eine Derivation auf dem Ring $\mathbb{F}$; (b) $\widetilde{D}$ erfüllt die Kettenregel genau dann, wenn $\theta = 1$.

22. Gib einen Beweis für die verallgemeinerte Produktregel (18).

23. Seien $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{F}^\times$ Einheiten von $\mathbb{F}$ und $j_1, \dots, j_n \in \mathbb{Z}$. Beweise die folgende Identität (der sog. *logarithmischen Derivierten*):

$$\frac{D(f_1^{j_1} \cdots f_n^{j_n})}{f_1^{j_1} \cdots f_n^{j_n}} = \sum_{k=1}^{n} j_k \frac{D(f_k)}{f_k}.$$

24. Zeige, dass ∂ eine Derivation auf $\mathbb{K}[\iota]$ ist, d. h. ∂ erfüllt (D1) und (D2).

25. Zeige: (a) Ist D eine Derivation auf $\mathbb{F}$, so ist $\mathbb{K}_D$ ein Unterring von $\mathbb{F}$; (b) $\mathbb{K}_\partial = \mathbb{K}$.

26. Beweise Satz 9.

27. Sei $f \in \mathbb{F}$ invertierbar und $D(f)$ eine Einheit in $\mathbb{F}$. Zeige: Für alle $m \in \mathbb{Z}$ gilt: $D(\bar{f})^m \circ f = D(f)^{-m}$.

28. Sei $P \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ ein zum Grad k homogenes Polynom. Beweise:

$$\sum_{j=1}^{n} X_j \frac{\partial P}{\partial X_j} = k \cdot P.$$

Diese Formel ist Eulers bekannte Identität für homogene Funktionen, hier in einer Fassung für Polynome.

29. Unifikation des Polynoms $M_{n,k}$ und seiner Normalform (30) in Beispiel 1 führt auf die Identität

$$M_{n,k} \circ 1 = n^k = \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n \geq 0 \\ j_1 + \dots + j_n = k}} \frac{k!}{j_1! \cdots j_n!}.$$

Gib eine kombinatorische Interpretation.

30. Gegeben seien Polynome $Q_j \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_{q(j)}]$, $1 \leq j \leq m$, sowie weitere Polynome $R_1, R_2, R_3, \dots$ über einem Oberring von $\mathbb{K}$. Der Ausdruck $Q_\sharp \circ R_\sharp$ vertrete dann irgendein Glied der Polynomfolge $Q_j(R_1, \dots, R_{q(j)})$, $1 \leq j \leq m$. Beweise: Es gilt das *Assoziativgesetz*

$$(P \circ Q_\sharp) \circ R_\sharp = P \circ (Q_\sharp \circ R_\sharp),$$

wo P irgendein Polynom über $\mathbb{K}$ ist.

31. Beweise (a) Satz 12 und (b) die erweiterte Produktformel (32).

Lösungen der Aufgaben

1 – (S. 160) Wir verifizieren die erste der beiden Identitäten:

$$\begin{aligned}((a \cdot f + b \cdot g) \cdot h)(x) &= (a \cdot f + b \cdot g)(x) \cdot h(x) \\ &= (a \cdot f(x) + b \cdot g(x)) \cdot h(x) \\ &= a \cdot f(x) \cdot h(x) + b \cdot g(x) \cdot h(x) \\ &= a \cdot (f \cdot h)(x) + b \cdot (g \cdot h)(x) \\ &= (a \cdot (f \cdot h) + b \cdot (g \cdot h))(x).\end{aligned}$$

Bei der zweiten Gleichung verfährt man in derselben Weise.

2 – (S. 160) Aufgrund der Form der Polynome ist klar, dass die $x^0, x^1, x^2, \ldots$ ein Erzeugendensystem von P($\mathbb{R}$) bilden. Es bleibt somit noch der Nachweis der linearen Unabhängigkeit. Dazu werde

$$f(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ angenommen. Dies impliziert, dass f das Nullpolynom ist. Denn andernfalls hätte f nach einem Satz der elementaren Algebra höchstens m Nullstellen [vgl. etwa Mangoldt/Knopp: *Einführung in die höhere Mathematik*, Stuttgart 1964, 12. Aufl., Bd. 1, 349-351], was einen Widerspruch darstellt. Infolgedessen ist $f = 0$ und müssen alle Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ verschwinden.

3 – (S. 160) Ohne Einschränkung der Allgemeinheit werde $m \leq n$ angenommen; wir setzen dann $a_k = 0$ für $k = m+1, \ldots, n$. Gliedweise Addition liefert sofort $a_k + b_k$ als Koeffizienten von x^k in $f(x) + g(x)$. Im Falle des Produkts $f(x)g(x)$ erhält man durch Ausmultiplizieren der Normalformen und Umordnen der Summe nach Potenzen von x als Koeffizienten von x^k den Ausdruck $a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0$.

4 – (S. 160) Um zu zeigen, dass die Polynome $p_0, p_1, p_2, \ldots$ ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von P($\mathbb{R}$) bilden, ist die folgende Überlegung hinreichend: Zu beliebigem $m \geq 0$ sei $f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m$ irgendein Polynom (das auch das Nullpolynom sein kann) und seien $p_j(x) = c_{j,0} + c_{j,1}x + c_{j,2}x^2 + \cdots + c_{j,j}x^j$ irgendwelche Polynome vom Grad j ($j = 0, 1, 2, \ldots$). Dann zeigen wir:

(a) Es existieren eindeutig bestimmte $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ derart, dass $f(x) = a_0 p_0(x) + a_1 p_1(x) + a_2 p_2(x) + \cdots + a_m p_m(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$;

(b) im Falle $f(x) = 0$ (Nullpolynom) gilt $a_j = 0$ für $j = 0, 1, 2, \ldots, m$.

Vorab notieren wir eine nützliche Formel über die Umordnung der Summanden in einer Doppelsumme (deren einfacher Beweis dem Leser überlassen bleiben kann):

$$\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{j} z_{k,j} = \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=k}^{m} z_{k,j} \tag{*}$$

Schreiben wir nun den Ansatz in (a) aus, so erhalten wir

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k = \sum_{j=0}^{m} a_j \sum_{k=0}^{j} c_{j,k} x^k$$

und mittels Umordnung gemäß (*)

$$\sum_{k=0}^{m} b_k x^k = \sum_{k=0}^{m} (\sum_{j=k}^{m} a_j c_{j,k}) x^k.$$

Die in Aufgabe 2 bewiesene lineare Unabhängigkeit der $x^0, x^1, x^2, \ldots$ impliziert die Übereinstimmung der Koeffizienten von x^k auf beiden Seiten der letzten Gleichung (sog. *Koeffizientenvergleich*):

$$\sum_{j=k}^{m} c_{j,k} a_j = b_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, m). \tag{**}$$

(**) ist ein lineares Gleichungssystem in den Unbekannten $a_0, a_1, \ldots, a_m$. Die zugehörige Matrix hat obere Dreiecksform mit den Diagonalelementen $c_{j,j}$, die wegen grad $p_j = j$ sämtlich ungleich Null sind. Daher ist die Matrix regulär (Rang $= m + 1$), und es gibt eine eindeutige Lösung von (**). Das beweist (a).

Im Fall, dass f das Nullpolynom ist, haben wir $b_0 = \cdots = b_m = 0$ und damit $c_{m,m} a_m = 0$, d. h. $a_m = 0$; sodann $c_{m-1,m-1} a_{m-1} + c_{m,m-1} a_m = 0$, d. h. $a_{m-1} = 0$, usw. bis $a_0 = 0$, womit auch (b) gezeigt ist.

5 – (S. 160) Nach Aufgabe 4 gibt es eindeutig bestimmte $a_{n,k}$ derart, dass

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} (x - c)^k.$$

Im Prinzip lassen sich die Koeffizienten $a_{n,k}$ aus dem Gleichungssystem (**) (Aufgabe 4) ermitteln, wobei $b_0 = \cdots = b_{n-1} = 0$ und $b_n = 1$. Es geht aber bedeutend einfacher mit folgender Umformung unter Zuhilfenahme der binomischen Formel:

$$x^n = (c + (x - c))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} c^{n-k} (x - c)^k.$$

Mithin gilt $a_{n,k} = \binom{n}{k} c^{n-k}$.

6 – (S. 161) Mit denselben Überlegungen wie in § 1 bezüglich $\mathrm{F}(I, \mathbb{R})$ überzeugt man sich davon, dass auch $\hat{\mathrm{F}}(I, \mathbb{R})$ ein kommutativer Ring mit Einselement ist. Dabei ist lediglich zu berücksichtigen, dass die $\hat{\mathrm{F}}(I, \mathbb{R})$ definierende Eigenschaft sich von f, g auf $f + g$ und $f \cdot g$ vererbt.

Ist nun $f \in \hat{\mathrm{F}}(I, \mathbb{R})$, so ist die reziproke Funktion f^{-1} an genau den Stellen nicht definiert, an denen f verschwindet oder selbst nicht definiert ist. Insgesamt sind dies höchstens endlich viele Ausnahmen, so dass $f^{-1} \in \hat{\mathrm{F}}(I, \mathbb{R})$. Somit ist $\hat{\mathrm{F}}(I, \mathbb{R})$ ein Körper.

7 – (S. 167) Wir begnügen uns hier mit der Verifikation von (5):

$$\begin{aligned} ((f \cdot g) \circ h)(x) &= (f \cdot g)(h(x)) \\ &= f(h(x)) \cdot g(h(x)) \\ &= (f \circ h)(x) \cdot (g \circ h)(x) \\ &= ((f \circ h) \cdot (g \circ h))(x). \end{aligned}$$

8 – (S. 167) Die Argumente des Tangens dürfen offensichtlich nicht außerhalb eines Intervalls zwischen zwei benachbarten Polstellen liegen. Wir betrachten zu beliebigem $k \in \mathbb{Z}$ die Polstelle $(2k + 1)\pi/2$ und ihren linken Nachbarn. Für alle $x \in \mathbb{R}$ muss dann

$$(2k - 1)\frac{\pi}{2} < a \cdot \cos x < (2k + 1)\frac{\pi}{2}$$

gelten. Hieraus erhalten wir speziell für $x = {}^{\pi}\!/_{2}$ einerseits die Ungleichung $k\pi - {}^{\pi}\!/_{2} < 0$ und damit $k < {}^{1}\!/_{2}$ sowie andererseits $0 < k\pi + {}^{\pi}\!/_{2}$ und damit $k > -{}^{1}\!/_{2}$. Es muss also $k = 0$ sein. Wählen wir dann noch $x = 0$, so ergibt sich sofort $|a| < {}^{\pi}\!/_{2}$.

9 – (S. 167) Die Funktion $h \circ \sin \circ h$ ist für genau diejenigen $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert, für die $\sin {}^{1}\!/_{x} \neq 0$ ist, d. h. es muss $x \neq {}^{1}\!/_{k\pi}$ sein für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Infolgedessen lautet der gesuchte Definitionsbereich

$$\mathrm{D}_{h \circ \sin \circ h} = \mathbb{R} \setminus \left\{0, -\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}, -\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}, -\frac{1}{3\pi}, \frac{1}{3\pi}, \dots\right\}.$$

Die Ausnahmestellen (Pole) häufen sich bei Null. Offensichtlich enthalten die beiden Intervalle $(-\infty, -1/\pi)$ und $(1/\pi, \infty)$ keine Ausnahmestellen.

10 – (S. 167) (a): Die gebrochene lineare Funktion lässt sich umformen zu

$$f(x) = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma x + \delta} \cdot \frac{1}{\gamma}.$$

Eine invertierbare Funktion kann nicht konstant sein; wir erkennen somit anhand der Umformung, dass

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

gelten muss, wenn f invertierbar sein soll. Wir werden sehen, dass das Kriterium auch hinreichend ist. In üblicher Weise wird der Kandidat g für die Umkehrfunktion ermittelt:

$$g(x) = \frac{\delta x - \beta}{-\gamma x + \alpha}.$$

Damit bilden wir

$$(f \circ g)(x) = \frac{\beta(-\gamma x + \alpha) + \alpha(\delta x - \beta)}{\delta(-\gamma x + \alpha) + \gamma(\delta x - \beta)} = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)x}{\alpha\delta - \beta\gamma},$$

woraus sich $f \circ g = \mathrm{id}$ nach Kürzung von $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ ergibt. Auf die gleiche Weise erhält man $g \circ f = \mathrm{id}$, mithin $g = \bar{f}$.

(b): f ist involutorisch genau dann, wenn gilt:

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} = \frac{\delta x - \beta}{-\gamma x + \alpha} = \bar{f}(x).$$

Wir erhalten hieraus nach kurzer Umformung und Vergleich der Koeffizienten von x^k $(k = 0, 1, 2)$ die Bedingungen

$$\alpha\beta = -\beta\delta, \qquad \alpha^2 = \delta^2, \qquad -\alpha\gamma = \gamma\delta.$$

Fall (i): $\alpha = \delta$. Ist $\alpha = 0$, müssen β und γ beide $\neq 0$ sein (um $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ zu genügen), und die resultierende Involution lautet

$$f(x) = \bar{f}(x) = \frac{\beta}{\gamma x}. \tag{*}$$

Für $\alpha \neq 0$ wird hingegen $\beta = \gamma = 0$, und wir erhalten $f(x) = \bar{f}(x) = x$.
Fall (ii): $\alpha = -\delta$. Es ergibt sich sofort

$$f(x) = \bar{f}(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x - \alpha}. \qquad (**)$$

In dieser Darstellung ist der Sonderfall (*) enthalten ($\alpha = 0$).

(c): Die triviale Involution $f = \mathrm{id}$ hat jeden Punkt $\in \mathbb{R}$ zum Fixpunkt. Wir betrachten nun die nichttriviale Form (**).
Fall (i): $\gamma = 0$. Aus (**) ergibt sich die lineare Fixpunktgleichung

$$-x - \frac{\beta}{\alpha} = x$$

und damit der eindeutig bestimmte Fixpunkt $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$. (Beachte: Die Voraussetzung $-\alpha^2 - \beta\gamma \neq 0$, $\gamma = 0$ impliziert $\alpha \neq 0$.)
Fall (ii): $\gamma \neq 0$. Wir erhalten die quadratische Fixpunktgleichung

$$x^2 - \frac{2\alpha}{\gamma} x - \frac{\beta}{\gamma} = 0,$$

die zwei reelle Lösungen (Fixpunkte)

$$x_{1,2} = \frac{1}{\gamma}(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma})$$

besitzt, sofern $\alpha^2 + \beta\gamma > 0$ gilt. N. B.: Nach Voraussetzung ist $\alpha^2 + \beta\gamma \neq 0$.

11 – (S. 168) Nach Satz 2 ist $h := g \circ f \circ \bar{g}$ invertierbar, und es gilt gemäß der Umkehrregel: $\bar{h} = g \circ \bar{f} \circ \bar{g}$. Ist f involutorisch, wird daraus $\bar{h} = g \circ f \circ \bar{g} = h$, d. h. : h ist eine Involution. Sei nun umgekehrt h involutorisch. Es ist dann $\bar{h} = h$, also $g \circ \bar{f} \circ \bar{g} = g \circ f \circ \bar{g}$. Komposition mit $\bar{g}$ und g jeweils von links und von rechts auf beiden Seiten der Gleichung liefert $\bar{f} = f$.

12 – (S. 168) Setze $g(x) := x - a + b$. Mit der Aussage in Aufgabe 11 ergibt sich, dass $f^* = g \circ f \circ \bar{g}$ involutorisch ist. Es gilt $f^*(b) = f(a) - a + b$. Hieran ist die Behauptung unmittelbar abzulesen.

13 – (S. 168) (a) Die Umkehrfunktion von g^* lautet

$$\overline{g^*}(x) = \begin{cases} -\bar{h}(\varphi(x)) & \text{falls } x \leq 0; \\ \bar{h}(x) & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

Damit ergibt sich für $x \leq 0$:

$$g^*(-\overline{g^*}(x)) = g^*(\bar{h}(\varphi(x))) = h(\bar{h}(\varphi(x))) = \varphi(x),$$

sowie für $x \geq 0$:

$$g^*(-\overline{g^*}(x)) = g^*(-\bar{h}(x)) = \overline{\varphi}(h(\bar{h}(x))) = \overline{\varphi}(x).$$

(b) (i). Wir setzen zunächst g_1, g_2 als stetige Bijektionen voraus, für die gilt:

$$g_1 \circ (-\mathrm{id}) \circ \overline{g_1} = g_2 \circ (-\mathrm{id}) \circ \overline{g_2}. \tag{*}$$

Es ergibt sich unmittelbar $g_2 = g_1 \circ (-\mathrm{id}) \circ \overline{g_1} \circ g_2 \circ (-\mathrm{id})$. Wir definieren daher $\psi := (-\mathrm{id}) \circ \overline{g_1} \circ g_2 \circ (-\mathrm{id})$ und erhalten $g_2 = g_1 \circ \psi$. Aus (*) ergibt sich ferner

$$\psi \circ (-\mathrm{id}) = (-\mathrm{id}) \circ \overline{g_1} \circ g_2 = \overline{g_1} \circ g_2 \circ (-\mathrm{id}) = (-\mathrm{id}) \circ \psi,$$

was ausdrückt, dass ψ eine ungerade Funktion ist: $\psi(-x) = -\psi(x)$.

(ii). Sei nun g_1 eine Funktion, welche die Eigenschaften von g in der Aussage von Satz 4 besitzt, ferner ψ eine stetige, bijektive und ungerade Funktion. Offensichtlich ist dann $g_2 := g_1 \circ \psi$ ebenfalls stetig und bijektiv. Es bleibt somit noch zu zeigen, dass sich die Involution f auch mittels g_2 auf die behauptete Weise zerlegen lässt: $f = g_2 \circ (-\mathrm{id}) \circ \overline{g_2}$. In der Tat erhalten wir aufgrund der Umkehrregel (Satz 2) und der Ungeradheit von ψ sofort

$$\begin{aligned} g_2 \circ (-\mathrm{id}) \circ \overline{g_2} &= g_1 \circ \psi \circ (-\mathrm{id}) \circ \overline{\psi} \circ \overline{g_1} \\ &= g_1 \circ (-\mathrm{id}) \circ \psi \circ \overline{\psi} \circ \overline{g_1} \\ &= g_1 \circ (-\mathrm{id}) \circ \overline{g_1} = f. \end{aligned}$$

14 – (S. 180) (a) Für die Homomorphie zeigt man zunächst durch Induktion nach n, dass für alle $m, n \geq 0$ gilt: $s(m+n) = s(m) + s(n)$. — Der Induktionsanfang $n = 0$ ist klar. Induktionsschritt $n \to n+1$:

$$\begin{aligned} s(m+n+1) &= s(m+n) + 1 && \text{(nach Definition)} \\ &= s(m) + s(n) + 1 && \text{(Induktionsannahme)} \\ &= s(m) + s(n+1) && \text{(nach Definition).} \end{aligned}$$

Der Fall $m, n < 0$ lässt sich hierauf wie folgt zurückführen:

$$\begin{aligned} s(m+n) &= -s(-m-n) && \text{(nach Definition)} \\ &= -(s(-m)+s(-n)) && \text{(wegen } -m,-n>0) \\ &= -s(-m)-s(-n) \\ &= s(m)+s(n) && \text{(nach Definition).} \end{aligned}$$

Die beiden übrigen Fälle, in denen m, n verschiedene Vorzeichen haben, erledigen sich durch die für alle $m, n \geq 0$ gültige Gleichung $s(m-n) = s(m) - s(n)$, die sich wie folgt beweisen lässt: Ist $m \geq n$, so ergibt sich $s(m-n) + s(n) = s(m-n+n) = s(m)$, und wir sind fertig. Im Fall $m < n$ erhalten wir nach Definition $s(m-n) = -s(-(m-n)) = -s(n-m) = -(s(n)-s(m)) = s(m) - s(n)$.

(b) Injektivität von s: Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $n \neq m$, etwa $n > m$. Dann gilt auch $s(n) \neq s(m)$. Denn anderenfalls hätten wir $s(n) = s(m)$ und damit $s(n-m) = s(n) - s(m) = 0$, d. h. $\mathbb{F}$ hätte eine positive Charakteristik (Widerspruch).

15 – (S. 180) (a) Beweis zu (9): Mit Axiom (F2) ergibt sich $0 \circ f = (0+0) \circ f = (0 \circ f) + (0 \circ f)$ und daraus $0 \circ f = 0$.
(b) Beweis zu (10): Mit (F2) und unter Verwendung von Teil (a) hat man $((-f) \circ g) + (f \circ g) = (-f+f) \circ g = 0 \circ g = 0$. Somit gilt $(-f) \circ g = -(f \circ g)$.

16 – (S. 180) Wir zeigen die Behauptung durch Induktion: 0 ist eine Konstante ($0 \circ 0 = 0$) und daher $s(0) = 0 \in \mathbb{K}$. Sei nun $n \geq 0$ und $s(n) \in \mathbb{K}$ vorausgesetzt. Es folgt unmittelbar $s(n+1) = s(n) + 1 \in \mathbb{K}$. – Für $n < 0$ hat man nach Definition $s(n) = -s(-n)$ und daraus wegen $s(-n) \in \mathbb{K}$ auch $s(n) \in \mathbb{K}$.

17 – (S. 180) Seien $p = a_0 + a_1 X + \cdots + a_m X^m$ und $q = b_0 + b_1 X + \cdots + b_n X^n$ Polynome $\in \mathbb{K}[X]$. Es ist dann $p \circ q = a_0 + a_1 q + \cdots + a_m q^m$. Die Potenzen q^j ($0 \leq j \leq m$) sind Polynome über $\mathbb{K}$ (die sich mit Hilfe der Polynomialformel auf Normalform bringen lassen), daher auch $p \circ q \in \mathbb{K}[X]$. Die Anwendung von (F2), (F3) und (12) liefert hieraus

$$\begin{aligned} E_{p \circ q}(\iota) &= a_0 + a_1 E_q(\iota) + \cdots + a_m E_q(\iota)^m \\ &= (a_0 + a_1 \iota + \cdots + a_m \iota^m) \circ E_q(\iota) \\ &= E_p(\iota) \circ E_q(\iota). \end{aligned}$$

18 – (S. 180) Mit den Axiomen (F2), (F5) und (12) erhält man

$$(g^{-1} \circ h) \cdot (g \circ h) = (g^{-1} \cdot g) \circ h = 1 \circ h = 1$$

19 – (S. 180) Wir stellen f und g als Quotienten ganz-rationaler Funktionen $\in \mathrm{P}(\mathbb{R})$ dar:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad g(x) = \frac{r(x)}{s(x)}, \tag{$*$}$$

wo $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ und $q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n \neq 0$ und $s(x) \neq 0$. Alle hebbaren Unstetigkeiten seien in $(*)$ bereits gehoben.

Ist f eine Konstante, so gilt $f \circ g = f$, und wir sind fertig. Andernfalls ist $m \geq 1$ oder $n \geq 1$. Unter der Annahme $m \geq n$ erhalten wir den folgenden Bruch mit ganz-rationalen Funktionen im Zähler und im Nenner:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= \frac{a_0 + a_1 \frac{r(x)}{s(x)} + \cdots + a_m \frac{r(x)^m}{s(x)^m}}{b_0 + b_1 \frac{r(x)}{s(x)} + \cdots + b_n \frac{r(x)^n}{s(x)^n}} \\ &= \frac{a_0 s(x)^m + a_1 r(x) s(x)^{m-1} + \cdots + a_m r(x)^m}{b_0 s(x)^m + b_1 r(x) s(x)^{m-1} + \cdots + b_n r(x)^n s(x)^{m-n}}.\end{aligned}$$

Für den Fall $n \geq m$ ergibt sich ein ähnlicher Ausdruck.

Zu den Polstellen von $f \circ g$ gehören sicher die Polstellen von f der Form $g(a)$ mit $a \in \mathrm{D}_g$. Alle übrigen Polstellen von $f \circ g$ sind solche von g, jedoch im Allgemeinen nicht umgekehrt.

20 – (S. 180) Es ist $(g \circ f \circ h)(z) = (\exp(\frac{1}{z}) - 1)^{-1}$. Die Funktion hat Pole bei $z = 0$ sowie bei $z = {}^1/_{2\pi i k}$ für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Diese Polstellen haben 0 als Häufungspunkt und bilden somit *keine diskrete* Menge. Folglich ist $g \circ f \circ h$ nicht meromorph.

21 – (S. 196) (a): Zu (D1): $\widetilde{D}(f+g) = \theta \cdot D(f+g) = \theta D(f) + \theta D(g) = \widetilde{D}(f) + \widetilde{D}(g)$.
Zu (D2): $\widetilde{D}(f \cdot g) = \theta(D(f)g + fD(g)) = (\theta D(f)) \cdot g + f \cdot \theta D(g) = \widetilde{D}(f)g + f\widetilde{D}(g)$.
Somit ist $\widetilde{D}$ eine Derivation auf $\mathbb{F}$.
(b): Natürlich erfüllt θD für $\theta = 1$ die Kettenregel. Es gelte nun umgekehrt $\widetilde{D}(f \circ g) = (\widetilde{D}(f) \circ g) \cdot \widetilde{D}(g)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\theta \cdot D(f \circ g) &= ((\theta \cdot D(f)) \circ g) \cdot \theta \cdot D(g) \\ &= (\theta \circ g) \cdot (D(f) \circ g) \cdot \theta \cdot D(g).\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung hat man $D(f \circ g) = (D(f) \circ g) \cdot D(g)$. Mit der Kürzungsregel erhält man also aus dem Vorangehenden $\theta = (\theta \circ g) \cdot \theta$ und wegen $\theta \neq 0$ auch $\theta \circ g = 1$ für alle $g \in \mathbb{F}$. Speziell für $g = \iota$ ergibt sich $\theta = 1$.

22 – (S. 197) Beweis durch Induktion. $n = 1$: klar. – $n \to n+1$: Unter Anwendung der Produktregel (D2) und der Induktionsannahme ergibt sich

$$\begin{aligned} D(f_1 \cdots f_n f_{n+1}) &= D(f_1 \cdots f_n) f_{n+1} + f_1 \cdots f_n D(f_{n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (f_1 \cdots D(f_k) \cdots f_n f_{n+1}) + f_1 \cdots f_n D(f_{n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} f_1 \cdots D(f_k) \cdots f_{n+1}. \end{aligned}$$

23 – (S. 197) Nach der verallgemeinerten Produktregel und der Potenzregel hat man

$$D(f_1^{j_1} \cdots f_n^{j_n}) = \sum_{k=1}^{n} j_k f_1^{j_1} \cdots f_{k-1}^{j_{k-1}} f_k^{j_k - 1} D(f_k) f_{k+1}^{j_{k+1}} \cdots f_n^{j_n}.$$

Da $\mathbb{F}^\times$ eine Gruppe ist, gilt nach Voraussetzung $g := f_1^{j_1} \cdots f_n^{j_n} \in \mathbb{F}^\times$. Multiplikation der Gleichung mit $1/g$ liefert dann die Behauptung.

24 – (S. 197) Seien $f = a_0 + a_1\iota + a_2\iota^2 + \cdots$ und $g = b_0 + b_1\iota + b_2\iota^2 + \cdots$ beliebige Polynome aus $\mathbb{K}[\iota]$. Um der Übersicht willen betrachten wir die jeweiligen Koeffizienten von ι^k (vgl. dazu Aufgabe 3-§ 1), die wir hier ›allgemeine Koeffizienten‹ (a. K.) nennen wollen. Für die Derivierten gilt: $\partial(f) = a_1 + 2a_2\iota + \cdots$ und $\partial(g) = b_1 + 2b_2\iota + \cdots$. Der a. K. von $\partial(f) + \partial(g)$ lautet daher $(k+1)a_{k+1} + (k+1)b_{k+1}$, was offensichtlich mit $(k+1)(a_{k+1} + b_{k+1})$ (= a. K. von $\partial(f+g)$) übereinstimmt. Somit ist (D1) erfüllt.
Zu (D2): Der a. K. von fg ist $a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0$; wir haben dann

$$\begin{aligned} &\text{a. K. von } \partial(fg): && (k+1)(a_0 b_{k+1} + a_1 b_k + \cdots + a_{k+1} b_0), && (1) \\ &\text{a. K. von } \partial(f)g: && a_1 b_k + 2a_2 b_{k-1} + \cdots + (k+1) a_{k+1} b_0, && (2) \\ &\text{a. K. von } f\partial(g): && (k+1) a_0 b_{k+1} + k a_1 b_k \cdots + a_k b_1. && (3) \end{aligned}$$

Man bestätigt sofort, dass (1) die Summe von (2) und (3) ist. Somit gilt auch (D2).

25 – (S. 197) (a): Für $c, d \in \mathbb{K}_D$ hat man $D(c) = D(d) = 0$ und damit sowohl $D(c-d) = D(c) - D(d) = 0$, das heißt $c - d \in \mathbb{K}_D$, als auch $D(cd) =$

$D(c)d + cD(d) = 0$, mithin $cd \in \mathbb{K}_D$. Somit ist $\mathbb{K}_D$ ein Unterring von $\mathbb{F}$; natürlich ist er kommutativ und wegen $1 \in \mathbb{K}_D$ auch unitär.

(b): ∂ ist auf $\mathbb{K}[\iota]$ so definiert, dass für $f = a_0 + a_1\iota + \cdots + a_n\iota^n \in \mathbb{K}[\iota]$ gilt: $\partial(f) = a_1 + 2a_2\iota + \cdots + na_n\iota^{n-1}$. Ist $a_j = 0$ für $j \geq 1$, d. h. $f = a_0$, so wird $\partial(f) = 0$ und man hat $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}_\partial$. Gilt umgekehrt $\partial(f) = 0$, so resultiert $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ (vgl. Aufgabe 2–§ 1) und somit $f = a_0 \in \mathbb{K}$, was $\mathbb{K}_\partial \subseteq \mathbb{K}$ beweist.

26 – (S. 197) Sei $f = a_0 + a_1\iota + \cdots + a_n\iota^n \in \mathbb{K}_D[\iota]$ und $g \in \mathbb{F}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
D(f \circ g) &= D(a_0 + a_1 g + \cdots + a_n g^n)\\
&= D(a_0) + D(a_1 g) + \cdots + D(a_n g^n)\\
&= a_1 D(g) + a_2 D(g^2) + \cdots + a_n D(g^n)\\
&= a_1 D(g) + 2a_2 g D(g) + \cdots + n a_n g^{n-1} D(g) && \text{(nach (19))}\\
&= (a_1 + 2a_2 g + \cdots + n a_n g^{n-1}) \cdot D(g)\\
&= (\partial(f) \circ g) \cdot D(g)\\
&= (D(f) \circ g) \cdot D(g). && \text{(nach (23), } D(\iota) = 1\text{)}
\end{aligned}$$

27 – (S. 197) Sei zunächst $m \geq 0$ angenommen. Für $m = 0$ (Induktionsanfang) ist die Behauptung $1 \circ f = 1$ trivialerweise richtig. Der Induktionsschritt $m \to m+1$ vollzieht sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
D(\bar{f})^{m+1} \circ f &= (D(\bar{f})^m \cdot D(\bar{f})) \circ f\\
&= (D(\bar{f})^m \circ f) \cdot (D(\bar{f}) \circ f) && \text{(Axiom (F3))}\\
&= D(f)^{-m} \cdot D(f)^{-1} && \text{(Induktionsannahme, (25))}\\
&= D(f)^{-(m+1)}.
\end{aligned}$$

Im Fall $m < 0$ haben wir nach dem soeben Gezeigten $D(f)^m = D(\bar{f})^{-m} \circ f$ und damit

$$D(f)^{-m} = \frac{1}{D(\bar{f})^{-m} \circ f} = \frac{1}{D(\bar{f})^{-m}} \circ f = D(\bar{f})^m \circ f.$$

28 – (S. 197) Wir notieren das betreffende Polynom P laut Voraussetzung in der Normalform

$$P = \sum c_{r_1 \ldots r_n} X_1^{r_1} \cdots X_n^{r_n},$$

worin die Summation über eine gewisse Indexmenge von n-Tupeln $(r_1, \ldots, r_n)$ nichtnegativer Zahlen erfolgt, für die $r_1 + \cdots + r_n = k$ ist. Damit erhalten wir der Reihe nach die folgenden Identitäten:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial X_j} &= \sum r_j c_{r_1 \ldots r_n} X_1^{r_1} \cdots X_j^{r_j - 1} \cdots X_n^{r_n} \\
X_j \frac{\partial P}{\partial X_j} &= \sum r_j c_{r_1 \ldots r_n} X_1^{r_1} \cdots X_n^{r_n} \\
\sum_{j=1}^{n} X_j \frac{\partial P}{\partial X_j} &= \sum_{j=1}^{n} r_j \sum c_{r_1 \ldots r_n} X_1^{r_1} \cdots X_n^{r_n} = \sum_{j=1}^{n} r_j P = k \cdot P.
\end{aligned}$$

29 – (S. 197) Die Anzahl möglicher Folgen der Länge k, deren Plätze mit irgendeinem von n Objekten belegt werden kann, beträgt n^k. Ohne Einschränkung denke man sich die n Objekte dabei durch die Ziffern $1, 2, \ldots, n$ repräsentiert. Kommt in einer k-gliedrigen Folge die Ziffer ν genau j_ν-mal vor, so gilt $j_1 + j_2 + \cdots + j_n = k$. Jede Lösung $(j_1, \ldots, j_n)$ dieser diophantischen Gleichung in nichtnegativen Zahlen j_ν repräsentiert also ein Muster für die möglichen Wiederholungen der Ziffern und liefert mit $k!/(j_1! \cdots j_n!)$ die Anzahl der Folgen, die dieses Muster aufweisen. Daher ist die über sämtliche Lösungstupel $(j_1, \ldots, j_n)$ sich erstreckende Summe dieser Anzahlen gleich der Anzahl aller k-Permutationen von $1, 2, \ldots, n$ mit Wiederholung.

30 – (S. 197) Um Fallunterscheidungen bezüglich der Indizes zu vermeiden, notieren wir lediglich andeutungsweise die in P vorkommenden Unbestimmten als $X_1, X_2, \ldots$. Nach Voraussetzung wird dann aus der rechten Seite der Behauptung

$$P(Q_1(R_1, \ldots, R_{q(1)}), Q_2(R_1, \ldots, R_{q(2)}), \ldots). \tag{$*$}$$

Die Auswertung der linken Seite liefert zunächst $P \circ Q_\sharp = P(Q_1, Q_2, \ldots)$ und damit schließlich

$$(P \circ Q_\sharp) \circ R_\sharp = P(Q_1 \circ R_\sharp, Q_2 \circ R_\sharp, \ldots),$$

was offensichtlich dasselbe ist wie $(*)$.

31 – (S. 198) (a): Induktionsanfang $n = 0$: Auf beiden Seiten der behaupteten Gleichung steht $f \cdot g$. — Induktionsschritt $n \to n + 1$: Der Reihe nach wendet man die Induktionsannahme, die Summen- und die Produktregel an und erhält:

$$D^{n+1}(fg) = D\left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} D^j(f) D^{n-j}(g)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} D(D^j(f)D^{n-j}(g)) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} D^{j+1}(f)D^{n-j}(g) + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} D^j(f)D^{n-j+1}(g) \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} D^j(f)D^{n-j+1}(g) + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} D^j(f)D^{n-j+1}(g) \\
&= D^{n+1}(f)g + \sum_{j=1}^{n} \left(\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} \right) D^j(f)D^{n+1-j}(g) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + D^0(f)D^{n+1}(g) \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} D^j(f)D^{n+1-j}(g).
\end{aligned}
$$

(b): Zum Beweis von (32) führen wir eine Induktion nach der Anzahl s der Faktoren durch. Für $s = 1$ ist die Behauptung klar. – Induktionsschritt $s \to s+1$: Nach der in (a) bereits bewiesenen Regel von Leibniz (12) gilt

$$D^n((f_1 \cdots f_s)f_{s+1}) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} D^i(f_1 \cdots f_s)D^{n-i}(f_{s+1}),$$

wobei laut Induktionsannahme

$$D^i(f_1 \cdots f_s) = \sum_{j_1+\cdots+j_s=i} \frac{i!}{j_1! \cdots j_s!} D^{j_1}(f_1) \cdots D^{j_s}(f_s).$$

Setzen wir nun $j_{s+1} = n - i$, so wird $j_1 + \cdots + j_s + j_{s+1} = i + (n-i) = n$ und damit

$$\binom{n}{i} \cdot \frac{i!}{j_1! \cdots j_s!} = \frac{n!}{j_1! \cdots j_s! j_{s+1}!},$$

was zu zeigen war.

Factorial polynomials and associated number families[1]

Abstract. – Two doubly indexed families of polynomials in several indeterminates are considered. They are related to the falling and rising factorials in a similar way as the potential polynomials (introduced by L. Comtet) are related to the ordinary power function. We study the inversion relations valid for these factorial polynomials as well as the number families associated with them.

1. Basic notions

In the following, we denote by $\mathcal{F}$ the algebra $\mathcal{K}[[x]]$ of formal power series in x with coefficients in a fixed commutative field $\mathcal{K}$ of characteristic zero. The elements of $\mathcal{F}$ will be called *functions*, those of $\mathcal{K}$ *constants* (or *numbers*). For any functions f, g and constant c, the sum $f + g$, the scalar product cf, and the product $f \cdot g$ are, as customary, assumed to be defined coordinate-wise and by Cauchy convolution, respectively. Furthermore, we consider the composition $\circ$ with $(f \circ g)(x) := f(g(x))$ which is a partial operation on $\mathcal{F}$, but well-defined, for example, if the leading coefficient of g is zero or, otherwise, f is a (Laurent) polynomial in x^{-1}, x with coefficients in $\mathcal{K}$. The identity element is, of course, $\iota = \iota(x) := x$, satisfying $f \circ \iota = \iota \circ f = f$.

The ordinary algebraic derivation D on $\mathcal{K}[x]$ (with $D(\iota) = 1$) can be extended, in a unique way, to a derivation on $\mathcal{F}$ (here also denoted by D) for which the known rules for addition, multiplication and composition apply [27, p. 15, 61]. Iterating D leads, in the usual way, to derivatives of higher order $D^n(f)$. By setting $f_n := D^n(f)(0)$, we obtain, as is well known, the representation of $f(x)$ in the form of a Taylor series expansion:

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} f_n \frac{x^n}{n!}.$$

The constants $f_0, f_1, f_2, \ldots \in \mathcal{K}$ are called *Taylor coefficients of f*.

[1] Unveröffentlichtes Manuskript, Juli 2023

2. Potential polynomials

Of special interest is the task of finding the general Taylor coefficient of a composite function $f \circ g$. Its well known solution is given by a famous formula of Faà di Bruno (cf. [7, p. 137] and [25, eqs. (1.3) and (4.1)]), which in modern notation is

$$D^n(f \circ g)(0) = \sum_{k=0}^{n} D^k(f)(g_0) B_{n,k}(g_1, \dots, g_{n-k+1}). \tag{1}$$

Here $B_{n,k}$ are the *partial Bell polynomials* (or: *exponential polynomials*) that can be represented in the form of a 'diophantine' sum

$$B_{n,k} = \sum \frac{n!}{r_1! r_2! \cdots (1!)^{r_1} (2!)^{r_2} \cdots} X_1^{r_1} X_2^{r_2} \cdots X_{n-k+1}^{r_{n-k+1}}$$

to be taken over all sequences of integers $r_1, r_2, r_3, \ldots \geq 0$ such that $r_1 + r_2 + r_3 + \cdots = k$ and $r_1 + 2r_2 + 3r_3 + \cdots = n$ (see [7, p. 134], [27, p. 26, 65]). By replacing the Taylor coefficients g_j with indeterminates X_j on the right-hand side of (1), one obtains a polynomial dependent on f (in [26, 27] called the *Faà di Bruno polynomial of f*). An important special case is $f = \iota^k$, $k \in \mathbb{Z}$, which leads to the *potential polynomials*

$$P_{n,k} = \sum_{j=0}^{n} k^{\underline{j}} X_0^{k-j} B_{n,j} \tag{2}$$

introduced by Comtet [7, p. 141] and extensively studied in [7, 26, 27]. Here $k^{\underline{j}}$ is D. Knuth's symbol for the falling factorial power $k(k-1)\cdots(k-j+1)$, and $k^{\underline{j}} = 1$ for $j = 0$.

If $g \in \mathcal{F}$ is invertible (w. r. t. $\circ$), then $g_0 = g(0) = 0$, and we obtain from (1) $D^n(g^k)(0) = k! B_{n,k}(g_1, \dots, g_{n-k+1})$, that is, $B_{n,k}(g_1, \dots, g_{n-k+1})$ is the nth Taylor coefficient of $g(x)^k/k!$. For completeness, we note that there also exists a polynomial expression $A_{n,k}(g_1, \dots, g_{n-k+1})$ for the nth Taylor coefficient of $\overline{g}(x)^k/k!$, where $\overline{g}$ denotes the unique inverse of g (with $g \circ \overline{g} = \overline{g} \circ g = \iota$). The fundamental properties (recurrences, inverse relations, reciprocity laws) of these two families of polynomials are treated in detail in [25, 26, 27]. Here we make use of the fact that the (lower triangular) matrices $(A_{n,k})$ and $(B_{n,k})$ are inverses of each other with respect to matrix multiplication, more precisely:

$$\sum_{j=k}^{n} A_{n,j} B_{j,k} = \delta_{nk} \quad (1 \leq k \leq n), \tag{3}$$

where $\delta_{nn} = 1$, $\delta_{nk} = 0$ if $n \neq k$ (Kronecker symbol); see [27, p. 29 and p. 82].

Let Q_n be any sequence of polynomials from $\mathcal{K}[X_1, X_2, \ldots]$. We then call the sequence of numbers $q(n) := Q_n(1, 1, \ldots)$, obtained by replacing each indeterminate occurring in Q_n by 1, *associated with* Q_n. Thus $q(n)$ is equal to the sum of the coefficients of Q_n. For example, it is well known that the family of numbers $s_2(n,k) := B_{n,k}(1, \ldots, 1)$ associated with the partial Bell polynomials consists just of the Stirling numbers of the second kind [7, Thm. B, p. 135]. Together with the signed Stirling numbers of the first kind $s_1(n,k)$, they satisfy the inverse relation $\sum_{j=k}^{n} s_1(n,j) s_2(j,k) = \delta_{nk}$ (see, for example, [28, Prop. 1.4.1(a)]). Therefore, specializing all indeterminates to 1 in (3), $A_{n,k}(1, \ldots, 1)$ turns out to be equal to $s_1(n,k)$.

In his famous treatise *Methodus differentialis* (London, 1730) J. Stirling introduced the number family $s_1(n,k)$ by expanding $x^{\underline{n}}$ into a polynomial in standard form

$$x^{\underline{n}} = x(x-1) \cdots (x-n+1) = \sum_{k=0}^{n} s_1(n,k) x^k. \tag{4}$$

Due to the inverse relationship of the Stirling numbers of the first and second kind [28, Prop. 1.4.1(b)] we get from (4)

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} s_2(n,k) x^{\underline{k}}. \tag{5}$$

Comparing now (5) with (2), we find that $P_{n,k}(1, \ldots, 1) = k^n$ holds, i.e., k^n is the number family associated with the potential polynomials $P_{n,k}$.

Remark 2.1. The power terms $k^n, k^{\underline{n}}, k^{\overline{n}}$ have an obvious combinatorial meaning that entails a natural combinatorial interpretation of equations (4) and (5) (see, for example, [28, p. 33–35]). Also the Stirling numbers have a combinatorial meaning: $s_2(n,k)$ counts the ways n objects can be divided into k non-empty subsets ('subset numbers'), whereas the signless expression $c(n,k) := |s_1(n,k)| = (-1)^{n-k}s_1(n,k)$ represents the number of permutations of n objects having k cycles ('cycle numbers').

3. Factorial polynomials

Analogous to the way in which the potential polynomials were defined as Faà di Bruno polynomials of ι^k, let us now introduce *lower and upper factorial polynomials* as Faà di Bruno polynomials of the falling and rising factorial power functions $\iota^{\underline{k}}$ and $\iota^{\overline{k}}$, respectively:

$$P_{n,\underline{k}} := \sum_{j=0}^{n} D^j(\iota^{\underline{k}})(X_0)B_{n,j}(X_1,\dots,X_{n-j+1}) \tag{6}$$

$$P_{n,\overline{k}} := \sum_{j=0}^{n} D^j(\iota^{\overline{k}})(X_0)B_{n,j}(X_1,\dots,X_{n-j+1}) \tag{7}$$

We first consider (6). Since D^j is a linear operator, applying (5) to $\iota^{\underline{k}}$ and observing (2) yields

$$\begin{aligned}
P_{n,\underline{k}} &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{r=0}^{k} s_1(k,r)D^j(\iota^r)(X_0)B_{n,j} \\
&= \sum_{r=0}^{k} s_1(k,r)\sum_{j=0}^{n} r^{\underline{j}}X_0^{r-j}B_{n,j} \\
&= \sum_{r=0}^{k} s_1(k,r)P_{n,r} \qquad (8)
\end{aligned}$$

which can be reversed to

$$P_{n,k} = \sum_{r=0}^{k} s_2(k,r)P_{n,\underline{r}}. \tag{9}$$

In a similar way (7) can be evaluated. The only thing to keep in mind is that $\iota^{\overline{k}} = (-1)^k(-\iota)^{\underline{k}}$ and therefore by (4)

$$\iota^{\overline{k}} = (-1)^k \sum_{r=0}^{k} s_1(k,r)(-\iota)^r = \sum_{r=0}^{k} c(k,r)\iota^r,$$

whence we readily obtain

$$P_{n,\overline{k}} = \sum_{r=0}^{k} c(k,r)P_{n,r}. \tag{10}$$

To be able to establish also the connection between $P_{n,\overline{k}}$ and $P_{n,\underline{k}}$, recall the numbers $l(n,k)$ introduced by I. Lah [20], [24, p. 43–44]:

$$l(n,k) := (-1)^n \frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1} \quad \text{with} \quad x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} l(n,k)x^{\underline{k}}. \tag{11}$$

Remark 3.1. The unsigned *Lah numbers* $|l(n,k)|$ count the ways a set of n objects can be partitioned into k non-empty linearly ordered subsets.

Two well-known remarkable properties of the signed Lah numbers come into play in what follows: their representability in terms of the Stirling numbers, and the fact that they are inverses of themselves (see [24, p. 44] and [27, p. 31, 91]):

$$\sum_{j=k}^{n}(-1)^j s_1(n,j)s_2(j,k) = l(n,k), \tag{12}$$

$$\sum_{j=k}^{n} l(n,j)l(j,k) = \delta_{nk}. \tag{13}$$

Theorem 3.1. *For all nonnegative integers n,k we have*

$$\text{(i)} \quad P_{n,\overline{k}} = \sum_{j=0}^{k}(-1)^k l(k,j)P_{n,\underline{j}},$$

$$\text{(ii)} \quad P_{n,\underline{k}} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j l(k,j) P_{n,\overline{j}}.$$

Proof. Applying (10), (9) and Remark 2.1 yields

$$\begin{aligned}
P_{n,\overline{k}} &= \sum_{r=0}^{k} c(k,r) P_{n,r} \\
&= \sum_{r=0}^{k} \sum_{j=0}^{r} c(k,r) s_2(r,j) P_{n,\underline{j}} \\
&= \sum_{r=0}^{k} \sum_{j=0}^{r} (-1)^{k-r} s_1(k,r) s_2(r,j) P_{n,\underline{j}} \\
&= \sum_{j=0}^{k} (-1)^k \left(\sum_{r=j}^{k} (-1)^r s_1(k,r) s_2(r,j) \right) P_{n,\underline{j}}.
\end{aligned}$$

Now, applying (12) to the inner sum, we obtain assertion (i).
Assertion (ii) follows from (i) with respect to (13) as follows:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k} (-1)^j l(k,j) P_{n,\overline{j}} &= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j l(k,j) \sum_{r=0}^{j} (-1)^j l(j,r) P_{n,\underline{r}} \\
&= \sum_{r=0}^{k} \left(\sum_{j=r}^{k} (-1)^{2j} l(k,j) l(j,r) \right) P_{n,\underline{r}} \\
&= \sum_{r=0}^{k} \delta_{kr} P_{n,\underline{r}} = P_{n,\underline{k}}. \quad \Diamond
\end{aligned}$$

4. Associated number families

This section deals with the number families associated with the upper and lower factorial polynomials:

$$[n]_{\overline{k}} := P_{n,\overline{k}}(1,\ldots,1) = \sum_{r=0}^{k} c(k,r) r^n, \tag{14}$$

$$[n]_{\underline{k}} := P_{n,\underline{k}}(1,\ldots,1) = \sum_{r=0}^{k} s_1(k,r) r^n. \tag{15}$$

To be more consistent with the combinatorial interpretation of the Stirling numbers (as explained in Remark 2.1), we will use in some cases the notation of J. Karamata recommended by Knuth [18]:

$$s_2(n,k) = \left\{ {n \atop k} \right\} \qquad \text{and} \qquad c(n,k) = \left[{n \atop k} \right].$$

We start with some preparatory remarks. From (5) we readily obtain $r^n = \sum_{j=0}^{n} j!\binom{r}{j} s_2(n,j)$ which implies an identity that reduces a power sum with arbitrary weights $\gamma_{k,r}$, $1 \le r \le k$, and integer exponent $n \ge 1$ as follows:

$$\sum_{r=1}^{k} \gamma_{k,r} r^n = \sum_{j=1}^{\min(k,n)} j! s_2(n,j) \sum_{r=j}^{k} \binom{r}{j} \gamma_{k,r}. \tag{16}$$

There are quite a few cases allowing the inner sum on the right-hand side of (16) to be simplified significantly, that is, we would obtain an upper summation rule such as

$$\sum_{r=j}^{k} \binom{r}{j} \gamma_{k,r} = f(k,j) \tag{17}$$

with a more or less closed expression $f(k,j)$.

Remark 4.1. The most simple example is $\gamma_{k,r} \equiv 1$, yielding in (17) the term $f(k,j) = \binom{k+1}{j+1}$. With this, (16) becomes the familar identity

$$1^n + 2^n + \cdots + k^n = \sum_{j=1}^{\min(k,n)} j! \left\{ {n \atop j} \right\} \binom{k+1}{j+1}. \tag{18}$$

The reader may find in Hsu [12] a great variety of choices for the $\gamma_{k,r}$. However, the case of Stirling numbers as weights has not been considered in those discussions.

Boyadzhiev [4] has evaluated (16) for the cycle numbers $\gamma_{k,r} = c(k,r)$ thereby taking $f(k,j) = c(k+1, j+1)$, which turns (17) into a well-known identity (see, for example, [19, p. 68, eq. (51)]). This gives immediately the following nice result [4, Prop. 2.7] that has a remarkable analogy to (18):

Proposition 4.1.

$$[n]_{\overline{k}} = \sum_{r=1}^{k} \begin{bmatrix} k \\ r \end{bmatrix} r^n = \sum_{j=1}^{\min(k,n)} j! \begin{Bmatrix} n \\ j \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} k+1 \\ j+1 \end{bmatrix}.$$

Remark 4.2. Instead of $s_2(n,j)$ Boyadzhiev makes use of a Stirling *function* $S(n,j)$ whose first argument is allowed to be a complex number $n \neq 0$. In this case, the upper summation limit $\min(k,n)$, which appears in (16) and in Proposition 4.1, has to be replaced by k.

From now on, the exponent n is assumed to be any positive integer.

Let us turn finally to the question of what result we get from (16) when the *signed* Stirling numbers of the first kind $s_1(k,r)$ are chosen as weights. The answer is given in the following

Theorem 4.2.

$$[n]_{\underline{k}} = \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} \begin{bmatrix} k \\ r \end{bmatrix} r^n = \sum_{j=1}^{\min(k,n)} (-1)^{k-j} j! \begin{Bmatrix} n \\ j \end{Bmatrix} \left(\begin{bmatrix} k-1 \\ j-1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k-1 \\ j \end{bmatrix} \right).$$

Proof. Evaluating (16) for $\gamma_{k,r} = s_1(k,r)$ requires a new upper summation formula:

$$\sum_{r=j+1}^{k} \binom{r}{j} s_1(k,r) = k s_1(k-1,j). \tag{19}$$

First, we show by induction on k that (19) holds for every $k \geq 1$ and $0 \leq j \leq k-1$. In the case of $k = 1$ we have $j = 0$, and both sides of (19) are equal to 1.

The induction step ($k \to k+1$) makes repeated use of the familiar recurrence formula for the Stirling numbers of the first kind (see, e. g., [19, p. 67]):

$$s_1(k+1,r) = s_1(k,r-1) - k s_1(k,r).$$

Replacing $s_1(k+1,r)$ by $s_1(k,r-1) - ks_1(k,r)$ we obtain

$$\sum_{r=j+1}^{k+1} s_1(k+1,r)\binom{r}{j} = \sum_{r=j+1}^{k+1} s_1(k,r-1)\binom{r}{j} - \sum_{r=j+1}^{k+1} ks_1(k,r)\binom{r}{j}. \quad (20)$$

By induction hypothesis, the second sum on the right-hand side of (20) is equal to $k^2 s_1(k-1,j)$. The first sum can be splitted into two parts by applying the familiar basic addition formula for the binomial coefficients. We then have, again by induction hypothesis,

$$\sum_{r=j+1}^{k+1} s_1(k,r-1)\binom{r-1}{j-1} = \sum_{r=j}^{k} s_1(k,r)\binom{r}{j-1} = ks_1(k-1,j-1),$$
$$\sum_{r=j+1}^{k+1} s_1(k,r-1)\binom{r-1}{j} = \sum_{r=j}^{k} s_1(k,r)\binom{r}{j} = s_1(k,j) + ks_1(k-1,j).$$

Combining these results we obtain for the sum on the left-hand side of (20)

$$\begin{aligned} ks_1(k-1,j-1) + s_1(k,j) + ks_1(k-1,j) - k^2 s_1(k-1,j) &= \\ k\cdot[s_1(k-1,j-1) - (k-1)s_1(k-1,j)] + s_1(k,j) &= \\ ks_1(k,j) + s_1(k,j) &= \\ (k+1)s_1(k,j) & \end{aligned}$$

which completes the induction.

Finally, it follows from (19):

$$\begin{aligned} \sum_{r=j}^{k} \binom{r}{j} s_1(k,r) &= s_1(k,j) + ks_1(k-1,j) \\ &= s_1(k-1,j-1) + s_1(k-1,j) \\ &= (-1)^{k-j}\begin{bmatrix} k-1 \\ j-1 \end{bmatrix} - (-1)^{k-j}\begin{bmatrix} k-1 \\ j \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

This yields the asserted equation. $\Diamond$

We conclude with some examples for small exponents $n = 1, 2, 3$ which demonstrate that the given power sum indeed undergoes a substantial simplification through the right-hand side expression in the statement of Theorem 4.2.

Let $k \geq 2$, then, cancelling $(-1)^k$ in each equation we obtain the identities:

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{k} (-1)^r \begin{bmatrix} k \\ r \end{bmatrix} r \;\; &= \begin{bmatrix} k-1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\
\sum_{r=1}^{k} (-1)^r \begin{bmatrix} k \\ r \end{bmatrix} r^2 &= 3\begin{bmatrix} k-1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} k-1 \\ 2 \end{bmatrix}, \\
\sum_{r=1}^{k} (-1)^r \begin{bmatrix} k \\ r \end{bmatrix} r^3 &= 7\begin{bmatrix} k-1 \\ 1 \end{bmatrix} - 12\begin{bmatrix} k-1 \\ 2 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} k-10 \\ 3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Note on expanding implicit functions into formal power series by means of multivariable Stirling polynomials[1]

Abstract. – Starting from the representation of a function $f(x, y)$ as a formal power series with Taylor coefficients $f_{m,n}$, we establish a formal series for the implicit function $y = y(x)$ such that $f(x, y) = 0$ and the coefficients of the series for y depend exclusively on the $f_{m,n}$. The solution to this problem provided here relies on using partial Bell polynomials and their orthogonal companions.

1. Introduction

The problem of computing the higher derivatives of a function $y = y(x)$, which is implicitly given by an equation $f(x, y) = 0$, has been discussed several times already in the mathematical literature of the 19th and 20th

[1] Unveröffentlichtes Manuskript, Juli 2023

centuries. L. Comtet has listed some of these papers in the bibliography of his famous monograph [7]. His own contribution to the problem can be found in [5, 7, 8]. Recently, the problem has attracted renewed attention, especially with regard to some of its combinatorial aspects. The results in [8] have been subjected to careful analysis by Wilde [30], who also gives new proofs. Zemel [31] provides an in-depth combinatorial interpretation for those binomial building blocks that appear in the closed formula he proved for the higher derivatives of y.

2. Preliminaries

The procedure described in the following for calculating the higher derivatives of an implicit function starts from the problem as formulated by Comtet in [7, p. 152–153]. There, for a function f given as a formal power series

$$f(x, y) = \sum_{m,n \geq 0} f_{m,n} \frac{x^m y^n}{m!n!}$$

(with coefficients $f_{m,n}$ from a fixed commutative field of characteristic zero) Comtet poses the somewhat modified (but equivalent) task of finding a formal power series $y = y(x) = \sum_{n \geq 1} y_n \frac{x^n}{n!}$ such that $f(x, y) = 0$. From this one gets a representation of the k-th derivatives $D^k(y)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ as

$$D^k(y) = y_k + \sum_{n \geq 1} y_{k+n} \frac{x^n}{n!}.$$

In order to be able to compute $y_n = D^n(y)(0)$, we assume $f_{0,0} = 0$ and $f_{0,1} \neq 0$. Then, by writing

$$f(x, y) = \sum_{n \geq 0} \varphi_n \frac{y^n}{n!},$$

where $\varphi_n = \varphi_n(x) = \sum_{m \geq 0} f_{m,n} \frac{x^m}{m!}$, we see that $f(x, y) = 0$ is equivalent to

$$g(y) := \sum_{n \geq 1} \varphi_n \frac{y^n}{n!} = -\varphi_0. \tag{1}$$

The formal power series g is invertible (with respect to composition $\circ$), since $g(0) = 0$ and by assumption $D(g)(0) = \varphi_1 = f_{0,1} + x \cdot \sum(\dots) \neq 0$. Let $\overline{g}$ denote the (unique) inverse of g. Then, the implicit function y is obtained from (1) in the form

$$y = y(x) = \overline{g}(-\varphi_0(x)). \tag{2}$$

Comtet [7] evaluates this expression using the Lagrange inversion formula and determines the coefficients y_n by collecting the terms in $x^n/n!$ that occur in this process. But only in principle! In fact, only some few *ad hoc* calculations are performed that yield explicit representations for y_1, y_2, y_3, y_4 (see Comtet's table on p. 153). Of course, this does not tell us what the general coefficient y_n actually looks like.

In the following, we show how the concepts developed in [25, 26, 27] provide a complete insight into the structure of y_n solely as a function of the coefficients of $f(x, y)$. This is done in two reduction steps.

3. The first reduction step

In the first step, we determine the n-th Taylor coefficient $\overline{g}_n$ of $\overline{g}$:

$$\overline{g}_n = \overline{g}_n(x) := \left[\frac{y^n}{n!}\right] \overline{g}(y) = A_{n,1}(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)), \tag{3}$$

where $A_{n,1}$ is the first member of the double-indexed family $A_{n,k}$ of multivariable Stirling polynomials in the indeterminates $X_1^{-1}, X_2, \dots, X_{n-k+1}$ with $0 \leq k \leq n$; see [25, Eq. (7.2)]. A fundamental (and even characteristic) property of these polynomials is their inverse relationship to the partial Bell polynomials $B_{n,k}$ [25, Thm. 5.1], which states that $\sum_{j=k}^{n} A_{n,j} B_{j,k} = \delta_{nk}$, where $\delta_{nn} = 1$, $\delta_{nk} = 0$, if $n \neq k$ (Kronecker's symbol). For further information, the reader is referred to the monograph [27].

Remark. In [25, 26, 27], the collective term 'Stirling polynomials of the first and second kind' (in several indeterminates) was proposed for $A_{n,k}$ and $B_{n,k}$ because the associated coefficient sums $A_{n,k}(1, \dots, 1)$ and $B_{n,k}(1, \dots, 1)$ turn out to be just the signed Stirling numbers of the first kind and the Stirling numbers of the second kind, respectively. The joint naming as Stirling polynomials is moreover justified by the reciprocity law unifying them: $A_{n,k} = (-1)^{n-k} B_{-k,-n}$ with $n, k \in \mathbb{Z}$; see [26, Sect. 8].

For our purposes we need the following explicit representation of $A_{n,1}$ as a linear combination of monomial terms [25, Cor. 7.2]:

$$A_{n,1} = X_1^{-(2n-1)} \sum_{\mathbb{P}(2n-2,n-1)} \frac{(-1)^{n-1-r_1}(2n-2-r_1)!}{r_2! \cdots r_n!(2!)^{r_2} \cdots (n!)^{r_n}} X_1^{r_1} X_2^{r_2} \cdots X_n^{r_n}. \tag{4}$$

The sum has to be taken over the set $\mathbb{P}(2n-2, n-1)$ of all partitions of $2n-2$ elements into $n-1$ non-empty blocks, that is, of all sequences $r_1, r_2, \ldots, r_n$ of nonnegative integers such that $r_1 + r_2 + \cdots + r_n = n-1$ and $r_1 + 2r_2 + \cdots + nr_n = 2n-2$.

From equations (2) and (3) we now get

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{k\geq 1} \overline{g}_k \frac{(-\varphi_0(x))^k}{k!} \qquad (5) \\ &= \sum_{k\geq 1} (-1)^k A_{k,1}(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)) \frac{\varphi_0(x)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Using a well-known property of the partial Bell polynomials (see, for instance, [7, p. 133]) and observing that $D^j(\varphi_0)(0) = f_{j,0}$ we have

$$\frac{\varphi_0(x)^k}{k!} = \sum_{n\geq k} B_{n,k}(f_{1,0}, \ldots, f_{n-k+1,0}) \frac{x^n}{n!}, \tag{6}$$

and thus from (3) and (5)

$$y(x) = \sum_{k\geq 1} \sum_{n\geq k} (-1)^k \overline{g}_k(x) B_{n,k}(f_{1,0}, \ldots, f_{n-k+1,0}) \frac{x^n}{n!}, \tag{7}$$

where $\overline{g}_k(x) = A_{k,1}(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x))$ is well-defined as a formal power series because of $\varphi_1 \neq 0$. Of course, the term $\overline{g}_k(x)$ hides most of the remaining complexity, which is why we do the following power series 'ansatz' in a purely formal way for now:

$$A_{k,1}(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)) = \sum_{j\geq 0} a_{k,j} \frac{x^j}{j!}.$$

With this we obtain from (7)

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{n,j\geq 0}\sum_{k\geq 1}(-1)^k a_{k,j} B_{n,k}(f_{1,0},\dots,f_{n-k+1,0})\frac{x^{n+j}}{n!j!}\\
&= \sum_{m\geq n\geq 0}\binom{m}{n}\left\{\sum_{k\geq 1}(-1)^k a_{k,m-n} B_{n,k}(f_{1,0},\dots,f_{n-k+1,0})\right\}\frac{x^m}{m!}.
\end{aligned}
$$

Since the coefficient of $x^m/m!$ is nonzero if and only if $m \geq n \geq k$, we obtain the following

Proposition 1.

$$
y_m = \sum_{n=1}^{m}\binom{m}{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_{k,m-n} B_{n,k}(f_{1,0},\dots,f_{n-k+1,0})\right\}. \tag{8}
$$

This preliminary result is already suitable to calculate the first coefficients.

Examples. Let us consider the cases $m = 1$ and $m = 2$. — It follows from Proposition 1: $y_1 = (-1)^1 a_{1,0} B_{1,1}(f_{1,0}) = -a_{1,0} f_{1,0}$. Observing $A_{1,1} = X_1^{-1}$ we thus obtain $a_{1,0} = \overline{g}_1(0) = A_{1,1}(\varphi_1)(0) = \varphi_1(0)^{-1} = f_{0,1}^{-1}$ and hence $y_1 = -f_{1,0} f_{0,1}^{-1}$ which corresponds to the familiar identity $y'(x) = -f_x f_y^{-1}$.

Already for $m = 2$ the computational effort increases noticeably. We have

$$
\begin{aligned}
y_2 = &\binom{2}{1}\sum_{k=1}^{1}(-1)^k a_{k,1} B_{1,k}(f_{1,0},\dots,f_{2-k,0})\\
&+\binom{2}{2}\sum_{k=1}^{2}(-1)^k a_{k,0} B_{2,k}(f_{1,0},\dots,f_{3-k,0})\\
&= -2a_{1,1} B_{1,1}(f_{1,0}) - a_{1,0} B_{2,1}(f_{1,0}, f_{2,0}) + a_{2,0} B_{2,2}(f_{1,0}).
\end{aligned}
$$

Now recall $B_{2,1} = X_2$, $B_{2,2} = X_1^2$, $A_{2,1} = -X_1^{-3}X_2$, and observe that $\overline{g}_1'(x) = -\varphi_1'(x)\varphi_1(x)^{-2}$. This yields

$$\begin{aligned} y_2 &= -2\overline{g}_1'(0)f_{1,0} - f_{0,1}^{-1}f_{2,0} + \overline{g}_2(0)f_{1,0}^2 \\ &= 2\frac{\varphi_1'(0)}{\varphi_1(0)^2}f_{1,0} - f_{0,1}^{-1}f_{2,0} - \frac{\varphi_2(0)}{\varphi_1(0)^3}f_{1,0}^2 \\ &= 2f_{0,1}^{-2}f_{1,0}f_{1,1} - f_{0,1}^{-1}f_{2,0} - f_{0,1}^{-3}f_{0,2}f_{1,0}^2 \end{aligned}$$

which of course also follows immediately from $y''(x) = 2f_y^{-2}f_xf_{xy} - f_y^{-1}f_{xx} - f_y^{-3}f_{yy}f_x^2$ if we take $x = 0$.

Remark. The number of distinct monomials in $D^n(y)$ grows rapidly; it is 9 for y_3, 24 for y_4, and 91159 for y_{15}. Comtet [7, p. 175] established a generating function for this sequence and gave a table with some of its values. See also Comtet/Fiolet [8] and the correction made by Wilde [30].

4. The second reduction step

In the next and final step, we will show how the general Taylor coefficient $a_{k,l}$ of $\overline{g}_k(x)$ which appears in equation (8) can be represented by a polynomial expression depending solely on the $f_{m,n}$. Since the derivative D^l of l-th order is a linear operator for any integer $l \geq 0$, we obtain from equation (4)

$$\begin{aligned} a_{k,l} &= D^l(\overline{g}_k)(0) = D^l(A_{k,1}(\varphi_1, \ldots, \varphi_k))(0) \qquad (9) \\ &= \sum_{\mathbb{P}(2k-2,k-1)} \frac{(-1)^{k-1-r_1}(2k-2-r_1)!}{r_2! \cdots r_k!(2!)^{r_2} \cdots (k!)^{r_k}} D^l(\varphi_1^{s_1}\varphi_2^{r_2} \cdots \varphi_k^{r_k})(0), \end{aligned}$$

where $s_1 := r_1 - 2k + 1$. We evaluate the term $D^l(\ldots)$ by means of the general Leibniz rule as follows:

$$D^l(\varphi_1^{s_1}\varphi_2^{r_2} \cdots \varphi_k^{r_k}) = \sum_{\substack{j_1+j_2+\cdots+j_k=l \\ j_1,j_2,\ldots,j_k \geq 0}} \frac{l!}{j_1!j_2! \cdots j_k!} D^{j_1}(\varphi_1^{s_1})D^{j_2}(\varphi_2^{r_2}) \cdots D^{j_k}(\varphi_k^{r_k}). \qquad (10)$$

Therefore, only the expressions like $D^{j_\nu}(\varphi_\nu^{r_\nu})(0)$ remain to be reduced. Recall that (6) describes the fact that

$$D^n(\varphi_0^k)(0) = k!B_{n,k}(D^1(\varphi_0)(0), \dots, D^{n-k+1}(\varphi_0)(0))$$

is the n-th Taylor coefficient of $\varphi_0(x)^k$. Accordingly

$$\begin{aligned} D^{j_\nu}(\varphi_\nu^{r_\nu})(0) &= r_\nu!B_{j_\nu,r_\nu}(D^1(\varphi_\nu)(0), \dots, D^{j_\nu-r_\nu+1}(\varphi_\nu)(0)) \\ &= r_\nu!B_{j_\nu,r_\nu}(f_{1,\nu}, f_{2,\nu}, \dots, f_{j_\nu-r_\nu+1,\nu}). \end{aligned} \tag{11}$$

Finally, we obtain an explicit formula for the coefficients $a_{k,m-n}$ in Proposition 1 by putting $l = m - n$ in (9) and (10) and combining this with equation (11) as follows:

$$\begin{aligned} a_{k,m-n} = \sum_{\mathbb{P}(2k-2,k-1)} \frac{(-1)^{k-1-r_1}(2k-2-r_1)!}{r_2! \cdots r_k!(2!)^{r_2} \cdots (k!)^{r_k}} \Bigg\{ \sum_{j_1+\cdots+j_k=m-n} \frac{(m-n)!}{j_1! \cdots j_k!} \\ \times (r_1 - 2k + 1)!B_{j_1,r_1-2k+1}(f_{1,1}, f_{2,1}, \dots, f_{j_1-r_1+2k,1}) \\ \times \prod_{\nu=2}^{k} r_\nu!B_{j_\nu,r_\nu}(f_{1,\nu}, f_{2,\nu}, \dots, f_{j_\nu-r_\nu+1,\nu}) \Bigg\}. \end{aligned} \tag{12}$$

In summary, we have reached the following result:

Theorem. *Under the assumptions made in Section 1 for the function $f(x, y)$ and its Taylor coefficients $f_{m,n}$, the implicit function $y = y(x)$ with $f(x, y) = 0$ can be represented as a formal Taylor series whose coefficients are given by the equations* (8) *and* (12) *solely as a function of the $f_{m,n}$.*

On the formal power series of involutory functions[1]

Abstract. – It is shown that the coefficients of any involutory function f represented as a power series can be expressed in terms of multivariable Lah polynomials. This result is based on the fact that any such f ($\neq$ identity) can be regarded as a (compositional) conjugate of negative identity. Moreover, a constructive proof of this statement is given.

1. Preliminaries

In the following, a *function* shall be understood as a formal power series with coefficients from a fixed commutative field $\mathcal{K}$ of characteristic zero. For our purposes, we mostly restrict ourselves to (compositionally) *invertible* functions, i. e., $f \in \mathcal{K}[[x]]$ with $f \circ \overline{f} = \overline{f} \circ f = \iota$, where $\overline{f}$ denotes the (unique) inverse of f and ι denotes the identity: $\iota(x) = x$. According to a simple criterion [29, Proposition 5.4.1], $f = f(x) = \sum_{n \geq 0} f_n \frac{x^n}{n!}$ is invertible if and only if $f_0 = f(0) = 0$ and $f_1 = f'(0) \neq 0$. The invertible functions form a non-commutative group $\mathcal{G}$ with respect to the composition $\circ$. *Involutory functions* (or *involutions*) are the elements f in this group with $f \circ f = \iota$. The two simplest examples of involutory functions are the identity ι (*trivial* involution) and the negative identity $-\iota$.

A sequence of constants $g_1, g_2, g_3, \ldots \in \mathcal{K}$, $g_1 \neq 0$, uniquely determines a function $g = g(x) = g_1 x + g_2 x^2/2! + g_3 x^3/3! + \cdots \in \mathcal{G}$, from which we can in turn recover the $g_1, g_2, g_3, \ldots$ by differentiation as Taylor coefficients: $D^n(g)(0) = g_n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). The operator D here denotes the unique extension of the ordinary algebraic derivation on $\mathcal{K}[x]$ (with $D(\iota) = 1$) to the algebra $\mathcal{K}[[x]]$ of formal power series (cf. [2]). D^n denotes, as usual, the n-th iterate of D.

Of special interest is the task of finding the general Taylor coefficient of a composite function $f \circ g$ ($g \in \mathcal{G}$, f not necessarily invertible). Its well-known solution is given by the famous formula of Faà di Bruno (see [7,

[1] Geschrieben: August 2023; revidierte und veröffentlichte Fassung: *Enumer. Combin. Appl.* 4:2 (2024), Article S2R10.

p. 137], [25, Eqs. (1.3), (1.4)]), which in modern notation is

$$D^n(f\circ g)(0)=\sum_{k=0}^{n} f_k B_{n,k}(g_1,\ldots,g_{n-k+1}). \tag{1}$$

As is common, the symbol $B_{n,k}$ stands for the *partial Bell* (or *exponential*) *polynomials* belonging to $\mathcal{K}[X_1,\ldots,X_{n-k+1}]$ (see, e.g., [7, p. 133], [21, p. 65]). Replacing the function g with its inverse $\overline{g}$ leads to the following nontrivial counterpart of (1):

$$D^n(f\circ \overline{g})(0)=\sum_{k=0}^{n} f_k A_{n,k}(g_1,\ldots,g_{n-k+1}). \tag{2}$$

Here the $A_{n,k}$ denote (Laurent) polynomials $\in \mathcal{K}[X_1^{-1},X_2,\ldots,X_{n-k+1}]$ which are 'orthogonal' companions of the $B_{n,k}$ in the sense that for $1\leq k\leq n$

$$\sum_{j=k}^{n} A_{n,j}B_{j,k}=\delta_{nk} \tag{3}$$

with $\delta_{nn}=1$, $\delta_{nk}=0$ for $n\neq k$ (Kronecker's symbol).

Remark 1. The fundamental properties (explicit representations, recurrences, inverse relations, reciprocity laws) of these double-indexed polynomial families are treated in detail in [25, 26, 27]. The collective term *multivariate Stirling polynomials* (MSP) *of the first and second kind* was proposed for $A_{n,k}$ and $B_{n,k}$ because the associated coefficient sums $A_{n,k}(1,\ldots,1)$ and $B_{n,k}(1,\ldots,1)$ turn out to be just the signed Stirling numbers of the first kind and the Stirling numbers of the second kind, respectively. This happens when $g(x)=\mathrm{e}^x-1$ is chosen.

Specializing $f=\iota^k/k!$, we obtain from (1) and (2) after a short calculation

$$D^n(\tfrac{g^k}{k!})(0)=D^n(\tfrac{\iota^k}{k!}\circ g)(0)=B_{n,k}(g_1,\ldots,g_{n-k+1}),$$
$$D^n(\tfrac{\overline{g}^k}{k!})(0)=D^n(\tfrac{\iota^k}{k!}\circ \overline{g})(0)=A_{n,k}(g_1,\ldots,g_{n-k+1}),$$

which clearly illustrates the meaning of the MSP. — Finally, note the following remarkable identity [25, Theorem 5.3], which holds for $1 \leq k \leq n$:

$$A_{n,k} = B_{n,k}(A_{1,1}, \dots, A_{n-k+1,1}). \tag{4}$$

The reader will find a set of tables for the MSP in [25, p. 2471] and [27, p. 51–54]. The partial Bell polynomials $B_{n,k}$, $1 \leq k \leq n \leq 12$, are tabulated in [7, p. 307–308].

2. The coefficients of involutory functions

With the aid of the Faà di Bruno formula (1) it is possible to characterize the general Taylor coefficient f_n of an involutory function f by a recurrence.

Theorem 1. *Let $f \in \mathcal{G}$ be any function with $f \neq \iota$ and $f_n = D^n(f)(0)$. Then, f is involutory if and only if there is a sequence of constants $a_1, a_2, a_3, \ldots \in \mathcal{K}$ such that for every $n \geq 1$*

$$f_n = \begin{cases} -1, & \text{if } n = 1; \\ a_{n/2}, & \text{if } n \text{ even}; \\ \frac{1}{2} \sum\limits_{k=2}^{n-1} f_k B_{n,k}(-1, f_2, \dots, f_{n-k+1}), & \text{if } n \geq 3 \text{ odd}. \end{cases} \tag{5}$$

Proof. We calculate the coefficients of the two sides of $f \circ f = \iota$ separately. This yields $D^n(\iota)(0) = \delta_{n1}$ and further by applying (1) to $D^n(f \circ f)(0)$ the following statement, which is equivalent to f being involutory:

$$\sum_{k=1}^{n} f_k B_{n,k}(f_1, \dots, f_{n-k+1}) = \delta_{n1} \quad \text{for all } n \geq 1. \tag{6}$$

For $n = 1$ equation (6) becomes $1 = \delta_{11} = f_1 B_{1,1}(f_1) = f_1^2$. Thus, to prove $f_1 = -1$, we must show that $f_1 = 1$ leads to a contradiction. For this purpose, we first consider (6) for $n \geq 2$ and by splitting off the first and the last summand on the left side of the equation we obtain

$$f_1 B_{n,1}(f_1, \dots, f_n) + \sum_{k=2}^{n-1} f_k B_{n,k}(f_1, \dots, f_{n-k+1}) = -f_n B_{n,n}(f_1). \tag{7}$$

We now show by induction that indirectly assuming $f_1 = 1$ implies $f_n = 0$ for all $n \geq 2$, which contradicts $f \neq \iota$. In the case $n = 2$ we have $f_2 = f_1 B_{2,1}(f_1, f_2) = -f_2 B_{2,2}(f_1) = -f_2$, and therefore $f_2 = 0$. Now assume $f_j = 0$ for $3 \leq j \leq n$ (induction hypothesis). From this follows by (7)

$$f_{n+1} = f_1 B_{n+1,1}(f_1, \ldots, f_{n+1}) + 0 = -f_{n+1} B_{n+1,n+1}(f_1) = -f_{n+1},$$

hence $f_{n+1} = 0$. Thus $f_1 = -1$ is proved.

If we now substitute this value into (7), we obtain after a few transformations the following equivalent statement:

$$\sum_{k=2}^{n-1} f_k B_{n,k}(-1, f_2, \ldots, f_{n-k+1}) = (1 + (-1)^{n+1}) f_n \quad \text{for all } n \geq 2. \tag{8}$$

For odd $n \geq 3$ the right-hand side becomes $2f_n$ and the third line of the assertion (5) is immediately clear. In the case of an even $n \geq 2$, the right-hand side vanishes, with the consequence that the same coefficients, namely $f_2, \ldots, f_{n-1}$, occur both in the equation (8) for n and in that for its odd predecessor $n-1$, while f_n itself remains undetermined. The coefficients $f_2, f_4, f_6, \ldots$ can thus be taken as a sequence of arbitrary constants $a_k := f_{2k}$, $k \geq 1$, on which the solution system of the equation (6) depends. This shows the rest of the assertion. ◊

Example 1. We illustrate here the statement of Theorem 1 by listing the first odd indexed coefficients of any nontrivial involution f in the form of polynomial expressions of the arbitrary constants $f_{2k} = a_k$ $(1 \leq k \leq 4)$:

$$\begin{aligned}
f_1 &= -1,\\
f_3 &= -\tfrac{3}{2} a_1^2,\\
f_5 &= 15 a_1^4 - \tfrac{15}{2} a_1 a_2,\\
f_7 &= -\tfrac{4095}{4} a_1^6 + \tfrac{945}{2} a_1^3 a_2 - \tfrac{35}{2} a_2^2 - 14 a_1 a_3,\\
f_9 &= \tfrac{411075}{2} a_1^8 - \tfrac{208845}{2} a_1^5 a_2 + 7875 a_1^2 a_2^2 + 2205 a_1^3 a_3 - 105 a_2 a_3 - \tfrac{45}{2} a_1 a_4.
\end{aligned}$$

It remains open (if not questionable) whether a closed-form representation for the general coefficient f_{2k-1} can be achieved from the calculation procedure (5).

3. Multivariable Lah polynomials

The recursive representation of the coefficients established in the previous section is based upon a direct evaluation of the defining functional equation $f \circ f = \iota$ using the Faà di Bruno formula. As shown in [26, 27], it is nevertheless possible to obtain a closed representation for the f_n by using a decomposition of f in the form $f(x) = g(-\overline{g}(x))$ with some $g \in \mathcal{G}$; in argument-free notation:

$$f = g \circ (-\iota) \circ \overline{g}. \tag{9}$$

Throughout Subsection 5.5 of [26], which among other things deals with the representation of involutory functions, use is made of (9) without proof. Instead, there is a reference to McCarthy [22], which, however, misses the point, since this paper is about continuous bijective involutions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and based on some set-theoretic arguments. On closer inspection it becomes clear that the statements derived in this context cannot be simply carried over to functions in the form of formal power series. Thus, the possibility of a conjugate representation (9) requires a proof of its own, which also closes the gap in [26, Subsection 5.5].

In preparing this, we first show that equation (9) allows us to give the general form of the coefficients of an involution.

Theorem 2. *Let $f, g \in \mathcal{G}$ be arbitrarily given with $f \neq \iota$, $f_n = D^n(f)(0)$ and $g_n = D^n(g)(0)$. Then, $f = g \circ (-\iota) \circ \overline{g}$ holds if and only if $f_n = L_{n,1}(g_1, g_2, \ldots, g_{2[n/2]})$ for all $n \geq 1$.*

Here the polynomials $L_{n,1}$ form a subfamily of the double-indexed *multivariable Lah polynomials* introduced in [26] and defined by

$$L_{n,k} = \sum_{j=k}^{n} (-1)^j A_{n,j} B_{j,k}. \tag{10}$$

Remark 2. Similar to the Stirling polynomials mentioned above, the eponymy is justified by the hardly surprising fact that the associated number sequence $L_{n,k}(1, \ldots, 1)$, more precisely the sum of coefficients of $L_{n,k}$, is just that of the well-known signed Lah numbers $(-1)^n \frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}$; see [26, p. 19].

Example 2. The following list contains the first six members of the subfamily $L_{n,1}$:

$$
\begin{aligned}
L_{1,1} &= -1, \quad L_{2,1} = \frac{2X_2}{X_1^2}, \quad L_{3,1} = -\frac{6X_2^2}{X_1^4}, \\
L_{4,1} &= \frac{30X_2^3}{X_1^6} - \frac{8X_3X_2}{X_1^5} + \frac{2X_4}{X_1^4}, \\
L_{5,1} &= -\frac{210X_2^4}{X_1^8} + \frac{120X_3X_2^2}{X_1^7} - \frac{30X_4X_2}{X_1^6}. \\
L_{6,1} &= \frac{1890X_2^5}{X_1^{10}} - \frac{1680X_3X_2^3}{X_1^9} + \frac{420X_4X_2^2}{X_1^8} + \frac{140X_3^2X_2}{X_1^8} \\
&\qquad - \frac{12X_5X_2}{X_1^7} + \frac{2X_6}{X_1^6} - \frac{40X_3X_4}{X_1^7}
\end{aligned}
$$

We now prove Theorem 2.

Proof. The equation $f = g \circ (-\iota) \circ \overline{g}$ being satisfied is equivalent to the statement that $f_n = D^n(g \circ (-\iota) \circ \overline{g})(0)$ holds for all $n \geq 1$. Hence, only $D^n(g \circ ((-\iota) \circ \overline{g}))(0)$ needs to be evaluated. We first determine the coefficients of $(-\iota) \circ \overline{g}$. By means of (2) we obtain

$$
\begin{aligned}
D^r((-\iota) \circ \overline{g})(0) &= \sum_{k=1}^{r} D^k(-\iota)(0) A_{r,k}(g_1, \dots, g_{r-k+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{r} -\delta_{k1} A_{r,k}(g_1, \dots, g_{r-k+1}) = -A_{r,1}(g_1, \dots, g_r).
\end{aligned} \tag{11}
$$

Next, we apply the Faà di Bruno formula (1) as well as equation (4), which gives

$$
\begin{aligned}
f_n &= D^n(g \circ ((-\iota) \circ \overline{g}))(0) \\
&= \sum_{k=1}^{n} g_k B_{n,k}(-A_{1,1}(g_1), -A_{2,1}(g_1, g_2), \dots) =: (*).
\end{aligned}
$$

Considering that the $B_{n,k}$ are homogeneous polynomials of degree k and further that $g_k = B_{k,1}(g_1, \ldots, g_k)$ holds, the last expression becomes

$$\begin{aligned}(*) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k A_{n,k}(g_1, \ldots, g_{n-k+1}) B_{k,1}(g_1, \ldots, g_k) \\ &= L_{n,1}(g_1, g_2, \ldots, g_{2[n/2]}).\end{aligned}$$

In order to prove that any involution admits a decomposition of the kind (9), we need the following two fundamental properties of Lah polynomials.

Proposition 1.

$$\sum_{j=k}^{n} L_{n,j} L_{j,k} = \delta_{nk} \qquad (1 \le k \le n).$$

Proof. A direct consequence from (10) and (3). See [26, Proposition 5.6]. $\Diamond$

The next statement says that the Lah polynomials $L_{n,k}$ can be represented using the partial Bell polynomials with the indeterminates X_j replaced by the subfamily terms $L_{j,1}$ for each $j \ge 1$.

Proposition 2.

$$L_{n,k} = B_{n,k}(L_{1,1}, \ldots, L_{n-k+1,1}) \qquad (1 \le k \le n).$$

Remark 3. This result is derived in [26] directly from the context of the proof of Theorem 5.3 (see Corollary 5.1), so it is not immediately obvious whether or not it makes use of the decomposition (9), the possibility of which remains to be proved here. In anyway, the proof that follows is independent of (9).

Proof. Assume g to be any function $\in \mathcal{G}$. Putting $\widetilde{g} := g \circ (-\iota)$ and $h := \widetilde{g} \circ \overline{g}$ we get by Theorem 2

$$h_n = D^n(h)(0) = L_{n,1}(g_1, g_2, \ldots). \tag{12}$$

From (10) and (4) follows

$$L_{n,k} = \sum_{j=k}^{n} B_{n,j}(A_{1,1}, A_{2,1}, \ldots) B_{j,k}(-X_1, X_2, -X_3, \ldots)$$

and after replacing X_r with g_r $(r = 1, 2, \ldots)$

$$L_{n,k}(g_1, g_2, \ldots) = \sum_{j=k}^{n} B_{n,j}(\overline{g}_1, \overline{g}_2, \ldots) B_{j,k}(\widetilde{g}_1, \widetilde{g}_2, \ldots), \tag{13}$$

where $\overline{g}_r = D^r(\overline{g})(0)$ and $\widetilde{g}_r = D^r(\widetilde{g})(0)$ for $r = 1, 2, \ldots$. If we now take a closer look at the right-hand side of (13), we see that it is equal to $B_{n,k}(h_1, h_2, \ldots)$, according to a formula established by Jabotinsky [13, 15] (cf. also [7, Section 3.7] and the *Second Composition Rule* in [26, Theorem 4.2 (i)]). This yields

$$L_{n,k}(g_1, g_2, \ldots) = B_{n,k}(L_{1,1}(g_1), L_{2,1}(g_1, g_2), \ldots)$$

and the asserted identity if we recall that polynomials over an infinite integral domain (here the field $\mathcal{K}$) that give rise to the same polynomial function are identical. $\Diamond$

Combining Proposition 1 and 2 yields the following lemma, which we need to prove our main results in the next section.

Lemma 1. *For all* $n \geq 2$ *we have*

$$\sum_{k=2}^{n-1} L_{k,1} B_{n,k}(L_{1,1}, \ldots, L_{n-k+1,1}) = (1 + (-1)^{n+1}) L_{n,1}.$$

Proof. From Proposition 1 and 2 we conclude

$$\sum_{k=1}^{n} L_{k,1} B_{n,k}(L_{1,1}, \ldots, L_{n-k+1,1}) = \delta_{n1}.$$

Taking into account $L_{1,1} B_{n,1}(L_{1,1}, \ldots, L_{n,1}) = -L_{n,1}$, this results in

$$\sum_{k=2}^{n} L_{k,1} B_{n,k}(L_{1,1}, \ldots, L_{n-k+1,1}) = L_{n,1} + \delta_{n1}$$

and further

$$\sum_{k=2}^{n-1} L_{k,1} B_{n,k}(L_{1,1}, \ldots, L_{n-k+1,1}) = L_{n,1} + \delta_{n1} - L_{n,1} B_{n,n}(L_{1,1}).$$

Here, the right-hand side is equal to $L_{n,1} - L_{n,1} \cdot (-1)^n$ for $n \geq 2$, which proves the assertion. $\Diamond$

4. The main results

We are now in a position to prove that any nontrivial involution can be represented in terms of the equation (9).

Theorem 3. *Let f be any function from $\mathcal{G}$ with $f \neq \iota$. Then, f is involutory if and only if there exists $g \in \mathcal{G}$ such that $f = g \circ (-\iota) \circ \overline{g}$.*

Proof. The sufficiency ('if') is immediate, since $g \circ (-\iota) \circ \overline{g}$ is clearly involutory. For necessity ('only if') assume f to be any involutory function $\neq \iota$. Then, by Theorem 1 there are constants $a_1, a_2, \ldots \in \mathcal{K}$ such that the coefficients $f_n = D^n(f)(0)$ satisfy the recurrence (5). We now construct the function

$$g(x) = \sum_{n \geq 1} g_n \frac{x^n}{n!}$$

we are looking for in the following way: The odd indexed coefficients $g_1, g_3, g_5, \ldots$ are chosen as arbitrary constants $\in \mathcal{K}$, where $g_1 \neq 0$; for even $n \geq 2$, we define g_n recursively by setting

$$g_n = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n} f_k B_{n,k}(g_1, \ldots, g_{n-k+1}). \tag{14}$$

We must prove that g satisfies (9). According to Theorem 2, it suffices to show that $L_{n,1}(g_1, g_2, \ldots) = f_n$ holds for all $n \geq 1$. The following induction is split into two parts, depending on the parity of n.

The cases $n = 1$ and $n = 2$ are settled readily by observing Theorem 1 and Example 2 as follows:

$$\begin{aligned} L_{1,1}(g_1, g_2, \ldots) &= -1 = f_1, \\ L_{2,1}(g_1, g_2, \ldots) &= \frac{2g_2}{g_1^2} \underset{(14)}{=} \frac{1}{g_1^2} \cdot f_2 B_{2,2}(g_1) = f_2, \end{aligned}$$

where $f_2 = a_1$ (arbitrary constant).

Induction hypothesis: Assume $L_{r,1}(g_1, g_2, \ldots) = f_r$ for $3 \leq r \leq n-1$.

First, we consider the case of an odd $n \geq 3$. From Lemma 1 we get

$$L_{n,1} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n-1} L_{k,1}B_{n,k}(L_{1,1}, L_{2,1}, \ldots)$$

and by replacing each X_j with g_j

$$\begin{aligned} L_{n,1}(g_1, g_2, \ldots) &= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n-1} L_{k,1}(g_1, g_2, \ldots)B_{n,k}(L_{1,1}(g_1, g_2, \ldots), L_{2,1}(g_1, g_2, \ldots), \ldots) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n-1} f_k B_{n,k}(f_1, f_2, \ldots, f_{n-k+1}) \quad \text{(induction hypothesis)} \\ &= f_n. \quad \text{(Theorem 1, (5))} \end{aligned}$$

Let us now assume that $n \geq 4$ is even. Recalling $B_{j,1} = X_j$ equation (10) can be written as

$$L_{n,1} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^j X_j A_{n,j}.$$

We apply to this the *inversion of sequences* based on (3) and explained in [25, Corollary 5.2] (cf. also [26, Proposition 5.4]) thus obtaining

$$\sum_{k=1}^{n} L_{k,1}B_{n,k} = (-1)^n X_n$$

and after substituting g_j for X_j:

$$\sum_{k=1}^{n} L_{k,1}(g_1, g_2, \ldots)B_{n,k}(g_1, g_2, \ldots) = (-1)^n g_n.$$

From this follows by the induction hypothesis

$$\sum_{k=1}^{n-1} f_k B_{n,k}(g_1, g_2, \ldots) = (-1)^n g_n - g_1^n L_{n,1}(g_1, g_2, \ldots).$$

Now consider the first summand on the left-hand side, which is

$$f_1 B_{n,1}(g_1, g_2, \ldots) = -g_n.$$

We split it off and then solve the equation for $L_{n,1}(g_1, g_2, \ldots)$:

$$L_{n,1}(g_1, g_2, \ldots) = -\frac{1}{g_1^n} \sum_{k=2}^{n-1} f_k B_{n,k}(g_1, g_2, \ldots) + \frac{g_n}{g_1^n}(1 + (-1)^n).$$

By (14) we have

$$2g_n = \sum_{k=2}^{n-1} f_k B_{n,k}(g_1, g_2, \ldots) + f_n B_{n,n}(g_1)$$

and thus from the above

$$L_{n,1}(g_1, g_2, \ldots) = -\frac{1}{g_1^n}(2g_n - f_n g_1^n) + \frac{2g_n}{g_1^n} = f_n,$$

which also proves the assertion for the case of even n. $\Diamond$

From the Theorems 2 and 3 follows immediately our second main result, which describes the form of the coefficients of involutory functions.

Theorem 4. *Let f be any function from $\mathcal{G}$, $f \neq \iota$. Then, f is involutory if and only if there exist constants $g_1 (\neq 0), g_2, g_3, \ldots \in \mathcal{K}$ such that the general Taylor coefficient f_n of f meets $f_n = L_{n,1}(g_1, g_2, \ldots, g_{2[n/2]})$.*

5. Discussion

Let us look more closely at the statement of Theorem 3. If there exists $g \in \mathcal{G}$ satisfying $f = g \circ (-\iota) \circ \overline{g}$, this says that f and the negative identity $-\iota$ are conjugate elements in the group $(\mathcal{G}, \circ)$. Conversely, the nontrivial part of the statement says that every involution $f \neq \iota$ of $\mathcal{G}$ is indeed a conjugate of $-\iota$. In summary, *all elements of $\mathcal{G}$ of order 2 form just one conjugacy class.*

One can by no means expect the function g to be uniquely determined by an equation $f = g \circ (-\iota) \circ \overline{g}$. As a quite simple example, consider $g(x) = \mathrm{e}^x - 1$ and the corresponding sequence $g_1 = g_2 = \ldots = 1$, for which $f_n = L_{n,1}(1, \ldots, 1) = (-1)^n n!$ (cf. Remark 2) and the resulting involutory function becomes

$$f(x) = -x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots = -\frac{x}{1+x}. \tag{15}$$

There are also other sequences leading to the same involution, for instance the coefficients $g_j = c^j$, $(j = 1, 2, 3, \ldots)$ with $c \in \mathcal{K}$, $c \neq 0$, belonging to the function $g(x) = \mathrm{e}^{cx} - 1$ and also satisfying $L_{n,1}(c, c^2, c^3, \ldots) = (-1)^n n!$. So, the obvious question is how to describe the set of all functions $g \in \mathcal{G}$ satisfying $f = g \circ (-\iota) \circ \overline{g}$ for a given involution f. The answer is easily obtained by assuming any two functions $g, h \in \mathcal{G}$ for which

$$g \circ (-\iota) \circ \overline{g} = h \circ (-\iota) \circ \overline{h}. \tag{16}$$

If we set $\psi := \overline{g} \circ h$, (16) can be equivalently transformed into $\psi \circ (-\iota) = (-\iota) \circ \psi$, which shows ψ is an odd function. Conversely, the general solution h of the equation $f = h \circ (-\iota) \circ \overline{h}$ is obtained in the form $h = g \circ \psi$, where g is any particular solution and ψ is some odd function from $\mathcal{G}$. Note that the subgroup of odd functions is the centralizer of $-\iota$ in $\mathcal{G}$.

Applying this to the involutory function f in (15), it results that the equation $f(x) = g(-\overline{g}(x))$ holds if and only if g has the form $g(x) = \mathrm{e}^{\psi(x)} - 1$ with ψ being an odd function. Suitable examples are $\psi(x) = cx$, which gives the above sequence $c, c^2, c^3, \ldots$, or $\psi(x) = \sin x$. Of course, the seemingly unwieldy sequence $1, 1, 0, -3, -8, -3, 56, 217, 64, -2951, \ldots$ produced by $\mathrm{e}^{\sin x} - 1$ nevertheless leads to the same coefficients $L_{n,1}(1, 1, 0, -3, -8, -3, \ldots) = (-1)^n n!$, as the reader may verify from the list in Example 2 for some values.

Bibliographie zu Teil III

[1] Apostol, T. M.: Calculating higher derivatives of inverses. *Amer. Math. Monthly* **107** (2000), 738–741.

[2] Bender, P.: Eine Bemerkung zu Derivationen von Potenzreihen. *Mathematisch-physikalische Semesterberichte* **27**/1 (1980), 143–145.

[3] Bödewaldt, U. T.: Die Kettenregel für höhere Ableitungen. *Math. Z.* **48** (1942), 735–746.

[4] Boyadzhiev, K. N.: Power sum identities with generalized Stirling numbers. *Fibonacci Quarterly* **46/47** (2009), 326–330.

[5] Comtet, L.: Polynômes de Bell et formule explicite des dérivées successives d'une fonction implicite. *C. R. Acad. Sci. Paris* Série A, t. **267** (1968), 457–460.

[6] ——: Une formule explicite pour les puissances successives de l'opérateur de dérivations de Lie. *C. R. Acad. Sci.* **276** (1973), 165–168.

[7] ——: *Advanced Combinatorics*, rev. and enlarged edition. Reidel, Dordrecht (Holland) 1974.

[8] Comtet, L., Fiolet, M.: Sur les dérivées successives d'une fonction implicite, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Série A, t. **278** (1974), 249–251.

[9] Craik, A. D. D.: Prehistory of Faà di Bruno's Formula. *Amer. Math. Monthly* **112** (2005), 119–130.

[10] Frame, J. S.: Power series expansion for inverse functions. *Amer. Math. Monthly* **64**/4 (Apr. 1957), 236–240.

[11] Gessel, I.: Lagrange inversion. *J. Comb. Theory (A)* **144** (2016), 212–249.

[12] Hsu, L. C.: A summation rule using Stirling numbers of the second kind. *Fibonacci Quarterly* **31** (1993), 256–262.

[13] Jabotinsky, E.: Sur la répresentation de la composition des fonctions par un produit de matrices. Application à l'itération de e^x et de $e^x - 1$. *C. R. Acad. Sci.* **224** (1947), 323–324.

[14] ——: Sur les fonctions inverses. *C. R. Acad. Sci.* **229** (1949), 508–509.

[15] ——: Representation of functions by matrices. Application to Faber polynomials. *Proc. Amer. Math. Soc.* **4** (1953), 546–553.

[16] Johnson, W. P.: The curious history of Faà di Bruno's formula. *Amer. Math. Monthly* **109** (2002), 217–234.

[17] Knopf, P. M.: The operator $(x\frac{d}{dx})^n$ and its application to series. *Math. Mag.* **76** (2003), 364–371.

[18] Knuth, D. E.: Two notes on notation. *Amer. Math. Monthly* **99** (1992), 403–422.

[19] ——: *The Art of Computer Programming. Vol. 1: Fundamental Algorithms*, 3rd edition. Addision-Wesley, Reading, MA, 1997.

[20] Lah, I.: Eine neue Art von Zahlen, ihre Eigenschaften und Anwendung in der mathematischen Statistik. *Mitt.-Bl. Math. Statistik.* **7** (1955), 203–212.

[21] Mansour, T. and Schork, M.: *Commutation Relations, Normal Ordering, and Stirling Numbers.* CRC Press, Boca Raton 2016.

[22] McCarthy, P. J.: Functional n-th roots of unity. *The Math. Gazette* **64** (1980), 107–115.

[23] Riordan, J.: *Combinatorial Identities.* New York 1968.

[24] ____: *Introduction to Combinatorial Analysis.* Reprint, Dover Publ., Inc., Mineola, New York 2002.

[25] Schreiber, A. (2015). Multivariate Stirling polynomials of the first and second kind. *Discrete Math.* **338**, 2462–2484.

[26] ____: Inverse relations and reciprocity laws involving partial Bell polynomials and related extensions. *Enumer. Combin. Appl.* **1**:1 (2021), Article S2R3.

[27] ____: *Stirling Polynomials in Several Indeterminates.* Logos Verlag, Berlin 2021.

[28] Stanley, R. P.: *Enumerative Combinatorics, Vol. 1*, Wadsworth & Brooks/Cole, Monterey 1986.

[29] ____: *Enumerative Combinatorics, Vol. 2*, Cambridge University Press 2001.

[30] Wilde, T.: Implicit higher derivatives, and a formula of Comtet and Fiolet. Preprint: https://arXiv.org/pdf/0805.2674, version 1, 17 May 2008.

[31] Zemel, S.: The Combinatorics of Higher Derivatives of Implicit Functions. *Monatsh. Math.* **188** no. 4 (2019), 765–784.

Teil IV.
Erkenntnistheoretische Studien

Ein von Peirce vorgetragenes Argument[1]

In der Studie, die Charles S. Peirce als sechste Abhandlung der ›Suche nach einer Methode‹ vorgesehen hat, befasst er sich mit den Grundlagen der Gültigkeit der logischen Gesetze. Von einigem Interesse scheint mir dabei der Abschnitt 5.319 zu sein, worin Peirce sich mit dem Einwand der Zirkelhaftigkeit eines absoluten Begründungsversuchs auseinandersetzt. Der Einwand besagt, dass eine Deduktion logischer Prinzipien als eine vernünftige Argumentation sich ihrerseits logischer Gesetze bedient und sie somit auch voraussetzt. Eine solche Deduktion ist selber also nur denkbar, wenn sie das zu Deduzierende in zirkulärer Weise schon vorausgesetzt. Die Art, in der Peirce auf diesen schwerwiegenden Einwurf eingeht, lässt auf den ersten Blick vermuten, die scholastische Dichotomie einer *logica utens* und einer *logica docens* habe ihm hier Modell gestanden für eine Argumentation, die auf das pragmatische Apriori einer vorgängig bereits benutzten Logik zurückgreift. In der Tat wird dies durch die folgende Bemerkung bestärkt: »Jemand kann durchaus schlußfolgern, ohne die Prinzipien des Schlußfolgerns zu verstehen, genau wie er durchaus Billard spielen kann, ohne etwas von analytischer Mechanik zu verstehen.« Wie wenig zugkräftig dieses Argument ist, leuchtet sofort ein, wenn man sich vor Augen hält, dass die Möglichkeit, gewisse Schlüsse zu ziehen (auch ohne sich dieser Schlüsse als logischer Regeln bewusst zu sein), sehr wohl in der allgemeinen Gültigkeit des benutzten Schlusschemas ihren Grund haben kann. Allerdings will Peirce auf eine andere Überlegung hinaus: Die bei einer Deduktion der logischen Gesetze benutzten Schlüsse haben ja zunächst keinen schematischen und allgemeinen Charakter; vielmehr handelt es sich dabei stets um ganz bestimmte Argumente, deren logische Form und wechselseitige Verknüpfung einer logischen Analyse überhaupt nicht unterzogen wird; anders ausgedrückt: Die Deduktion ist eine Abfolge ganz bestimmter spezieller Argumente, in denen keine Variablen für Argumente derselben Argumentationsstufe vorkommen. Um die Richtigkeit der Deduktion einzusehen, so gibt Peirce zu bedenken, muss man aber nur diese spezielle Argumentation einsehen. Wenn dies am Ende gelingt, so hat man sie eben eingesehen, aber doch nur diese speziellen Schlußfolgerungen. Deren

[1] Unveröffentlicht, 1972.

allgemeines Schema (welches entsteht, indem die bestimmten Teilaussagen durch Variablen ersetzt werden) bleibt mit Fug und Recht bezweifelbar. Peirce hält es demnach für möglich, dass ein allgemeines logisches Gesetz uneingesehen bleibt, während ein Spezialfall einleuchtet. Im Vergleich mit der Mechanik liefe dies daraus hinaus, das Gesetz der Reflexion dahingestellt sein zu lassen, sich seiner aber unablässig zu bedienen, um erfolgreich Billard zu spielen. Das Problematische der Überlegung scheint mir zu sein, dass Peirce sich hartnäckig weigert, von seiner Deduktion ehrlich Rechenschaft abzulegen, nämlich anzugeben, weshalb *er* die Abfolge seiner Argumente für zwingend hält. Vom Leser erwartet er, dass dieser eine Konklusion akzeptiert, wenn er von ihr überzeugt ist. Er fragt aber nicht, aus welchem Grund ein Leser von einer Konklusion überzeugt sein könnte. Es gibt ja in dieser Hinsicht viele Möglichkeiten. So könnte es an der Dummheit des Lesers der Deduktion liegen, die Schlussfolgerungen von Peirce unbefragt hinzunehmen, oder aber der Leser sieht die Argumentation deshalb ein, weil alle Prämissen richtig sind und auch alle Konklusionen – mithin deshalb, weil er die Korrektheit der benutzten Schlüsse als allgemein logisch begründet eingesehen hat. Mit dem letzten Fall muss Peirce rechnen. Er selber ist schuld an dieser für ihn ungünstigen Auslegung, konzediert er doch für die Überprüfung seiner Deduktion eine zufällige und vage gelassene Instanz, nämlich den Leser in seiner individuellen historischen Bedingtheit und Beschränktheit. Das Gegenbeispiel des intelligenten, logikkundigen Lesers muss nun Peirce in Verlegenheit bringen, denn dieser entdeckt doch wieder den alten Zirkel in der Begründung der Logik, da er etwas bewiesen bekommt, was er, um den Beweis zu verstehen und zu akzeptieren, längst eingesehen haben muss. Peirces Fehler liegt im Ausweichen vor der Frage, weshalb man seine Argumentation richtig finden kann (gerade weil er nicht sagt, weshalb man sie richtig finden *muss*). Kurzum, Peirce müsste nachweisen, dass es *nicht die allgemeinen logischen Gesetze* sind, aus deren Wahrheit spezielle Fälle dieser Schemata ihre Geltung beziehen. Natürlich will und kann er das nicht. Ersatzweise konstruiert er die hypothetische Instanz eines Lesers, der sich wie auch immer eine Überzeugung verschafft. Wofern dieser sich nun der allgemeinen Gesetze nicht bewusst ist, wird er der Deduktion Peirces mit Interesse und Wohlgefallen folgen können und am Ende sogar finden, dass hier wirklich etwas bewiesen worden ist. Das kann (und muss in bestimmten Fällen, etwa im Fall eines intelligenten Lesers) schiefgehen. Peirce scheint hier nicht genügend beachtet zu haben, dass bei der kritischen Prüfung einer Schlussfolgerung letztlich doch allgemeine logische Gesetze als Kriterien zum Zuge kommen können oder sogar müssen.

Fichtes transzendentale Paradoxie des Wissens[1]

Ein Wissen über den Grund des Wissens ist keineswegs Ziel oder Gegenstand der Logik, wenngleich sie über das Wissen nachdenkt. Die Logik kann eben immer nur ihre logischen Gesetze ins Spiel bringen. Das hat Frege klar erkannt: »Die Frage nun, warum und mit welchem Rechte wir ein logisches Gesetz als wahr anerkennen, kann die Logik nur dadurch beantworten, daß sie es auf andere logische Gesetze zurückführt. Wo dies nicht möglich ist, muß sie die Antwort schuldig bleiben.« [*Grundgesetze der Arithmetik*, Jena 1893, Bd. I, S. xvii]. Was die Philosophie anstrebt, ist dagegen eine *absolute* Erzeugungsbegründung (nicht eine relative, die immer nur eine technische im Sinne des Kalküls ist), wie der von H. Lenk benutzte Terminus lautet. Fichte formuliert das Problem in § 1 seiner *Wissenschaftslehre* von 1794 wie folgt: »Wir haben den absolut ersten, schlechthin unbedingten Grundsatz alles menschlichen Wissens aufzusuchen. Beweisen oder bestimmen läßt er sich nicht, wenn er absolut-erster Grundsatz sein soll.« Für die formale Logik ist darüberhinaus noch der Grund für die Gültigkeit der logischen Gesetze aufzusuchen (nicht zu beweisen!). Dieser Aufweis ist ein Sichtbarmachen, die eigentliche Aufgabe einer *philosophischen* Logikbegründung. Ausgangspunkt ist eine dem Wissen wesentlich eigene Paradoxie, die Fichte in seinen *Einleitungsvorlesungen zur Wissenschaftslehre* schlicht einen Widerspruch im Wissen nennt. Diese transzendentale Paradoxie des Wissens hat man sich folgendermaßen zu denken: Im Wissen, das auch als ein ›Sehen‹ zu apostrophieren ist, wenn wir seinen intentio-

[1] Unveröffentlicht, 1969.

nalen Grundzug herausheben wollen, wird stets *etwas* gewusst (gesehen), wobei es nicht darauf ankommt, *was* dieses Etwas sei, sondern einzig darauf, *dass* überhaupt es ein im Wissen vorgestelltes Etwas ist. Es spricht sich im Urteil ›Es ist‹ aus, denn Wissen äußert sich im Urteilen, im Ist-Sagen. Zwei Momente lassen sich nach Fichte darin herausheben:

a) Das im Ist-Sagen Gesagte bzw. das im Wissen gewusste Etwas »ist schlechthin nur für und in ihm selber«. Es wird gesehen bzw. gewusst als ein in sich geschlossenenes Sein. Man könnte dieses Moment die Selbständigkeit des Gesehenen nennen; es steht ja in sich und für sich selbst, weist mithin gegenüber dem Sehenden ein Moment von ›Transzendenz‹ auf.

b) Der Selbständigkeit widerstreitet allerdings ein weiteres Moment: die Unselbständigkeit oder auch ›Immanenz‹; denn das gesehene Etwas ist auch immer und prinzipiell ein Gesehenes. Ein Etwas außerhalb des Sehens ist unsichtbar. Das gesehene Etwas im Sehen ist also zugleich (in jeweils verschiedener Hinsicht) selbständig und unselbständig.

Es fragt sich nun, ob und, wenn ja, wie sich diese transzendentale Paradoxie des Wissens aufklären lässt. Mit wenigen Worten sei hier angedeutet, welchen Gang diese Aufklärung im Sinne der Fichteschen Philosophie nimmt. Zunächst ist das Verhältnis der beiden widerstreitenden Momente genauer zu bestimmen. Würde das Etwas nicht gesehen, so würde es auch nicht als etwas Selbständiges gesehen. Grund seiner Selbständigkeit ist daher seine Unselbständigkeit. Es muss gewusst werden, um als nicht durch das Wissen allein seiend gewusst zu werden. Seine Unselbständigkeit wiederum, sein bloßes Gesehenwerden beruht darauf, dass es als etwas Selbständiges in den Blick des Wissens kommt: Es muß ja *sein*, um gewusst zu werden. Die Unselbständigkeit des Etwas hat also ihren Grund in seiner Selbständigkeit. Mit anderen Worten: Das Wissen begrenzt das Gewusste, und das Gewusste begrenzt das Wissen. Das eine ist *durch* das andere, sie sind durch einander. Deshalb bestimmt Fichte das einige Verhältnis beider Momente als ein *lebendiges Durch*: »Durch den Begriff des ›Ist‹ sind wir in ein Durch, und ziemlich zusammengesetztes Durch entgegengesetzter Glieder hineingeraten … Dieses Durch ist die allbekannte Denkform« (S. 46, 47). Sein entsteht geradezu *durch* die Negation des Gesehenen als nur Gesehenes durch das Sehen selbst. Daraus ergibt sich, dass das Sehen sich selbst und seinen negierenden Charakter gesehen haben muss. Denn sonst wäre es nicht möglich, dass es das von ihm Gesehene ausdrücklich, wenn auch im Sehen selbst nicht aktual, uminterpretiert (nämlich: negiert) zu einem *an sich Seienden.* Somit ist die Selbstsichtbarkeit des Sehens konstitutiv für im Sehen erscheinendes Etwas, das den Charakter der Selbständigkeit mit sich führt.

Transzendentale Logik und Kybernetik[1]

Den einheitlichen Gesichtspunkt seiner transzendentallogischen Untersuchungen findet Fichte im ständigen Bezug auf die Kritik der Verschiedenheit zweier Ansichten des Denkens, die er gemeine und transzendentale Logik nennt. Kritik heißt die Betrachtungsweise, weil ihr Standort außerhalb entschiedener Philosophie liegt. Fichte charakterisiert sie als problematisch, demnach als noch nicht gegeben, sondern nur möglich bezüglich der eigentlichen Philosophie. Erst im noch zu entwickelnden Zusammenhang von transzendentallogischen Denknotwendigkeiten kann der vorphilosophische Charakter der Kritik aufgehoben werden zu einem apodiktischen. Außerdem hebt Fichte damit auch den Unterschied hervor zwischen der Wissenschaftslehre, in welcher der Selbstvollzug der Evidenz zugemutet wird, und andererseits Kantischer Vernunftkritik, die mit der Indifferenz eines Vergleichs beginnt. Eigentlicher Gegenstand der transzendentalen Logik ist in diesem Sinne, was die Logik von der Philosophie unterscheidet. In den historischen Bemerkungen am Ende seines ersten Vortrags hebt Fichte hervor, dass und wie Kant die gemeine Logik als ein Sehen auf die Verbindung von Mannigfaltigem charakterisiert hat, ohne dieses Mannigfaltige, die Bilder der Dinge, selbst ins Blickfeld miteinzubeziehen und vor allem: ohne seine Abkunft zu erklären; kurzum: als Logik der bloßen, vom Inhalt abgezogenen Form.

Umgekehrt halten die meisten an formaler Logik ausgerichteten Philosophen der Gegenwart es für unmöglich und unzulässig, die Erkenntnis von einem ›archimedischen Punkt‹ aus, wie es ein Wissen vom Ursprung der

[1] Unveröffentlicht, 1969.

Vorstellung von etwas wäre, methodisch zu begründen. Hans Albert weist in seinem *Traktat über kritische Vernunft* darauf hin, dass dem durchgängig zu fordernden Prinzip vom zureichenden Grunde zufolge die deduktive Abfolge der Begründungen nie zum Stillstand käme. Jeder Grund bedarf ja eines weiteren Grundes. Sollte diese rückwärts schreitende Abfolge von immer neuen Gründen sich nicht ständig fortschreiben, so ist dies nach Alberts Ansicht nur dann möglich, wenn man fehlerhaft im Kreise geschlossen hat, d. h. ein Grund in der Kette der Gründe zweimal auftritt, aber auch (und vor allem) dann, wenn das Verfahren willkürlich abgebrochen wurde. Die daraus resultierende »Situation mit drei Alternativen«, dem infiniten Regreß, dem logischen Zirkel und dem Abbruch des Verfahrens, bezeichnet Albert als »Münchhausen-Trilemma«.

Die ersten beiden Alternativen sind für ihn »offensichtlich unakzeptabel«, die dritte, das Aufhören bei einem (scheinbar) einleuchtenden Grundsatz, hält er für Begründung durch Rekurs auf ein ebenfalls grundsätzlich unakzeptables Dogma. Sich für einen mehr oder minder einsichtigen Grund entscheiden und an dieser Stelle die Begründungskette abzuschließen, sei nur möglich in einem »Offenbarungsmodell« der Wahrheitsfindung (allerdings in verschiedenen Versionen, die sich im wesentlichen durch die Quelle der Erkenntnis und die Art des Zugangs zu ihr unterscheiden). Dieses Offenbarungsmodell ist nach Alberts Ansicht die übliche Alternative, welche die traditionelle Metaphysik im Münchhausen-Trilemma gewählt hat. Sie zieht sich aus der Affäre durch den Hinweis, die Wahrheit habe sich endlich gezeigt und sie einzusehen sei bloß noch der Intuitionsgabe Berufener anheimgestellt. Statt auf derartige Evidenzansprüche zurückzugreifen, fordert er ganz im Sinne von Poppers Falsifikationstheorie, sämtliche Erkenntnisaussagen sollten grundsätzlich empirisch kontrollierbar sein, d. h. ihre faktische Falschheit, wenn sie denn besteht, müsse der Möglichkeit nach auch festzustellen sein. Aus diesem Rahmen fallen zum Beispiel alle transzendentalen Aussagen über das Selbstbewusstsein; sie gehören dann ins Feld aller nicht-falsifizierbaren Aussagen, das als Metaphysik, Dichtung und dergleichen angesehen wird. Was allerdings davon in Poppers »offener Gesellschaft« als gleichsam positiver Rest bleibt, ist der mögliche »Nutzen metaphysischer Spekulation, … daß in ihr oft, wenn auch nur skizzenhaft, umfassende Theorien zur Deutung der Wirklichkeit entstehen, die unter

Umständen für die wissenschaftliche Theorienbildung interessant werden können«.

Auf der anderen Seite bemühen sich einige Logiker um eine Zusammenführung transzendentallogischer und formaler Gesichtspunkte, zumindest was die Darstellung der transzendentalen Logik mittels logischer Kalküle angeht. In Untersuchungen P. K. Schneiders etwa hat die Wissenschaftstheorie als allgemeine Theorie der Grundlagen sich »als vermeintlich und rückführbar erwiesen«. Im zweiten Teil seines Buchs *Die wissenschaftsbegründende Funktion der Transzendentalphilosophie* stellt er sich die Aufgabe, die stillschweigenden Voraussetzungen der Logik, Logistik und Wissenschaftstheorie aufzuzeigen, zu klären und eine Wissenschafts*lehre* an jene Stelle treten zu lassen, »wo Wissenschaftstheorie bislang ihre absolut fundierende Funktion verhehlt hat« (S. 73).

Ganz im Sinne Fichtes soll das Selbstbewusstsein am Anfang begründenden Philosophierens stehen, denn in der Wissenschaftslehre ist der Unterschied von Wissen und Gewusstem aufgehoben; Inhalt als das, wovon man weiß, und Form als das, was man davon weiß, fallen zusammen im sich selbst wissenden Wissen. Die Logik als Wissenschaft von der reinen Form, in der Wissen sich weiß, hat aber ausdrücklich nicht den Sinn ihrer Form zum Gegenstand. Vielmehr begründet nach Schneider erst die Wissenschaftslehre als transzendentale Logik diese Form, »indem sie die Form gerade nicht von ihrem Gehalt und damit nicht von ihrem Sinn trennt« (S. 74). Am nämlichen Ort führt Schneider aus:

> Der Übergang von der Logik zur transzendentalen Logik ist der Übergang von der Form zum Sinn; während in den Einzelwissenschaften stets ein fester Sinn undiskutiert vorausgesetzt oder unterschoben wird, reflektiert die Wissenschaft der Wissenschaft auf den Sinn des Sinnes.

Trotz dieser Ausgangsposition gelingt es Schneider dennoch nicht, einleuchtend aufzuzeigen, wie die transzendentale Logik Fichtes die Struktur des Bewusstseins aufklärt (siehe dazu Kapitel 6, S. 105 ff, das im wesentlichen aus einer uninterpretierten Folge von Fichte-Zitaten besteht). Im dritten Teil der Untersuchung meint er zudem, nicht am »aktuellen Problemkreis des technisch reproduzierbaren Bewußtseins und seiner philosophischen Relevanz« vorbeigehen zu dürfen (S. 147). Auf Seite 159 findet man dann eine Widerlegung der von einigen ›Kybernetikern‹ (u. a. Steinbuch, Anschütz) aufgestellten These, wonach menschliches Bewusstsein grundsätzlich in Automatensystemen simulierbar sei. Die Widerlegung bewegt sich auf zwei unterschiedlichen Ebenen, einer sprachtheoretischen und einer transzendentallogischen. Vom höheren Standort der Transzendentalphilosophie aus meint Schneider einräumen zu sollen, »daß alles, was an Bewußtseinselementen und -strukturen wissenschaftlich objektivierbar ist, auch programmierbar … ist« (S. 160). Er behauptet aber, die Reflexion auf die jene Objektivationen formulierende Subjektivität könne dabei *nicht* in die Objektivationen eingehen. Grund dafür soll sein, dass ständig wiederholte Objektivationen das eigentlich Subjektive in der Subjektivität zerstören. Schneider fährt fort: »… allein die diese letztere Objektivation des Subjekt-Objekt-Verhältnisses konstituierende Metasubjektivität ist nicht berührt, geschweige gefaßt.« Das ist kaum stichhaltig, bleibt doch jede Subjektivität, auch wenn man sie verbal zur »Metasubjektivität« erklärt, nach Schneiders eigener Voraussetzung objektivierbar und damit auch, wie der Autor selbst einräumt, zumindest prinzipiell oder potentiell technisch realisierbar.

Anders steht es mit der ersten Argumentationsebene. In ihr wird nicht an die Evidenz transzendentalphilosophischer Überlegungen appelliert; vielmehr sollen mathematische Ergebnisse den Beweis der Unmöglichkeit liefern, eine hinreichend umfassende formale Sprache zu konstruieren, in der sich explizit eine Theorie der Reflexion auch nur entwerfen ließe. Angeblich ist eine solche Theorie der unbegrenzt iterierbaren Reflexion notwendig für den Bau eines Automaten, in dem Selbstbewusstsein simuliert wird. Auf Seite 159 legt Schneider dar: »Das Konstruktionskriterium der Umgangssprache kann jedoch schon nicht mehr in Form einer Metasprache angegeben werden, da ja bereits die zu konstruierende Umgangssprache sämtliche mögliche Sprachelemente enthält und somit keine weiteren Sprachzeichen zur Präzisierung des vollen Umfanges der Umgangssprache zur Verfügung stehen.« Dieses (an das berühmte Lexikonproblem erinnernde) Argument ist allerdings viel zu schwach, als dass sich aus ihm die Unmöglichkeit einer Theorie der Reflexion folgern ließe. Wie Schneider glaubt auch Gerhard Frey an diese Unmöglichkeit (»Es kann keine explizit formulierte Theorie der Reflexion geben«, *Sprache, Ausdruck des Bewußtseins*,

S. 44), begründet sie allerdings mit dem in seinen Augen schlagkräftigeren Argument, alles Nötige ergebe sich bereits aus dem Gödelschen Unvollständigkeitstheorem (ohne an dieser Stelle näher darauf einzugehen: eine höchst problematische Schlussfolgerung, die einer genaueren Prüfung kaum standhalten dürfte).

Zurück zu Schneider. Auch wenn er davon überzeugt ist, apriori die »fundamentale Kluft zwischen menschlichem und mechanischem Bewußtsein« erwiesen zu haben, so geht er dennoch an »Aufweis und Interpretation der transzendentalen Grundstruktur kybernetischer Bewußtseinsanalogien«. Die kybernetische Konzeption des Bewusstseins gilt ihm dabei als ein objektivierbarer oder schlechthin *der eine* objektivierbare Ausschnitt aus dem Spektrum transzendentaler Bewusstseinstheorien. Was demnach Kybernetik als technische Verwirklichung hervorzubringen vermöge, hänge strikt und grundsätzlich von dem ab, was transzendentallogisch erhärtet sei. Diese erhärteten Leitmomente stellt Schneider gewissen kybernetischen Entsprechungen gegenüber.

1. —Auf transzendentaler Seite steht »der apriorische Sinn als Sein und Seinsrelationen konstituierend«. Ihm soll auf kybernetischer Seite entsprechen »das Prinzip der Selektion beim Kommunikationsprozeß, das als Auswahlprinzip für jeden Kommunikationsakt einen vorgegebenen Aspekt (Sinn) notwendig impliziert, nachdem überhaupt eine Wahl getroffen werden kann«.

2. — Der Dualität von Denken und Gedachtem, wie sie im Vorgang der Reflexion auf das Denken selbst entspringt, ordnet Schneider das bekannte Feed-back-Prinzip der Regelungstechnik zu, »das die Systemsubjektivität mit den Objekten des Systems in einem stetigen Reflexbogen und damit den kybernetischen Reflexionsprozeß überhaupt in Gang hält«. Wie sehr es einer Interpretation bedarf , um, wie Schneider, im allgemeinen von einer Systemsubjektivität zu sprechen, möge folgendes Beispiel für eine Rückkopplung belegen, das der *Kybernetik* von Nobert Wieners entnommen ist (S. 147 f): »Der gewöhnliche Thermostat, mit dem wir die Heizung eines Hauses regulieren«, bietet das Beispiel einer negativen Rückkopplungskette. »Die zum Regelzentrum zurückgeleitete Information (hier: Zimmertemperatur) zielt dahin, der Abweichung der Regelgröße vom Sollwert entgegenzuwirken.« Diese Abweichung ist hier die Differenz zwischen der Zimmertemperatur und derjenigen Temperatur, auf die der Thermostat eingestellt ist. Der als »Reflexion« zu interpretierende Reflex besteht also darin, dass die Wirkung der Störgröße selbst wieder Ursache des Regelvorganges wird. Ganz ähnlich wären nervöse Reflexe zu deuten als von der Nervensystemsubjektivität angestellte einfache Reflexionen.

3. — Um zu der bekannten Hierarchie von Reflexionsebenen zu kommen, muss die Bewusstseinsiterierung auf transzendentaler Seite ein Analogon auf kybernetischer Seite erhalten. Hier steht Schneider das »Prinzip der Netzebenen« zur Verfügung, »das als ineinander geschachtelte (iterierte) Strukturen die Ordnung zwischen System und Subsystemen aufbaut«. Offen bleibt, auf welche Weise in solchen Netzebenen auch wirklich Reflexe zwischen Teilsystemen stattfinden, also –was hier allein in Betracht kommt – informatives Feedback über entsprechende Reflexe von Systemen niederer Stufe; ferner die Möglichkeit, von einem Teilsystem zu sämtlichen Reflexen des Untersystems Reflexbögen herzustellen.

Das skizzierte dreistufige Schema liefert nun nach der Meinung Schneiders ein Denkmodell, das mit der klassischen Metaphysik von Grund auf bricht. Diese nämlich sei durchweg bestimmt von der zweifachen Ansicht der Wirklichkeit: als Subjekt und Objekt, Ich und Es, Geist und Materie, Denken und *res extensa.* Ein solches Modell, das dem Denken nicht gerecht wird, sofern es die analytische Einheit des Bewusstseins als sich als Bild wissendes Bild nicht erfasst, müsse ersetzt werden durch eine *dreiwertige* Betrachtungsweise. Der »Phänomenbereich an Reflexionsresten« außerhalb der Sphäre des Subjektiven und des Objektiven werde »in der Kybernetik allgemein als Information bezeichnet« – Information fungiere hier demnach als der fragliche dritte Wert. Freilich hat der kybernetische Informationsbegriff den Charakter einer statistischen Größe; sie ist durch eine Nachricht gegeben, nach N. Wiener »eine zeitlich diskret oder stetig verteilte Folge meßbarer Ereignisse … genau das, was von den Statistikern ein Zufallsprozeß genannt wird« (*Kybernetik*, S. 35). Die Information, die eine Nachricht über einen Versuch enthält, ist aus dieser Sicht nichts anderes als das Maß der Unsicherheit, die dem Versuch durch die eben diese Nachricht verlorengeht. Hieraus wird deutlich, dass ihre Zuordnung zum Bereich der im dualistischen Denken nicht aufgehenden Reflexionsreste zumindest problematisch ist, auch wenn Information angeblich etwas darstellt, das weder Materie noch »Geist oder Subjektivität« ist.

Gotthard Günther, an dessen Arbeiten zum *Bewußtsein der Maschinen* und zur »Idee einer nicht-Aristotelischen Logik« sich Schneider anlehnt, hat dazu eine weitere Analogie aufgestellt. Gegenüber dem Ich und dem Es der klassischen Metaphysik fordert er das Du als ein Mittleres, das teilhat an beiden, sie aber nicht *ist*, sondern vielmehr *vermittelt* im Sinne eines Abbildes vom Verhältnis beider zueinander. Auch das Schema von Seins-Identität, Reflexionsidentität und beide übergreifender Transzendentalität soll dem erörterten Schneiderschen Schema der Kybernetik entsprechen. Günther behauptet ferner, man müsse für eine (seines Erachtens wünschbare) Formalisierung dieser transzendental aufgedeckten Struktur eine dreiwertige Logik heranziehen. Diese nennt er dann nicht-Aristotelisch, weil in ihr das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten ungültig werde. Es bleibt zu bemerken, dass auch eine solche Logik wieder höchstens als eine formale Analogie zu werten ist. Denn erstens wird sie selbst mit Hilfe einer zweiwertigen inhaltlichen Mathematik konstruiert, und zweitens betrifft sie lediglich aussagenlogische Komponenten der Aussagen dieser Logik, nicht aber deren inneren (insbesondere intensionalen) Aufbau. Das jedoch wäre gerade für eine zufriedenstellende Beschreibung transzendentallogischer Reflexionsstufen unerlässlich.

Notizen zu Merleau-Pontys Phänomenologie der Wahrnehmung[1]

Die methodische Einstellung

Das transzendentale Bewusstsein als nicht-welthafter Ort kann, da es nicht umgeben ist von Ansichsein, die Qualitäten als solche nicht ableiten. Sie bleiben im Intellektualismus unsagbare Erfahrungen und nur sofern sie in der Wahrnehmung sind, werden sie bezeichenbar, das heißt: kommt das

[1] Unveröffentlicht, 1969.

Bewusstsein ihrer Wahrnehmung zustande. Ein Gegenstand vermag demnach nur dann zu einem Sein bestimmt zu werden, wenn das wahrnehmende Subjekt im Fluss der möglichen Erfahrungen von ihr innehält und eine Identifikation vollzieht. Insoweit also Erfahrungen identifizierbares Sein darstellen, werden die Gegenstände, der Inhalt dieser Erfahrungen, konstituiert durch die nämliche Leistung, sie identisch zu denken. Hiernach betrachtet der Intellektualismus – legt man diese Ausdeutung und eine Formulierung Merleau-Pontys zugrunde – die Gegenstände als flüchtige Erscheinungen, von der Gnade jenes Blickes lebend, der dem außerhalb allen Seins stehenden Subjekt zueigen ist. Indem aber der so beschriebene Geist zum Subjekt der Wahrnehmung wird, ist die Wahrnehmung als solche nur noch denkbar als ein Ablassen vom Erleben ihrer selbst mitsamt einem Bewusstwerden ihrer selbst. »Aufhören zu sein, um zu erkennen«, heißt es bei Merleau-Ponty. Diese intellektualistische Position erklärt nicht, wie es möglich ist, dass die Sinne als Teile einer erst zu leistenden Welt in ihr jene Zone der Subjektivität eröffnen können, in der die sinnliche Wahrnehmung überhaupt erst vollzogen werden kann. Auf diese Weise sind die Sinne auch nicht einmal mehr Instrumente der Wahrnehmung, denn diese wird allein getragen vom sie vollziehenden intellektuellen Ich. »Instrumente sind sie nur der leiblichen Erregung … Zwischen Ansich und Fürsich gibt es kein Mittleres, und da meine Sinne, als mehrere, nicht ich selber sind, können sie nur Gegenstände sein.« Das so aufgespaltene fühlende Ich deutet alle es ergreifende Erfahrung als etwas, das sich in dem abspielt, was es als denkendes Ich überhaupt erst konstituiert, verteilt also die ihm selbst zukommende Wahrnehmung in das Wahrgenommene. Dagegen glaubt Merleau-Ponty die ursprüngliche Einheit des fühlenden Ich wiederherzustellen, indem er sich das Bewusstsein in Sinnlichkeit eingetaucht, den Geist völlig umschlossen denkt von Welt, durch die »Kommunion« der Empfindung mit ihr zu einem Leib werdend.

Bei dieser Wiedergewinnung einer ungebrochenen leiblichen Subjektivität, eines sich nur im Rhythmus des Empfindens verändernden Weltleibes, in welchem das Ich als dieses Empfinden selbst aufgehoben ist, gibt Merleau-Ponty zu bedenken, dass dieser Urzustand sich als Ergebnis und Gegenstand einer Reflexion ergibt, mithin nicht das nur Präreflexive darstellt, sondern *das durch Reflexion verstandene Präreflexive*. In der Tat ist dies die grundlegende Frage seiner phänomenologischen Philosophie: Wie kann ein Denken, das seine Voraussetzungen verstanden zu haben glaubt, sich als ein solches verstehen lernen, das diese Voraussetzungen überhaupt erst ermöglicht?

Die methodische Haltung, die Merleau-Ponty zur Lösung dieses Problems einnimmt, lautet: »Die Reflexion muss das Unreflektierte, dem sie nachfolgt, aufklären und dessen Möglichkeit zeigen, um sich selber als Anfang begreifen zu können.« Die Reflexion, die das Ich anstellt, leistet dies nach Merleau-Ponty aber nur, wenn das empfindende Ich sich überhaupt erst in der vom ihm beschriebenen Koexistenz entfaltet, wenn es also die Qualitäten nicht als Gegenstände setzt, sondern sie sich aneignet und anverwandelt. In diesem Sinne nun sind die Qualitäten aus dem leiblichen Ich ableitbar, was für das transzendentale Ich ja gerade nicht zutrifft. In diesem Sinne ist das empfindende Subjekt aber auch unterscheidbar vom ganzen Sein, d. h. es wird an ihm sichtbar, denn jede Empfindung ereignet sich zwar im Medium des Seins, das freilich als Angelpunkt und Augenblick der personalen Geschichte des empfindenden Subjekts. Merleau-Ponty: »Ich bin also nicht, mit Hegel zu reden, ein ›Loch im Sein‹, sondern eine Höhlung, eine Falte, die sich im Sein gebildet hat und auch wieder verschwinden kann.« Allein in dieser Sicht der Dinge glaubt er die »redensartliche Lösung des Problems« vermeiden zu können, welche die Unwandelbarkeit jenes Ich voraussetzt, das sich als in einem Leib situiert und mit den Sinnen versehen denkt. Diese Lösung verwirft Merleau-Ponty, denn in ihr wird nicht bedacht, dass das reflektierende Ich das inkarnierte Ich nicht wiederzuerkennen vermag. Durch den Begriff der Koexistenz oder Kommunion wird dieser offene Kreis zunächst geschlossen: Das Erkennende steht nicht mehr außerhalb der Welt, es ist mit ihr durch *sympathische Gemeinsamkeit* verwachsen. (Offenkundig unterscheidet sich diese Sichtweise von der Schellings, denn anstatt die Reflexion gleichsam in das Sein zurückzubiegen und dort festzuhalten, fordert Schelling ihre Depotenzierung.) Doch dadurch, dass Merleau-Ponty sich der leiblichen Subjektivität versichert, ist er gezwungen, das Denken aus ihr abzuleiten und darüberhinaus auch in ihr abzuschließen, es gewissermaßen im Sein zu fixieren. Da er aber auch dies wiederum reflektieren muss, ergibt sich die Schwierigkeit, abermals diese Reflexion »als Anfang begreifen zu können«. Hier vertraut Merlau-

Ponty stillschweigend darauf, dass die Reflexion das Präreflexive lässt, wie es ist, was heißt: dass die Reflexion selbst erneut als ein gründender Teil des Präreflexiven in Erscheinung tritt. Dieses Vertrauen ließe sich durch garantierte Gewissheit ersetzen, wenn man sich von vornherein des Denkens als immer wieder Gedachtem sicher wäre. Das Reflektieren selbst darüber enthielte dann nicht mehr das Problem der Welt- oder Ich-Zugehörigkeit, sondern nur die (nach Fichte) sittliche Aufgabe, die Welt als ichhafte Welt im Ich zu leisten.

Demnach bleibt zumindest eine Berechtigung, den Rahmen Merlau-Pontys nicht zu sprengen. Sie liegt darin, dass seine innere Betrachtung das Sinnliche als eine Weise unseres Zur-Welt-Seins aufdeckt, und zwar so, wie es dem Idealismus nicht ohne weiteres möglich wäre. Ferner kann in dieser phänomenologischen Sicht ohne grundsätzliche Schwierigkeiten und ohne einen Wechsel der Betrachtungsebene die unmittelbare Analyse der Empfindung vorangetrieben werden. Es lässt sich etwa die Frage behandeln, wie es möglich ist, dass das Wahrnehmungsbewusstsein in Wahrnehmung aufgehen kann, wie also sinnliches Bewusstsein von intellektuellem Bewusstsein unterscheidbar ist.

Da jede Empfindung gemäß ihrer Auffassung als »Kommunion« bis zu einem gewissen Grade Auslieferung und Sichüberlassen bedeutet, »trägt sie in sich den Keim eines Traumes und einer Entpersönlichung«. Diese nimmt dabei in dem Maße zu, in dem das Subjekt sich der »Anpassung meines Leibes« an die Welt nicht mehr bewusst wird. Von hier aus erhellt sich auch das Problem, weshalb das personale Ich vom Bewusstsein des Todes angegangen werden kann. Die Empfindung entzieht sich nämlich dem personalen Sein, ist von einer Atmosphäre der Allgemeinheit umgeben, sofern das Ich sich als das eigentliche Subjekt nur bewusst werden kann, wenn es sich von dieser Empfindung losgelöst denkt. Das heißt aber: Es vermag sich nicht gänzlich zu reflektieren, die Empfindung ist nicht von ihm verfügt, und nur soweit es sich unter solch vorpersonale Horizonte begibt, weiß es überhaupt, dass es empfindet. In dem Maße also, wie das empfindende Subjekt von der Empfindung angegangen wird, wird es vom Tod oder von der Geburt angegangen und »insofern eine jede Empfindung strenggenommen die erste und letzte und einzige ihrer Art ist, ist auch jede Empfindung eine Geburt und ein Tod«.

Aspekte der Empfindung

Den Aufbau des fünften Paragrafen von Merleau-Pontys *Phänomenologie der Wahrnehmung* darf man dialektisch nennen. Erst wird die Anonymität der Empfindung behandelt, dann ergibt sich daraus notwendig der komplementäre Aspekt, nämlich ihre Partialität, und im dritten Schritt werden beide als zwei Seiten desselben Phänomens wieder zusammengeführt.

Die Anonymität der Empfindung. — Während das Subjekt sich in seinem personalen Leben als etwas nahezu kontinuierlich Durchschaubares und Durchschautes begreift, darf es seine Sensibilität nicht einmal mit Recht die seine nennen, da zwischen dieser und seiner Personalität laut Merleau-Ponty »die Dichte eines ursprünglichen Erwerbs liegt, . . . die mir eine gänzlich sich selbst klare Erfahrung verweigert«. Die Empfindung wirft mich aus der Bahn meiner personalen Kontinuität, ich erfahre sie als »Modalität einer allgemeinen Existenz«. Nicht ich bin es eigentlich, der Empfindungen hat, sondern *es* oder *man* empfindet in mir. Wie meine Geburt und mein Tod einer anonymen Natalität bzw. Mortalität angehören, so gehören meine Empfindungen einer anonymen Sensibilität. Nicht ich intendiere meine Empfindung und habe sie dann, sondern meine Empfindung geht mich an und verleibt mich ein, ohne dass ich mich dazu entschließen müsste, einer sinnlichen Allgemeinheit zu vergleichen, so wie mein Schlaf sich verstehen lässt als Kommunion meines Atems mit einer riesigen äußeren Lunge. Und nähme ich meine Wahrnehmung in den Vorsatz, intendierte ich sie, so würde jene »von außen kommende Bestätigung« dieser »willentlich eingenommenen Haltung« jede personale Aktivität überspielen, verdrängen oder, um im Bilde zu bleiben, aufsaugen. Deshalb erfahre ich jene Bewegung meiner Hand, welche eine bestimmte Berührung auslöst, als den Rand, nicht aber als den adäquaten Ausdruck meiner personalen Aktivität.

Die Partialität der Empfindung. — Der Allgemeinheit der Sinne entspricht auf der anderen Seite ihre Partialität. Partialität der Empfindung meint einmal: Die Gegenstände selbst werden mir nie gänzlich durchsichtig. Die Dinge sehend bin ich mir zugleich eines nicht Gesehenen der Dinge bewusst. Und zwar verbleibt jenseits des je aktuell Gesehenen zunächst weiteres Sichtbares, das auf Grund der optischen Perspektivität nicht in die Sicht kommt, also etwa die Rückseite einer Wand, während ich ihre Vorderseite betrachte. Infolge meiner zwar je verschiedenen, aber zugleich auch stets fixierten Position im Raum, vermag ich aktuell nur immer Ausschnitte der Dinge zu sehen, zu berühren, zu hören, usw.

Darüberhinaus eignet jedem Gegenstand eine »Tiefe, die keinerlei sinnliche Aufnahme je zu erschöpfen vermag«. Das heißt: Insofern die Gegenstände welthaft sind, sind sie nicht bloß empfindbar, sondern auch denkbar. »Sichtbare und fühlbare Welt sind nicht schlechthin die ganze Welt«, heißt es bei Merleau-Ponty.

Demnach bleibt die Empfindung partiell in doppelter Hinsicht. Und zwar erstens deshalb, weil ich, indem ich je aktuell empfinde, immer nur Teile der Dinge empfinde, während mir ihr übriges Empfindbares verborgen bleibt. Und zweitens deshalb, weil ich selbst, wenn ich das überhaupt Empfindbare stets aktuell empfände, immer bloß den empfindbaren Teil der Welt und nicht auch ihren denkbaren und erkennbaren Teil erschöpft hätte.

Entsprechendes gilt nun auch für das Subjekt selbst: Es vermag sich weder als absolut personal, begrenzt und dicht, noch als absolut welthaft, unbegrenzt und durchlässig zu begreifen. Seine Empfindungen verdrängen seine Personalität, und seine Personalität verdrängt seine Empfindungen, das heißt: Auch es selbst kann sich stets nur teilweise, ausschnittsweise erschöpfen. Kurzum, das Ich ist partiell personal und partiell welthaft; sowohl es selbst als auch die Dinge sind ihm immer nur ausschnittsweise gegenwärtig.

Die Verflechtung von Allgemeinheit und Besonderheit der Sinne. — Beide Aspekte der Empfindung, ihre Anonymität wie ihre Partialität, fasst Merleau-Ponty schließlich zusammen, indem er sagt, jede Empfindung gehöre einem bestimmten Felde an. Das Wort ›Gesichtsfeld‹ beinhaltet beide Sinne des Sehens, nämlich erstens: Mein Gesichtsfeld brauche ich mir nicht erst zu eröffnen oder zu erschließen, es liegt je schon offen und sichtbar vor mir, ohne dass ich selbst dies Offenliegen, diese Sichtbarkeit zuvor hätte irgendwie leisten, verfügen oder ermöglichen müssen. »Gesichtsfeld« besagt zweitens: Ich sehe etwas Begrenztes, einen bestimmten Ausschnitt, und es gibt eine Menge außerdem sichtbarer Dinge, die ich nicht wahrnehme, weil sie außerhalb meines Blickfeldes liegen.

Verstehe ich das Gesichtsfeld nun in einem erweiterten Sinne, nämlich als Feld auch des nicht-aktuellen Sehens, so kann ich sagen: »Sehen ist … an ein bestimmtes Feld gebundenes Denken«. Denken und Sehen weisen somit dieselbe Grundstruktur auf, beide sind vorpersonal und begrenzt zugleich. Denken und Sehen lassen sich auseinander herleiten, das eine kann man gleichsam ablesen vom anderen. Dabei haben das Sehen und die Sinne die Priorität vor dem Denken und dem Sinn. Dass ich in der Lage bin, »in bestimmten Anblicken des Seins einen Sinn zu entdecken«, beruht darauf, dass mir meine Sinne bereits einen Zugang zur Welt verschafft haben. Durch die Sinne findet der erste und zugleich intimste Kontakt mit dem Sein statt. Das Sehen und die Sinne bilden somit gleichsam die Vorlage, nach der Denken und Sinn sich richten. Zusammengefasst: Ebenso wie die Dinge nicht auf die »Gnade meines Blickes« angewiesen sind und nicht erst dadurch sichtbar werden, dass ich sie betrachte, sondern »ohne jede Bemühung meinerseits« offen und unverborgen meinen Sinnen sich darbieten und gegeben sind, ebenso ist die Entdeckung eines Sinns in bestimmten Anblicken des Seins nicht dadurch gewährleistet, dass ich selbst ihn zuvor »kraft einer konstituierenden Leistung« ins Sein hineinstecke oder ihm verleihe, sondern dadurch, dass er stets schon vorliegt und gegeben ist.

Zur Problematik des fünften Paragrafen. — Seinen ersten Teil kann man mit ›Räumlichkeit der Sinne‹ überschreiben. Im Verlauf einer Auseinandersetzung mit dem Intellektualismus, mit dem Empirismus und mit Kant im besonderen weist Merleau-Ponty nach, dass Empfindbares nur im Raum fixiert sein kann, andernfalls es lediglich Empfindung von Zuständen, nicht aber von ausgedehnten Dingen gäbe. Ich habe also immer Empfindung von etwas, und zwar von etwas Räumlichem. Auch das Beispiel des Blinden oder Seelenblinden kann nach Merleau-Ponty nicht darüber entscheiden, welcher der Sinne oder welche Sinne uns den Raum geben. Denn einer »Analyse der Gesamterfahrung« können nur die integrierten Sinne, nicht jedoch ein »besonderer Erfahrungstyp« wie der des Blinden zugrunde gelegt werden. Innerhalb einer Gesamterfahrung aber bilden die Sinne *ein ursprüngliches und letztlich nicht auflösbares Ineinander*, welches jedenfalls zu einem Räumlichkeitsbewusstsein führt.

Darum ist das Problem der Einheit und der Trennung der Sinne im Kern überhaupt kein Problem »der Erfahrung im empiristischen Sinne des Wortes«, sondern eines der Reflexion. Einer Reflexion freilich, die ihrerseits nicht wieder intellektualistisch oder empiristisch sein kann, sondern vollständig und radikal. Radikal und die Beschränkung durch den Intellektualismus überwindend stellt sich nach Merleau-Ponty diejenige Reflexion dar, »die mich erfaßt im Begriff, die Idee des Subjekts und die des Objekts zu bilden und zu formulieren, die den Ursprung beider Ideen zu Tage legt, die nicht allein operierende, sondern in dieser Operation ihrer selbst bewußte ist« – die sich somit nicht damit begnügt, mit Subjekt und Objekt wie mit »realen Einheiten« umzugehen, sondern weiter fragt nach der Herkunft dieser Ideen. Es gilt, jene Urschicht wiederzufinden und zu entdecken, »der Ideen wie der Dinge allererst entspringen«. Bevor ich darangehen kann, die Welt zu denken, muss ich sie als Gegebenheit erfahren haben. Deshalb kann mein Denken nicht eine Welt erschaffen oder ermöglichen, vielmehr kann es nur auf eine gegebene Welt zurückführen. Merleau-Ponty: »Wir müssen nicht a priori die Welt in Bedingungen einschließen, ohne die sie nicht gedacht zu werden vermöchte, denn um gedacht werden zu können, muß sie zunächst einmal nicht ignoriert sein, muß sie zunächst einmal für uns dasein, d. h. gegeben sein.«

Kritik an meiner Problematisierung einer ›Theorie der unmittelbaren Erkenntnis‹[1]

Vorbemerkung

In *Theorie und Rechtfertigung* (Braunschweig, 1975) hatte ich der ›Kritischen Methode‹, wie sie von J. F. Fries in der Nachfolge Kants entwickelt und später dann von Leonard Nelson weitergeführt wurde, ein eigenes ausführliches (mehr als 50-seitiges) Kapitel gewidmet. Nelson (an Fries anknüpfend) deutet die von Kant unternommene »Deduktion« apriorischer

[1] In P. Schröder (Hg.), *Vernunft Erkenntnis Sittlichkeit*. Internationales philosophisches Symposion, Göttingen, vom 27. – 29. Oktober 1977, aus Anlaß des 50. Todestages von Leonard Nelson; Felix Meiner Verlag: Hamburg 1979.

Erkenntnisse als einen *empirischen* (psychologischen, nämlich durch Introspektion erfolgten) Aufweis »unmittelbarer Erkenntnisse« der Vernunft. Ihre Kennzeichnung als unmittelbar hat vor allem den Zweck, sie von *mittelbaren* Erkenntnissen (nämlich in Aussagen gefassten *Urteilen*) zu unterscheiden. Diese können wahr oder falsch sein, jene hingegen sollen nichts anderes darstellen als den *Grund* ihrer Geltung, der deswegen eben seinerseits nicht wieder Urteil sein kann. Als ein solcher (unvermittelter) Grund liegt eine unmittelbare Erkenntnis in der Vernunft und bedarf zu ihrem Eintritt ins Bewusstsein einzig noch eines *Aufweises*, der allerdings wohl zu unterscheiden ist von einem mit Argumenten geführten Beweis, den es nur im Bereich der mittelbaren Erkenntnisse (Urteile, Aussagen) geben kann. In den Augen der Friesianer ist es daher schon rein begrifflich ausgeschlossen, an einer unmittelbaren Erkenntnis (so sie denn einmal aufgewiesen wurde) zu zweifeln. Dies ist der Inhalt eines Prinzips, das als »Grundsatz vom Selbstvertrauen der Vernunft« (GSV) zu einer Hauptsäule der reformierten, d. h. anthropologisch gewendeten ›Kritischen Methode‹ avanciert ist. In einer eingehenden metakritischen Untersuchung zum GSV (vgl. Kapitel 2 von *Theorie und Rechtfertigung*) hatte ich dessen Eignung als Rechtfertigungsinstrument in Zweifel gezogen. Das rief auf der Göttinger Tagung einen angriffslustigen Richter auf den Plan, der glaubte, meine Kritik mit der herkömmlichen Wortklauberei eigentlich überwunden geglaubter Sophistik zerpflücken zu müssen. Trotz seiner vehement vorgetragenen konfusen ›Vernunft‹-Dogmatik, die dem klaren (und daher der Kritik zugänglichen) Denk- und Schreibstil seiner Vorbilder (Fries, Nelson) so gar nicht entsprach, habe ich mich zu einer ausführlichen Erwiderung seiner ›Widerlegungen‹ entschlossen. Natürlich hatte W. danach erneut die Gelegenheit, auf meine Einlassung zu reagieren − was erwartungsgemäß nach der Methode der Beharrlichkeit und unter Zugabe eines weiteren Schwalls belangloser Fußnoten vonstatten ging. Dieser Teil der Diskussion kann hier ausgespart bleiben.

Diskussionsbeitrag

Alfred Schreiber. — Ihre soeben dargelegte Auffassung des von Ihnen im Titel so genannten »sogenannten Problems der unmittelbaren Erkenntnis«

scheint mir einige einschlägige Mängel aufzuweisen. Zunächst fassen Sie das Problem so auf, als ginge es dabei um den Aufweis *eines* Beispiels für eine unmittelbare Erkenntnis. Nun, Ihr Beispiel (4) wird wohl auch jedermann als Exempel für ein wahres Urteil ansehen.[2] Das wirkliche Problem der unmittelbaren Erkenntnis beginnt aber doch erst bei der Anwendung der Deduktion auf Systeme wissenschaftlicher Urteile. Dabei wären dann nämlich zu sämtlichen Grundurteilen die durch sie wiedergegebenen unmittelbaren Erkenntnisse aufzuweisen, und zwar mit empirisch-psychologischen Verfahren. Wie diese Verfahren nun konkret aussehen sollen, kann ich auch Ihren Ausführungen nicht entnehmen, hier liegt wohl nach wie vor ein ernst zu nehmendes Problem der Kritischen Methode vor. Weiter scheint mir die für dieses Problem grundlegende Frage der Unterscheidung von Urteil und Erkenntnis durch Ihr Vorgehen zu Beispiel (4) einigermaßen verwirrt zu werden. Sie erblicken die Unmittelbarkeit der in (4) geäußerten Erkenntnis in dem Umstand, daß (4) nicht »als Schlußsatz aus anderen Prämissen« folgt. Diese Kennzeichnung des Begriffs ›unmittelbar‹ wäre wohl ein Novum[3] in der Kritischen Methode; in dieser sind mittelbare Erkenntnisse nichts anderes als Urteile. Daß (4) nicht aus Prämissen beweisbar ist (oder besser: sein soll), charakterisiert es allenfalls als Grundurteil; als auf Begriffe gebrachte Erkenntnis ist (4) nämlich ein Urteil. Indes, auch Grundurteile »sind, als Urteile, doch nur mittelbare Erkenntnisse und bedürfen als solche der Begründung« (Nelson, Bd. VII, S. 574). Ich will damit nicht sagen, daß Ihre (mir im Detail unbekannte) Definition von ›unmittelbar‹ ungerechtfertigt sei. Sie ist aber sicherlich nicht die, welche z. B. Nelson verwendet hat. Das bestätigt – leider – um ein weiteres Mal

[2] In Westermanns Sektionsvortrag heißt es [VES, 212]: »Ich behaupte: 4 den Fall, daß (K^o) die Prämissen eines Schlusses wahr, die Konklusio jedoch falsch ist, gibt es nicht. Über (4) behaupte ich weiter: dies ist eine Erkenntnis (4.1), sie ist nicht-anschaulich (4.2), sie ist unmittelbar (4.3)« [A. S.: Die 4 in dieser Textpassage auftretenden Fußnoten (von insgesamt 182 im ganzen Vortrag) wurden hier unterdrückt.]

[3] W. glaubte allen Ernstes nachgewiesen zu haben, dass aus seiner Diskussion des Beispiels (4) die Tatsache der Unmittelbarkeit der darin liegenden Erkenntnis hervorgeht. Unmittelbar sind ja nur Erkenntnisse, von denen das Subjekt noch gar nichts weiß und die deshalb – man fragt sich ja immer wieder: *wie*? – erst noch bewusst gemacht werden müssen. Geradezu haarsträubend mutet W.'s Ansicht an, eine bewusst gemachte unmittelbare Erkenntnis sei prinzipiell unfehlbar, weil er sie dann ja habe und »ein Fehler im Nachweis ihrer Existenz … historisch einfach überholt und ohne Bedeutung« sei [VES, 223].

die Unbestimmtheit der hier in der Kritischen Methode benutzten Begriffe. Überhaupt habe ich den Eindruck, dass Sie es sich mit dem *Begriff* der unmittelbaren Erkenntnis etwas zu einfach machen. Kaum jemand wird wohl bestreiten, daß Urteile in irgend etwas ihren ›Grund‹ haben. Was ich jedoch bezweifle, ist dies: daß man sich im Besitz eines zur Durchführung einer anthropologischen Vernunftkritik (als Metatheorie) tauglichen Begriffs wähnen darf, wenn man, was Grund eines Urteils sein mag, einfach »unmittelbare Erkenntnis« *nennt.* Rein nominell läßt sich das zwar machen; ich frage mich aber, was damit gewonnen wäre, insbesondere für das Friessche Deduktionsverfahren durch empirisches Aufweisen von Urteilen als Wiedergaben unmittelbarer Erkenntnis.

An dieser Stelle wird gewöhnlich das Selbstvertrauen der Vernunft ins Spiel gebracht. Doch worauf sollen wir vertrauen? Etwa auf den Erkenntnischarakter unserer ›Urteilsgründe‹, die wir bisher bloß Erkenntnisse *nannten*? Andererseits wäre es doch zu schön, wenn allein schon dadurch, daß Zweifeln am Selbstvertrauen selbst ein Erkenntnisanspruch (!) anhaftet, das Selbstvertrauen der Vernunft sich gewissermaßen als *allgemeines* Faktum erwiese. So glaube ich Sie selbst verstanden zu haben. Doch ganz gleich, wie man zu diesen Problemen stehen mag: ob nun Erkenntnis möglich ist oder nicht, ein bestimmter *Nachweis* der Existenz unanschaulicher unmittelbarer Erkenntnis kann durchaus falsch sein, allein schon wegen seines angeblichen empirischen Charakters. Dabei geht es – auch in meinen von Ihnen kritisierten Überlegungen in *Theorie und Rechtfertigung* – überhaupt nicht um eine Verteidigung des Skeptizismus, sondern darum, falsche oder unfundierte Argumente als solche herauszustellen und zu kritisieren. Diese Metakritik enthält keineswegs direkte Einwände gegen die Existenz unmittelbarer Erkenntnisse. Vielmehr betrifft sie *vermeintliche* Existenzbeweise, und zwar insbesondere solche, die mit der Unterstellung operieren, daß derjenige, der ihnen nicht zu folgen vermag oder sie kritisiert, selbst leibhaftiger Beweis für das zu Beweisende sei oder gar als »Zweifler an seiner eigenen Erkenntnis« einen psychopathologischen Fall [4] darstelle.

[4] Im Untertitel seines Vortrags spricht W. von den »Mißverständnissen« der kritischen Methode und kündigt »Mutmaßungen über die psychopathologischen Ursachen« dieser Verständnislosigkeit an. Schließlich lässt er das Biest von der Leine und bekräftigt zu seinen Mutmaßungen: »ich meine sie wirklich so, wie sie dastehen! und hierzu berufe ich mich

Ich halte letzteres nicht allein für eine klassische Immunisierungsstrategie, sondern auch für unterhalb der Gürtellinie der anstehenden Problematik.

POSTSKRIPTUM

Für die anthropologische Vernunftkritik wäre mit dem Aufweis *eines* Beispiels »unmittelbarer Erkenntnis« nicht eben viel erreicht. Tatsächlich zielt denn auch die »transzendentale Apperzeption«, wie J. F. Fries das Ganze der unmittelbaren Erkenntnis nennt, auf eine *allgemeine* Funktion bzw. Rolle im Prozess des empirischen wie des theoretischen Erkennens. Paul Bernays[5] hat dies vor allem mit Bezug auf die Fries'sche Auffassung (die von Nelson keineswegs pauschal, sondern nur in Teilen übernommen wurde) kritisch herausgearbeitet. Wenn wir die Gültigkeit eines Urteils, d. h. einer *mittelbaren* Erkenntnis, prüfen wollen, können wir es Fries zufolge nicht mit dem zugehörigen, uns prinzipiell unzugänglichen Erkenntnisgegenstand vergleichen, sondern einzig mit der als Grund des Urteils fungierenden unmittelbaren Erkenntnis, die »hierbei gewissermaßen die Rolle des Gegenstands« übernimmt [Bernays, S. 116]. Demnach ist »die erkennende Tätigkeit die der Reflektion«. Letztere ist eine Form der Selbstbeobachtung der Vernunft, die das dunkel und unbewusst in ihr liegende Ganze der Apperzeption Schritt für Schritt ins Bewusstsein hebt und in Einzelurteilen, z. B. wissenschaftlichen Aussagen, ausspricht. Die Vorstellung ist nun die, dass Ungültiges und Falsches dabei einzig durch diese vermittelnde Reflexion entstehen kann, während die unmittelbare Erkenntnis in ihrer

---

ungeniert auf meine Vormänner« [VES, 224]. »Wer noch Grundsätze anfechten will«, stelle sich »mit dem Blödsinnigen auf eine Stufe« (Fries); und »wer seiner Vernunft nicht traut,… der wende sich an die Psychiater« (Nelson). Bezüglich des zweifelhaften »Grundsatzes des Selbstvertrauens der Vernunft« wird sich der »Gewalt dieser Voraussetzung … nur die völlige Gedankenlosigkeit des Blödsinnigen« entziehen (Fries). Als Richter, gibt sich W. enerviert, blicke er »auf 25 Jahre traurigste Erfahrung« im Lösen ethischer, politischer und pädagogischer Probleme, dass er es sich zeitlich einfach »nicht mehr länger leisten kann«, sich »auf Verstehens-Schwierigkeiten Nicht-Kompetenter einzulassen« [VES, 225].

[5] Vgl. den Aufsatz: Über die Fries'sche Annahme einer Wiederbeobachtung der unmittelbaren Erkenntnis; in *Leonard Nelson zum Gedächtnis*, hrsg. von M. Specht und W. Eichler; Verlag ›Öffentliches Leben‹, Frankfurt am Main – Göttingen 1953, 113-131.

Gesamtfunktion als Grund einzelner Wahrheiten fungiert und somit *per se* objektive Gültigkeit in Form von Vertrauen der Vernunft zu sich selbst beansprucht. Damit ist allerdings nichts gewonnen, denn letztlich ist gerade nach Auffassung der Fries'schen Schule *jede* Bewusstmachung von Teilen dieses Ganzen fallibel (nämlich als dessen Reflexion). Unmittelbare Erkenntnis mag getrost als ›objektiv gültig‹ betrachtet werden; aber sie ist es nur, sofern sie unbewusst – und das heißt insbesondere auch *ungewusst* – bleibt. Ein Ganzes der Erkenntnis, von dem wir, ohne in seine reflektierende Beobachtung und Zergliederung einzutreten, lediglich wissen oder wenigstens annehmen, *dass* es existiert, *hat gar keinen Nutzen für Erkenntnisvorgänge, die im praktischen Leben und in der Wissenschaft von Bedeutung sind.* Diese Bedeutung erlangen sie nämlich niemals ohne sondierende und abklärende Reflexion. Auch Bernays erscheint es »als unangemessen, das Ganze der Apperzeption als ein Ganzes der *unmittelbaren* Erkenntnis zu charakterisieren« [S. 118]. Seiner Einschätzung nach bestand für Fries »die Nötigung zu dieser Annahme nur darum, weil er die Reflektion als eine Art der Selbstbeobachtung« verstanden wissen wollte. So kam zudem eine »unnötige Doppelheit« ins Spiel, nämlich die eines unmittelbaren Sachverhalts – der ebenso transzendent ist wie Kants Ding an sich – und zusätzlich seiner ins Bewusstsein gelangten Erscheinungsform. Wir verlieren also nichts, wenn wir die fragwürdige, aus erkenntnistheoretischen Zwängen stipulierte Scheidewand zwischen unmittelbarer und mittelbarer Erkenntnis niederreißen. Das gilt für das Feld der Empirie ebenso wie für das der Theorie. Bernays sagt: »Im Gebiete der physikalischen Tatsachen aber ist es ersichtlich, daß unsere Erfahrungsergebnisse untrennbar verbunden sind mit theoretischen Auffassungen, zu denen wir erst – (um es in der Fries'schen Ausdrucksweise zu formulieren) – durch Anwendungen der reflektierenden Urteilskraft gelangen. Der Weg von den experimentellen Sinneswahrnehmungen zu den Konsequenzen, die aus ihnen entnommen werden, ist hier kein eindeutig vorgezeichneter, so daß nicht zu ersehen ist, wie man sich ein direktes Resultieren der Erkenntnis in der transzendentalen Apperzeption vorstellen soll« [S. 121]. Als »besonders unbefriedigend« muss es überdies erscheinen, die ganze Entwicklung des wissenschaftlichen Geistes »bloß als eine solche der inneren Selbstbeobachtung anzusehen«. Die »Bildung neuer Theorien« erfordert und vollzieht sich nämlich durch

»eine viel engere und reichere Verflechtung des Empirischen mit dem Rationalen, als sie unter dem Gesichtspunkt der ›Form des Vernunftsschlusses‹ angenommen werden könnte« [S. 125]. Einzig »in der reinen Arithmetik« kann Bernays zufolge »in einem gewissen Sinne von unmittelbarer Erkenntnis gesprochen werden«, allerdings »nicht im Gegensatz zur Reflexion; denn die Anschaulichkeit des Arithmetischen ist eine solche, welche sich gerade an die Form des reflektierenden Bewußtseins knüpft«, weshalb hier auch keine »Doppelheit von unmittelbarer Erkenntnis und deren Wiederbewußtsein« anzutreffen ist.

Aporetische Charaktere der Gegenständlichkeit[1]

Allgemeine Betrachtungen

Unter Gegenständlichkeit verstehe ich die Eigenschaft einer Vorstellung, beim vorstellenden (erkennenden) Subjekt die Ansicht hervorrufen zu können, dem vorgestellten ›Etwas‹, das den Inhalt der Vorstellung ausmacht, entspreche ein von der Sphäre des Subjekts geschiedenes, eigenständiges Substrat, eine der Kontrolle des Vorstellenden weitgehend entzogene Entität. Die alltägliche Wahrnehmung und auch der größte Teil der wissenschaftlichen Erkenntnis macht von dieser Eigenschaft gewöhnlich keinen expliziten, sondern typischerweise stillschweigenden Gebrauch. In dem Bild, das wir in dieser ›natürlichen Einstellung‹ von der Wirklichkeit haben, bleibt die Gegenständlichkeit der Vorstellungen unthematisiert. Tatsächlich wird diese erst durch philosophische Reflexion bewusst und erzeugt dann eine Fülle von Aporien und Rätseln. Eine ebenso bündige wie ins Einzelne gehende Entwicklung dieser – nach Kant »unabweisbaren« – Fragen findet sich bei Nicolai Hartmann in *Grundzüge einer Metaphysik der Erkenntnis* [4. Auflage, Walter de Gruyter & Co., Berlin 1949].

Heute wäre schon in Anbetracht dieses Titels die erste sich aufdrängende Frage die, was, *nach* Kants Kritik der reinen Vernunft, eigentlich noch

[1] Unveröffentlicht, 2010.

Metaphysisches an der Erkenntnis sein könne. Die Frage unterstellt, in der Kantischen Kritik sei das Erkenntnisproblem restlos gelöst; das jedoch beruht nach Hartmann auf »einem kapitalen Mißverständnis«, denn die Transzendentalphilosophie – und das gilt erst recht für ihre späteren rein idealistischen Ausprägungen – verlagert den Schwerpunkt der Erkenntnisrelation ins Bewusstsein und vermag am Ende den Begriff des Gegenstands selbst ausschließlich in seiner Bezogenheit auf das Subjekt zu fassen. Hartmann zufolge *verweist* der Gegenstand jedoch auch auf ein dem Subjekt fernstehendes Etwas, eine »seiende Sache«, die in der Erkenntnisrelation nicht mehr vollständig aufgeht [vgl. Hartmann, S. 60]. Eben darin zeigt sich die metaphysische Seite des Erkenntnisproblems, welche auch durch Kants Vernunftkritik bestenfalls notdürftig verdeckt, nicht aber effektiv beseitigt worden ist.

Nur dem philosophischen Nachdenken erscheint die Gegenständlichkeit der Vorstellungen als metaphysisches Problem. Auf der phänomenologischen Stufe wird zunächst lediglich der Tatbestand erfasst, dass an einem Gegenstand Erkanntes *als* unabhängig vom erkennenden Subjekt vorgestellt wird, das z. B. auch dann noch seine Gültigkeit behält, wenn das Subjekt andere oder keine Vorstellungen (mehr) hat. Was andererseits soll an diesem ›Ansichsein‹ so fragwürdig und beunruhigend sein? Hartmann spricht von einer allgemeinen Aporie der Erkenntnis, die »schon mit dem nackten Gegenüber von Subjekt und Objekt« beginnt [S. 61]:

> Wie kann zwischen diesen beiden eine *aktuelle Relation* bestehen, da doch ihre Sphären derart getrennt und einander *transzendent* sind, daß jede von ihnen auch außer der Relation für sich besteht? … Entweder die Relation ist ihnen unwesentlich und inaktuell oder sie hebt ihre Transzendenz auf.

Derartige Beschreibungen fordern geradezu ihre sprachkritische Analyse heraus. Es ist ja ohne weiteres möglich, dass eine zweistellige Beziehung $R(a, b)$ für Entitäten a und b gilt, die aus ganz unterschiedlichen und getrennten »Sphären« (Dingbereichen) stammen. Zum Beispiel könnte a eine Zahl, b ein Kreis sein und die Relation $R(a, b)$ genau dann bestehen, wenn der Radius von b die Länge a besitzt. Obwohl jedes der in Beziehung gesetzten Elemente (Zahlen, Kreise) zweifellos »auch außer der Relation für sich besteht«, führt dies aber keineswegs in eine Aporie. Gegen dieses einfache Beispiel ließe sich einwenden, die Relation R sei den betrachteten Elementen »unwesentlich« oder ›äußerlich‹. Richtig daran ist, dass man zu gegebener Zahl a nicht zwangsläufig an einen Kreis mit Radius a denken muss. Ist aber der Bezug eines gegebenen Subjekts auf ein von diesem vorgestelltes Objekt in einem nachvollziehbaren Sinn ›wesentlicher‹ als der von Zahl zu entsprechendem Kreis?

Ganz offensichtlich enthält die Vorstellung, die Hartmann sich vom vorstellenden Subjekt und vorgestellten Objekt macht, gewisse bildliche Elemente, die ein uneigentlich-räumliches Verständnis der Erkenntnisrelation suggerieren. Um den Gegenstand zu »erfassen«, muss das Subjekt »aus sich heraustreten«, was es jedoch nicht kann, weil es als Bewusstsein »ewig in sich gefangen« bleibt. Umgekehrt muss auch das Objekt seine Züge irgendwie auf das Subjekt »übertragen«, was wiederum nicht möglich scheint, da das Subjekt »das Objekt gerade als Ansichseiendes« meint und so dessen Bestimmtheiten »der Sphäre des Subjekts transzendent« bleiben.

Hartmann entwickelt in diesem Stil insgesamt sieben, sich teilweise übereinander lagernde Aporien, um dann im zweiten Teil des Buchs systematisch die »Standpunkte und Lösungsversuche« der philosophiegeschichtlich wichtigsten realistischen, idealistischen und monistischen Theorien darzustellen und zu erörtern. Die darin eingearbeiteten Beiträge bedeutender Philosophen bewertet Hartmann vor dem Hintergrund der von ihm zuvor entfalteten Problemstrukturen. Dazu wird u. a. eingeschätzt, inwieweit und wie den Theorien die Aufhebung der Aporien gelungen ist, und auch, in welchem Maße dabei von rein spekulativer Metaphysik Gebrauch gemacht wird.

Wenn man dem Autor in seiner eindringlichen Sachanalyse nicht vorschnell die Gefolgschaft verweigert und nicht gleich an allen Passagen Anstoß nimmt, die aus enggefasster sprachkritischer Sicht (oder eigener standpunktlicher Voreingenommenheit) fragwürdig erscheinen, so bilden die Kapitel 5-10 (Exposition des metaphysischen Erkenntnisproblems) und der darauf bezogene Kapitelkomplex 11-22 (Diskussion historischer Lösungsversuche) ein durchaus stimmiges Ganzes. In seiner Sachbezogenheit und in dem erkennbar leidenschaftlichen Bemühen um wissenschaftliche Klärung (und in den folgenden drei Teilen auch Lösung) des Erkenntnisproblems steht Hartmanns Werk in der philosophischen Literatur seiner Zeit einzigartig da. [2] In den Strömungen der philosophischen Moderne ist seine *Metaphysik der Erkenntnis* sang- und klanglos untergegangen. Die politisch orientierte Philosophie hatte und hat ganz andere Themen als ausgerechnet das Aporetische der Gegenständlichkeit; ähnliches gilt für hermeneutische Richtungen und den mehr oder weniger auftrumpfenden Obskurantismus in der Nachfolge der Phänomenologie. Der logische Positivismus und die an ihn anknüpfende ›analytische‹ Philosophie verweigern von ihren Standpunkten aus überhaupt die Anerkennung des metaphysischen Rätsels, das Hartmann in der Erkenntnisrelation aufgewiesen zu haben meinte. Dabei wäre es doch auch für einen Positivisten oder Logizisten kein sinnloses Unternehmen (gewesen), die Sachanalysen Hartmanns (ab Kapitel 5 der *Grundzüge*) einer behutsamen relationentheoretischen Formalisierung zu unterwerfen. Auf diese Weise würden nicht allein Fehler und redundante Beschreibungen erkannt und Hartmanns sprachliche Modellierung der Erkenntnisrelation auf das Wesentliche (und Erforderliche) beschränkt, es bestünde vermutlich auch die Chance, die formale Rekonstruktion bis an die Grenze dessen zu schieben, was Hartmann als metaphysischen Aspekt der Erkenntnis zur Geltung bringen wollte.

Es bleibe hier einmal dahingestellt, mit welchem Erfolg eine solche formalsprachliche Analyse der Erkenntnisrelation sich überhaupt durchführen lässt. Sie ist ohnehin kein Selbstzweck, und will man dem von Hartmann Vorgeleisteten auch nur halbwegs gerecht werden, so müssen wir

[2] E. Cassirers mehrbändige Darstellung des Erkenntnisproblems behandelt überwiegend seinen *geschichtlichen* Wandel in Philosophie und Wissenschaft. In L. Nelsons *Fortschritte und Rückschritte der Philosophie*, die erst 1962 von J. Kraft aus dem Nachlass herausgegeben wurden, wird das Problem der Erkenntnis – vor dem Hintergrund seiner historischen Entwicklung seit Hume – vor allem im Hinblick auf das Ziel erörtert, die Kantische Kritik in die von J. F. Fries vorgeschlagene *anthropologisch*e Theorie der Vernunft umzubilden. Last but not least ist die von E. Husserl großangelegte Phänomenologie zu nennen, die (in den Augen Hartmanns) vor allem einen *methodologischen* Beitrag zu einer wissenschaftlichen Philosophie der Erkenntnis geliefert hat. In *Grundzüge* heißt es auf S. 172: »Eine Lösung des Erkenntnisproblems darf von der Phänomenologie nicht erwartet werden, wohl aber die weitgehendste Klärung desselben.« Die hat freilich, wie er glaubt, nicht Husserl erbracht (in dessen von der Ausklammerung der Seinsthese geprägter Wesensschau »die transzendente Seite des Erkenntnisphänomens … nicht aufgehen« kann), sondern Hartmann selbst im ersten Teil der *Grundzüge*.

sie um gewisse phänomenologische Sondierungen erweitern. Nur so ist es möglich, sich der letztlich irrationalen Seite des Erkenntnisproblems zu nähern. Bei Hartmann heißt es dazu: »Die Transzendenz des Erkenntnisgegenstandes gehört mit zum Phänomen und muß mit ihm beschrieben werden.« [S. 77] Typisch ist dann wieder die ›verräumlichende‹ Sprechweise Hartmanns. So weist er dem »Seinscharakter« des Objekts, sofern dieses nicht dadurch beschränkt ist, Gegenstand in einem Erkenntnisakt zu sein, »in der verlängerten Richtung des Objekts, gleichsam *jenseits des Objizierten* oder ›hinter ihm‹« seinen virtuellen Platz an [S. 52].

Im Umkreis dieser »Fernstellung« zum Subjekt, in der sich Hartmann zufolge das dem Erkenntnisgegenstand anhaftende Ansichsein befindet, lassen sich weitere Phänomene ausmachen, die als Auswirkungen oder besser: als aspekthafte Ausprägungen der Transzendenz plausibilisiert werden können. Es sind dies *Zwangsläufigkeit* und *Unausschöpfbarkeit.*

Zwangsläufigkeit

In der natürlichen Einstellung steht der »Gegenstand der Erkenntnis unabhängig vom Subjekt und seinem ›Erfassen‹« da [S. 51]. Dabei wird das »Ansichsein des Gegenstandes« als solches nicht etwa erkannt, sondern lediglich vom Subjekt *gemeint.* Dieses Meinen kommt ausdrücklich erst in der Reflexion zum Vorschein, denn nur in ihr manifestiert sich der Unterschied zwischen dem Objekt und dem Vorstellungsbild, welches das Objekt im Bewusstsein vertritt (repräsentiert). Insofern der Akt des Sehens für sich selbst sichtbar wird, d. h. das erkennende Subjekt sein eigenes Erkennen zum Gegenstand macht, gelangt es zu der Überzeugung, dass der Inhalt seiner Vorstellungen nicht in ihm ›liegt‹ oder gar ›hervorgebracht‹ wird. Idealistische (und heutige konstruktivistische) Theorien haben enorme Mühen darauf verwendet, diese Überzeugung der natürlichen Einstellung zu widerlegen. Sie müssen dann erklären, wie es dem Subjekt[3] gelingen kann, erkenntnisunabhängiges Ansichsein so in sich herzustellen, dass es selbst nicht nur nichts davon bemerkt, sondern auch nicht beobachtet,

[3] Dieses kann nur ein einziges ›transzendentales Subjekt‹ sein. Ein welterzeugendes Subjekt ist schwerlich empirisch, d. h. als eine individuelle Instanz der Erkenntnis denkbar. Es müsste sonst ja erklärt werden, wie die vielen Einzelsubjekte identische oder zumindest kompatible Gegenstandswelten hervorbringen.

wie es sich das unbewusste Produkt, das es für real hält, als nicht von ihm selbst produziertes unterschiebt.

Hartmann hat Ansätze dieser Art als »Hypostasierung des ›Subjekts überhaupt‹« bezeichnet und die in den Systemen von Fichte, Schelling und Hegel angebotenen ›Lösungen‹ als »metaphysischen Schein« zurückgewiesen [vgl. *Grundzüge*, S. 156-161]. Tatsächlich ist die Subjekt-Hypostasierung theoretisch denn auch niemals eingelöst worden, und noch weniger lässt sie sich praktisch durchhalten. Nach G. Schulte wurzelt die mit ihr verbundene Außenweltskepsis in nichts anderem als »verkappter Todesskepsis – aus Todesangst«[4]. Denn ist erst einmal das reale Sein im Subjekt aufgehoben, so wird damit auch der Tod (als dem transzendentalen Ich zugehöriges Faktum) irrealisiert.

Dass Ansichsein eine (nur) gemeinte Seite des Objektseins ist, gehört noch ganz zum *Phänomen* der Erkenntnis. Ob diese Seite auch »das Gewicht ontologischen Ansichseins hat, darüber kann erst die Ontologie selbst schlüssig werden« [S. 58]. Hartmann wertet aber zumindest schon die Tendenz der Erkenntnis, ihr Bild vom Gegenstand fortschreitend an dessen »vollen Gehalt« anzunähern, als ein auf die ontologische Sphäre verweisendes Indiz. Dafür spricht auch der folgende Umstand: Das Subjekt kann zwar seine Erkenntnis schrittweise erweitern und dabei seine Irrtümer korrigieren; hingegen kann es das Bild des Gegenstands nicht insgeheim (und für sich selbst unsichtbar und unbemerkt, aber gleichwohl) willkürlich in ein anderes abändern, das ebenfalls ein Ansichseiendes meint. Dieser Tatbestand der Erkenntnisrelation stellt gegenüber der Unabhängigkeit, die das Subjekt dem Gegenstand zuschreibt, eine gewisse Steigerung dar, in der zum Ausdruck kommt, dass der Gegenstand hinsichtlich seiner Beschaffenheit und seines Verhaltens nun einmal so ist wie er ist. Das Reale bringt immer einen Verlust von Freiheitsgraden mit sich und damit ein Mindestmaß von Zwangsläufigkeit; diese beschränkt die Einbildungskraft, die im Subjekt am Zustandekommen seiner Vorstellung mitwirkt. Im eigenen Tod, von dem schon die Rede war, erreicht der Verlust an Freiheitsgraden seine extreme Grenze, die zugleich eine Grenze aller Vorstellungsakte darstellt.

[4] Vgl. G. Schulte: Tarte à la crème – bis der Tod uns scheidet, *Fichte-Studien* (Transzendentale Logik) Bd. 15 (1999), 83-104.

Den Gegenpol finden wir in den Künsten, die auf dem freien Spiel der Fantasie beruhen. In zwanglos ausgedachten Geschichten, in Märchen und in Zeichentrickfilmen kann sich die Einbildungskraft ungehemmt ausleben und unmögliche Ereignisse fingieren, welche die Naturgesetze verletzen und vielleicht sogar die Grundsätze der Logik. Je mehr freilich umgekehrt eine Vorstellungswelt von Gesetzen bestimmt scheint, desto eher vermittelt sie auch den Eindruck von Realität. Ein streng nach Regeln ablaufendes Geschehen wie etwa das Schachspiel ›erzeugt‹ bereits Sachverhalte, welche die Teilnehmer als Tatsachen ansehen müssen. Steht etwa nach einem gegnerischen Zug der eigene König im Schach, so kann ich das nicht leugnen oder dadurch abändern, dass ich den König um ein paar Zentimeter über seinem Platz anhebe. Das entspräche keiner bekannten Schachregel und widerspräche praktisch der zwischen den Spielern stillschweigend angenommenen Anerkenntnis der Spielregeln. Gemeinschaftlich vereinbarte Regeln schaffen ja geradezu durch die sich daran knüpfende Zwangsläufigkeit ein Feld der Realität.

Durchaus ähnlich, wenngleich erheblich verwickelter liegen die Verhältnisse in der Mathematik. Wenn ich etwa auf der Behauptung bestehe, die Gleichung $x^2+1 = 0$ habe eine Lösung, so lässt sich die Gegenständlichkeit des neu geschaffenen Objekts i nur dadurch gewährleisten, dass ich einen gewissen Dingbereich aufweise, dem es angehört und dem durch Regeln (und dem mit ihrer Anerkennung verbundenen Zwang) Realitätscharakter aufgeprägt wird. Immerhin sind es in diesem Fall noch die Regeln (Axiome) eines algebraischen Körpers, die erhalten bleiben, wenn die reellen Zahlen um die »imaginäre Einheit« i (und sämtliche damit bildbaren komplexen Zahlen $a + bi$) erweitert wird. Die Ordnungsgesetze, die für reelle Zahlen gelten, lassen sich dabei nicht aufrechterhalten.

Es wird an diesem Beispiel bereits deutlich, inwiefern die vermeintliche Idealität mathematischer Objekte deren Gegenständlichkeit keineswegs ausschließt. Die Grenze dieser Idealität wird durch die Gesetze der Logik markiert. Würde man z. B. eine zahlenartige Entität als Lösung der Gleichung $0 \cdot x = 1$ stipulieren, so wäre das bei Aufrechterhaltung der Grundrechenregeln nur möglich, wenn zugleich $0 = 1$ anerkannt würde und damit 0 überhaupt als einzige ›Zahl‹ übrigbliebe. Sofern man mit eindeutigem Ergebnis durch 0 dividieren können möchte, gelten die Gesetze der Algebra nur im Nullring $\{0\}$, dessen Eins und Null identisch sind. – Wir sehen: Gewisse (definitorische und axiomatische) Regeln werden vereinbart, alle übrigen Gesetze jedoch sind dann (als deren logische Folgerungen) zwangsläufig.

In der physischen Welt ist der Charakter der Zwangsläufigkeit nicht weniger ausgeprägt; er liegt dort in den Naturgesetzen, die anders als die Gesetze der Mathematik praktisch überhaupt keinen Spielraum für Vereinbarungen lassen. Der radikale Idealist Fichte erblickte in dem so gegebenen faktischen Sein in erster Linie eine durch die Despotie des Kausalnexus beherrschte Dingwelt, ein Reich der Unfreiheit, der Notwendigkeit und des Todes. Die materiellen Objekte sind in der Tat häufig mehr oder weniger undurchsichtig, undurchdringlich oder widerständig in dem Sinn, dass bloßes Denken und auch philosophisches Reflektieren so gut wie nichts an ihnen durchschaut, geschweige denn ausrichtet. Schließlich sind es auch Prozesse dieser Körperwelt, die meinen eigenen, darin eingebetteten Körper verletzen und mein Leben (samt Bewusstsein) beenden können. Fichte hat sich mit seiner ›Wissenschaftslehre‹, die er als Freiheitslehre verstanden haben wollte, vehement dagegen aufgelehnt. Solche Weltfremdheit, mehr noch: solches Leiden an (und künstliches Getrenntsein von) der Realität ist natürlich allererst ein Produkt potenzierter Reflexion und Hypostasierung des Bewusstseins. Bei Novalis, der sich an Fichte orientiert hat, mündet es in eine romantische Sehnsuchtshaltung, wie sie in seinen berühmten Versen »Wenn nicht mehr Zahlen und Figuren / Sind Schlüssel aller Kreaturen … « zum Ausdruck kommt.[5] Novalis sah aber nicht nur in der Poesie den Gegenpol zum »verkehrten Wesen« der hyletischen Außenwelt, sondern auch in der Mathematik, die er gerne mit Poesie und Magie vergleicht, weil er ihren Spielraum für freie Setzungen bei weitem überschätzt hat. In völliger Verkennung der Sachlage vermutete er sogar, es sei »die höchste Aufgabe der höheren Logik …, den Satz des Widerspruchs zu vernichten«.

[5] Vgl. dazu A. Schreiber, *Die Leier des Pythagoras*, Wiesbaden 2010, 241-243, sowie ders., ›Das verkehrte Wesen‹, in: *Die enttäuschte Erkenntnis*, Leipzig 2013, 102-106.

Unausschöpfbarkeit

Die Geschichte der Erkenntnis lehrt uns immer wieder die eine Erfahrung: Kein Gegenstand und erst recht kein größerer Realitätsbereich wird jemals vollständig durch Vorstellungsbilder erfasst (repräsentiert). Das erkennende Subjekt selbst bemerkt die Inadäquatheit seiner Bilder. Diese verlieren dann ihren statischen Charakter und werden vom Subjekt als Glied einer Kette »fortschreitender Annäherung an den vollen Inhalt des Gegenstandes« gesehen [*Grundzüge*, S. 55]. Es verschiebt sich nach Hartmann aber nicht nur die »Grenze der Objektion«, sondern auch der »Begriff des Gegenstandes« selbst [S. 59]:

> Als ›objectum‹ ist er durch die jeweilige Grenze der Objektion ein Endliches; als seiende Sache ist er offenbar ein *Unendliches*; denn das perennierende Hinausgehen der Erkenntnis über ihre Grenze ist nicht planlose Extravaganz, sondern bestimmt gerichtete Ponderanz auf ein ihr heterogenes, unbekanntes, gegen sie indifferentes Wesen zu, welches genügend unerschöpflich ist, um das schrittweise Fortrücken des vorgreifenden Problembewußtseins und des nachrückenden positiven Erkenntnisprogresses in infinitum im Gange zu halten.

Solche Unausschöpfbarkeit trifft man in allen Feldern der Erkenntnis an: in der alltäglichen Sinneswahrnehmung, in den Vorstellungsbildern (Modellen, Theorien) der Wissenschaft (zumal der empirischen), und sogar im Gebiet der Mathematik, wo der Laie vielleicht am wenigsten eine Krise des Gegenstandsbegriffs vermutet.

Die Wahrnehmungsbilder von Objekten der ›Außenwelt‹ weisen in vielen Fällen eine gewisse Formkonstanz auf, so dass ein Tisch als ein und derselbe auch dann wahrgenommen wird, wenn die Farbschattierungen auf seiner Oberfläche je nach Beleuchtung changieren oder sich der Winkel ändert, unter dem er auf der Netzhaut des Beobachters abgebildet wird. Einen künstlerischen Reflex dieser Alltagserfahrung stellen die berühmten Bilderserien Claude Monets dar, z. B. die Studien eines Heuschobers unter den Lichtverhältnissen verschiedener Tageszeiten. Körperhafte, ausgedehnte Objekte, seien es nun Tische, Heuschober oder Wolken, liefern dem Betrachter eine potentiell unbeschränkte Mannigfaltigkeit von Gegenstandsfacetten. Das Bewusstsein davon, dass eine Facette eben immer nur eine partiale Erkenntnis vermittelt, »wirkt als *Spannungsmoment* auf die Erkenntnisrelation zurück«. »Das unbegrenzt Intendierte läßt dem begrenzt Erfaßten keine Ruhe und treibt das Erfassen rastlos über sich hinaus« [*Grundzüge*, S. 55]. Es kann daher kaum verwundern, dass die Kunst sich von der flüchtigen und facettierten Erscheinungswelt zunehmend distanziert und schließlich ganz verabschiedet hat, um auf dem Weg der Abstraktion zum vermeintlich ›Wesentlichen‹ vorzustoßen.

Und die Wissenschaft? Schon in den antiken Anfängen einer noch gänzlich spekulativen Atomistik zeigt sich der Versuch, die schillernd bunte Vielfalt der Erscheinungswelt auf einfachere Elemente zurückzuführen. Eine darin bloß gedanklich angedeutete allgemeine Theorie der Materie brauchte allerdings noch Jahrhunderte, um auf halbwegs verlässlichen Erfahrungsgrundlagen entwickelt werden zu können.[6] Die physikalische Forschung des 20. Jahrhunderts wies dann nicht nur nach, dass Atome anders als erwartet teilbar sind und ihrerseits aus (um Größenordnungen kleineren) Elementarteilchen aufgebaut sind; es trat auch eine paradoxe Doppelheit ihres Vorstellungsbildes als Partikel *und* Welle ineins hervor (und abhängig von dem sie objektivierenden Messvorgang). Im Lauf der Zeit hat sich die Liste der Bausteine der Materie nach und nach beträchtlich verlängert. Das sog. Standardmodell umfasst zu Beginn des 21. Jahrhunderts allein 6 Typen von Leptonen (wozu Elektron und Neutrino gehören), 6 Typen von Quarks (aus denen z. B. Protonen aufgebaut sind), 4 Typen so genannter Eichbosonen (darunter das ausdehnungs- und masselose Photon) sowie das Higgs-Boson.

Wir sehen: Auf jeder Stufe der Naturerkenntnis treten neue Fragen auf, deren Auflösung nicht mit Sicherheit vorherzusagen ist. So geht etwa die Quantenelektrodynamik von einem punktförmigen Elektron aus, das keine innere Struktur besitzt, was jedoch bei sehr kleinen Distanzen zu quantitativen Unstimmigkeiten (wie einer unendlich großen elektrischen Feldstärke) führt. Hat das Elektron hingegen einen (extrem kleinen, aber immer noch) positiven Radius, so ist es zumindest denkbar, irgendwann in ihm auch eine Substruktur experimentell nachzuweisen.

[6] Vgl. dazu K. Lasswitz' umfassende *Geschichte der Atomistik vom Mittelalter bis Newton* in zwei Bänden; Verlag von Leopold Voss: Hamburg und Leipzig 1890.

Zu guter Letzt soll der Charakter der Unausschöpfbarkeit auch auf mathematischem Gebiet verdeutlicht werden. Auf unterster Stufe begegnen wir ihm schon beim einzelnen Objekt. Das bei allen Kreisen identische Verhältnis π von Umfang zu Durchmesser ist dafür ein einfaches Beispiel. Als numerisches Datum kommt π nur Ziffer für Ziffer in einem prinzipiell unabschließbaren Prozess zum Vorschein. Als dessen Grenzwert stellt es eine Zahl dar, die keiner algebraischen Gleichung genügt. Immer wieder wurden und werden neue Eigenschaften von π und Zusammenhänge mit anderen Objekten der Mathematik entdeckt. Ähnliches gilt für bestimmte Objektklassen, z. B. die Eigenschaft einer natürlichen Zahl, prim zu sein. So einfach und elementar sie auch definierbar ist, bedeutet das keineswegs, dass auch nur annähernd so einfach die mit ihr verknüpften Sachverhalte zu entdecken sind. Schon die bloße Prüfung auf Primalität ist bekanntlich ein alles andere als triviales Problem. Die Verteilung der Primzahlen wirft noch schwierigere Fragen auf, etwa die bis heute unbewiesene Riemannsche Hypothese über die Nullstellen der ζ-Funktion.

D. Hilbert sah in der »Tieferlegung der Fundamente«, wie sie durch die von ihm angeregte formale Fassung der Axiomatik möglich wurde, das geeignete Mittel, die Bestimmungen mathematischer Objektbereiche festzulegen. Mit gewissen Axiomensystemen der Mengenlehre verband sich dabei die Hoffnung, sie könnten als formaler Rahmen für die gesamte bis dahin bekannte Mathematik dienen. Diese Idee ist gescheitert, weil sich das Feld der hier intendierten inhaltlich betriebenen (nicht-formalisierten) Mathematik in einem genau definierbaren Sinn als unausschöpfbar erwiesen hat.[7] Legt man eine axiomatische Theorie T zugrunde, die mindestens die Theorie der natürlichen Zahlen umfasst, und denkt man sich ferner alles logische Folgern darin durch einen effektiven Beweiskalkül (etwa die Prädikatenlogik erster Stufe) formalisiert, dann gilt: Ist T widerspruchsfrei, so ist T unvollständig, d. h. es gibt in T formulierbare Aussagen, die sich in T weder beweisen noch widerlegen lassen. Dieses berühmte, von K. Gödel 1931 veröffentlichte Theorem zeigt: Ein effektiv formalisiertes System kann grundsätzlich *nicht alle* Aussagen ›einfangen‹ (reproduzieren), die sich durch in-

[7] Man vgl. dazu die hervorragend klare Darstellung von T. Franzén, *Inexhaustibility*, Lecture Notes in Logik 16, A. K. Peters, Ltd.: Wellesley, Mass. 2004.

haltliches mathematisches Denken in dem betreffenden Objektbereich gewinnen lassen.

Ein drastisches und nicht-triviales Beispiel einer solchen unentscheidbaren Aussage ist die im Bereich der Mengenlehre angesiedelte Kontinuumshypothese (CH). Diese schon 1878 von G. Cantor aufgestellte Vermutung besagt: Ist M eine unendliche Menge reeller Zahlen, so ist M entweder gleichmächtig zu $\mathbb{R}$ oder gleichmächtig zu $\mathbb{N}$. Gödel konnte 1938 zeigen, dass sich CH in der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre (mit Auswahlaxiom) nicht widerlegen lässt. Dass CH in diesem System auch nicht bewiesen werden kann, ist ein noch weitaus erstaunlicheres Resultat von P. Cohen (1963/64). Beides zusammen genommen bedeutet: Was wir über Mengen ›intuitiv‹ zu wissen glauben und in Form von Axiomen voraussetzen, reicht insgesamt nicht aus, über die Gültigkeit der doch plausibel scheinenden Kontinuumshypothese zu entscheiden. Man könnte mit demselben Recht auch sagen, deren (von Cantor schon unterstellte) Plausibilität habe sich letztlich als bloßer Schein erwiesen. Offensichtlich ist der Begriff der Menge noch nicht soweit ausgeschöpft (in Axiome gefasst), dass wir erkennen können, ob die Kontinuumshypothese gilt oder nicht.

Eine Bemerkung über abgeschlossene Wortmengen[1]

1. Problemstellung

Sei $\mathfrak{M}$ eine Menge von Wörtern und W ein Operator, der Wortmengen wieder Wortmengen zuordnet. In einigen Fällen entstehen bei der durch W definierten Wortmengenbildung neue, d. h. nicht schon in $\mathfrak{M}$ enthaltene Wörter, so etwa bei der Kleeneschen Sternoperation (vgl. Maurer 1969, S. 14). Daher liegt die Frage nahe, ob es Wortmengen $\mathfrak{M}$ gibt, bei denen die Anwendung von W keine neuen Wörter mehr liefert. Dazu definieren wir: $\mathfrak{M}$ *heiße abgeschlossen unter* W, falls $W(\mathfrak{M}) \subseteq \mathfrak{M}$ gilt.

[1] In: *Grundlagenstudien aus Kybernetik und Geisteswissenschaft* 16/2 (1975), 61-63.

Im Folgenden soll gezeigt werden, dass von einem festen (nichtleeren) Alphabet ausgehend durch wiederholtes Anwenden von W sowie beliebige Vereinigungsbildung genau eine unter W abgeschlossene Wortmenge erzeugt wird, wenn W derjenige Operator ist, der einer Wortmenge $\mathfrak{M}$ die Menge aller Wörter über $\mathfrak{M}$ zuordnet. Diese Tatsache sowie ein abschließend zu skizzierender Vergleich mit erkenntnistheoretischen Überlegungen begründen ein gewisses Interesse für den hier definierten Begriff der Abgeschlossenheit.

2. Die unter V abgeschlossene Wortmenge

Für eine beliebige nichtleere Menge $\mathfrak{M}$ bezeichne $V(\mathfrak{M})$ die Vereinigung aller cartesischen Produkte $\mathfrak{M}^n$, $n < \omega$; dabei ist ω die Menge der natürlichen Zahlen im Sinne der von Neumannschen Definition (vgl. etwa Schmidt 1969, S. 165). Ist $\mathfrak{A}$ ein Alphabet, so bildet $V(\mathfrak{A})$ die Menge aller Wörter über $\mathfrak{A}$. Zu gegebenem Alphabet definieren wir durch iterierte Anwendung von V und Limesübergänge eine Folge von Wortmengen rekursiv über dem Bereich der Ordinalzahlen:

$$V^\alpha(\mathfrak{A}) = \begin{cases} \mathfrak{A}, & \text{falls } \alpha = 0, \\ V^\beta(\mathfrak{A}) \cup V(V^\beta(\mathfrak{A})), & \text{falls } \alpha = \beta + 1, \\ \bigcup_{\beta<\alpha} V^\beta(\mathfrak{A}), & \text{falls } \alpha \text{ Limeszahl.} \end{cases}$$

Jedes $V^\alpha(\mathfrak{A})$ heiße *Worthierarchie über* $\mathfrak{A}$. Es gilt $V^\alpha(\mathfrak{A}) \subseteq V^\beta(\mathfrak{A})$ für $\alpha \leq \beta$, was man sofort mittels transfiniter Induktion nach β verifiziert. Unter dem *Rang* $\mathrm{rg}(\mathfrak{z})$ eines Wortes $\mathfrak{z}$ (aus einer Worthierarchie über $\mathfrak{A}$) verstehen wir die kleinste Ordinalzahl α mit $\mathfrak{z} \in V^\alpha(\mathfrak{A})$. Für die nachfolgenden Überlegungen werde vorausgesetzt, dass $\mathfrak{A}$ nichtleer ist und kein Element aus einer Wortmenge $V(V^\alpha(\mathfrak{A}))$ mit $\alpha < \omega$ enthält. $\mathfrak{A}$ heiße dann *normal.* Offensichtlich stellt die Normalität des Alphabets keine wesentliche Einschränkung dar. – Das eingangs angedeutete Ergebnis enthält in präzisierter Form der folgende

Satz. *Sei $\mathfrak{A}$ ein normales (nichtleeres) Alphabet. Das System $V^\omega(\mathfrak{A})$ ist dann die einzige (unter V) abgeschlossene Worthierarchie über $\mathfrak{A}$.*

Beweis: Die Behauptung ergibt sich aus den drei folgenden Aussagen:

(1) Für jedes $n < \omega$ ist $V^n(\mathfrak{A})$ nicht abgeschlossen.

(2) $V^\omega(\mathfrak{A})$ ist abgeschlossen.

(3) Für jede Ordinalzahl $\alpha \geq \omega$ gilt: $V^\alpha(\mathfrak{A}) = V^\omega(\mathfrak{A})$.

Beweis zu (1) durch vollständige Induktion: Für $n = 0$ ist (1) klar, da $V(\mathfrak{A})$ wegen der Normalität von $\mathfrak{A}$ nicht Teilmenge von $\mathfrak{A}$ sein kann. Sei nun $V^n(\mathfrak{A})$ nicht abgeschlossen für festes $n \geq 0$. Dann gibt es ein $\mathfrak{z} \in V(V^n(\mathfrak{A}))\setminus V^n(\mathfrak{A})$. Zu solchem $\mathfrak{z}$ werde $\mathfrak{z}^* : 1 \to V^{n+1}(\mathfrak{A})$ definiert durch $\mathfrak{z}^*(0) = \mathfrak{z}$. Für den Nachweis der Nicht-Abgeschlossenheit von $V^{n+1}(\mathfrak{A})$ zeigen wir $\mathfrak{z}^* \in V(V^{n+1}(\mathfrak{A})) \setminus V^{n+1}(\mathfrak{A})$. Nach Konstruktion gilt $\mathfrak{z}^* \in V(V^{n+1}(\mathfrak{A}))$. Ferner ist $\mathfrak{z}^*$ vom Rang $n+2$. Denn einerseits ist $\mathrm{rg}(\mathfrak{z}^*) \leq n+2$ wegen $\mathfrak{z}^* \in V^{n+2}(\mathfrak{A})$; andererseits liefert die Annahme $\mathrm{rg}(\mathfrak{z}^*) = r < n+2$ im Falle $r = 0$ einen Widerspruch zur Normalität von $\mathfrak{A}$ und im Falle $r > 0$ entweder $\mathfrak{z}^* \in V^{r-1}(\mathfrak{A})$ und damit einen Widerspruch zur Minimalität von $r = \mathrm{rg}(\mathfrak{z}^*)$ oder $\mathfrak{z}^* \in V(V^{r-1}(\mathfrak{A}))$, also $\mathfrak{z} \in V^{r-1}(\mathfrak{A})$ und wegen $V^{r-1}(\mathfrak{A}) \subseteq V^n(\mathfrak{A})$ einen Widerspruch zur Wahl von $\mathfrak{z}$. Aus $\mathrm{rg}(\mathfrak{z}^*) = n+2$ folgt aber $\mathfrak{z}^* \notin V^{n+1}(\mathfrak{A})$. Demnach ist auch $V^{n+1}(\mathfrak{A})$ nicht abgeschlossen.

Zu (2): Sei $\mathfrak{z} \in V(V^\omega(\mathfrak{A}))$ beliebig gewählt. Das Wort $\mathfrak{z}$ ist von der Form $\mathfrak{z} : n \to V^\omega(\mathfrak{A})$ mit $n < \omega$. Da ω Limeszahl ist, gilt $\mathfrak{z}(j) \in V^{s_j}(\mathfrak{A})$ für zu $j < n$ passend gewähltem $s_j < \omega$. Für $m := \max_{j<n}(s_j)$ hat man dann $\mathfrak{z}(j) \in V^m(\mathfrak{A})$, $j < n$, also $\mathfrak{z} \in V^{m+1}(\mathfrak{A})$ und damit $\mathfrak{z} \in V^\omega(\mathfrak{A})$.

Beweis zu (3) durch transfinite Induktion: Für $\alpha = \omega$ ist nichts zu zeigen. (3) gelte nun für β mit $\omega \leq \beta < \beta+1 = \alpha$. Dann folgt aus der Induktionsannahme $V^\alpha(\mathfrak{A}) = V^\beta(\mathfrak{A}) \cup V(V^\beta(\mathfrak{A})) = V^\omega(\mathfrak{A}) \cup V(V^\omega(\mathfrak{A})) = V^\omega(\mathfrak{A})$ wegen $V(V^\omega(\mathfrak{A})) \subseteq V^\omega(\mathfrak{A})$ (aufgrund von (2)). Schließlich sei $\alpha \geq \omega$ eine Limeszahl derart, dass (3) für alle β mit $\omega \leq \beta < \alpha$ gilt. Auch damit ergibt sich sofort

$$V^\alpha(\mathfrak{A}) = \bigcup_{\gamma<\alpha} V^\gamma(\mathfrak{A}) = \bigcup_{\gamma<\omega} V^\gamma(\mathfrak{A}) \cup \bigcup_{\omega\leq\gamma<\alpha} V^\gamma(\mathfrak{A}) = V^\omega(\mathfrak{A}),$$

was zu beweisen war.

3. Eine noch präzisionsbedürftige inhaltliche Deutung

Wir stellen uns unter $\mathfrak{A}$ einen bestimmten Bereich von Gegenständen vor und interpretieren die Abbildungen aus $V(\mathfrak{A})$ als ›Reflexionen‹ auf die Individuen aus $\mathfrak{A}$. Bei dieser Auffassung repräsentiert $V^{\omega}(\mathfrak{A})$ dann eine Art ›Sphäre aller Reflexionen‹. Bemerkenswert ist dabei neben der Abzählbarkeit dieses Systems die Tatsache, dass seine Abgeschlossenheit gegenüber erneuten ›Reflexionen‹ auf der Basis des soeben bewiesenen Satzes präzisiert werden kann. Für die angedeutete Interpretation dürfte von Interesse sein, was bei O. Becker 1964 im Zusammenhang mit der Husserlschen Phänomenologie über die iterative Schachtelung von Reflexionsakten ausgeführt wird. Auch Becker meint, dass der Bezugnahme auf eine »unbegrenzte Reihe von reflexiven Akten« als ganzer ein Limesübergang im Bereich der Ordinalzahlen entsprechen müsse (vgl. ibid. S. 386 f.). Allerdings gehört bei Becker zu diesem Limesübergang keine Supremumsbildung (wie hier), sondern eine unscharf beschriebene »perspektivische« Reflexion, durch deren Anwendung noch weitere Stufen vom Index $\omega + 1$ usw. erzeugbar sein sollen.

Literatur

1. Becker, O.: *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung*. Freiburg und München 1964
2. Maurer, H.: *Theoretische Grundlagen der Programmiersprachen. Theorie der Syntax*. BI, Mannheim 1969
3. Schmidt, J.: *Mengenlehre I*. BI, Mannheim 1966

Was ist unter Idealisierung zu verstehen?[1]

Die Frage zielt auf das logische Verständnis eines Vorgangs, der eine bedeutsame Rolle bei Begriffsbildungen der Mathematik und der Physik, wie überhaupt bei der Ausprägung wirklichkeitsbezogener Modellvorstellungen spielt. Gemeint sind Idealisierungsprozesse, von denen im Folgenden ein möglichst adäquates Bild zu gewinnen ist. Dabei beschränke ich mich auf die Diskussion einiger Beispiele sowie einen eigenen Vorschlag, sich dem Problem durch eine begriffliche Rekonstruktion anzunähern. Bei dieser Annäherung halfen etliche (hier nicht im einzelnen zu kennzeichnende) Einsichten, die das Studium von Autoren wie Hilbert, Weyl und Mach sowie Hugo Dingler und Paul Lorenzen zutage förderte.

Idealisierungen sind vor allem von der Physik her bekannt. Dort bildet die durch sie geleistete zum Teil starke Vereinfachung ein unentbehrliches Mittel zum Erfassen der Realität. Auf Idealisierungen beruhen z. B. die Vergleiche physikalischer Größen, also etwa die Begriffe ›gleich schwer wie‹ oder ›schwerer als‹. Geläufigere Beispiele sind Begriffe wie ›Massenpunkt‹, ›Geschwindigkeit‹ oder ›ideales Gas‹. Am Begriff des idealen Gases möchte ich einige typische Wesenszüge des Idealisierens herausstellen. In Physikbüchern findet man gelegentlich erläutert, ein ideales Gas sei ein solches, das die Gay-Lussacsche Zustandsgleichung erfüllt. Tatsächlich gibt es aber kein derartiges Gas, die Gay-Lussacsche Gleichung widerspricht, streng genommen, der Erfahrung. Warum ist sie dann aber für den Physiker, dem es ja um Wirklichkeitserkenntnis geht, überhaupt von Interesse? Was ihn zur (vorläufigen) Annahme der besagten Gleichung motiviert, ist der Umstand, dass eine Reihe realer Gase sie mehr oder weniger gut, d. h. approximativ erfüllt. Dabei kommt es im Folgenden zu einem charakteristischen Umbau des Systems akzeptierter einschlägiger Aussagen. Einerseits wird ihm das neue Gesetz einverleibt; andererseits begegnet man seiner dadurch entstandenen Inkonsistenz, indem man sich gerade jene Tatsachen zumindest hypothetisch ausgeklammert denkt, die als Gründe für diese Widersprüchlichkeit in Frage kommen. Spätere Forschung stellt sich dann die Aufgabe, diese oft *a priori* gar nicht ausdrücklich bekannten Gründe zu konkretisieren (im Beispiel: van der Waals). – Im einzelnen lassen sich demnach drei

[1] In: *Beiträge zum Mathematikunterricht* 1977, Schroedel: Hannover, 1977, 230-233.

Gesichtspunkte festhalten, die bei Idealisierungen eine Rolle spielen:

1. Erweiterung eines ursprünglichen Systems akzeptierter Aussagen durch Hinzufügen einer ›Erfüllungsnorm‹
2. Ausklammerung konsistenzstörender Systemteile
3. approximative Erfüllung der ›Norm‹ im alten System.

Ich möchte nun an drei weiteren Beispielen aufzeigen, dass diese (hier absichtlich noch nicht sehr präzise gefassten) Aspekte auch für gewisse mathematische Begriffsbildungen von Bedeutung sein können.

1. Wir betrachten eine Gleichung wie $x^2 = 5$ im Bereich $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen. Sie besitzt dort keine Lösung, d. h. wir können keine Konstante a einführen und $a^2 = 5$ dem System der in $\mathbb{Q}$ gültigen Aussagen hinzufügen, ohne einen Widerspruch zu erzeugen. Das ist indessen wohl möglich, wenn man zuvor dieses System in geeigneter Weise ›ausdünnt‹ und etwa nur noch diejenigen Aussagen stehenlässt, die aufgrund der Körpereigenschaft von $\mathbb{Q}$ wahr sind. Bekanntlich läuft dies auf die formale Adjunktion von a hinaus. Schließlich liegt auch die Approximationseigenschaft auf der Hand: $a^2 = 5$ ist ja in $\mathbb{Q}$ insofern approximativ erfüllt, als man zu jedem $n > 0$ einen Bruch a_n mit $|a_n^2 - 5| < 10^{-n}$ finden kann. *Praktische* Bedeutung hat das Verfahren allein hierdurch. Gleichwohl können solche Erweiterungsprozesse in der Mathematik auch von großem theoretischen Wert sein, ohne dass die idealisierenden Zusatzannahmen in einem auf der Hand liegenden Sinn approximativ erfüllt werden.

Standardbeispiele wären etwa die (die obige Methode verallgemeinernde) Konstruktion eines Zerfällungskörpers zu vorgegebener algebraischer Gleichung, die Kompaktifizierung geeigneter topologischer Räume oder die von Hilbert propagierte Auffassung der klassischen Mathematik als das um sog. ideale Aussagen erweiterte Feld des konstruktiv Beweisbaren. Übrigens betrachtet Hilbert auch derartige Fälle als ein Idealisieren. Ich möchte daher bei Erfülltsein von (1) und (2), nicht aber notwendig auch (3) von Idealisierungen i. w. S. sprechen.

2. Das nächste Beispiel betrifft die in Disputen älteren Datums schon einmal aufgetauchte Auffassung, wonach Wahrscheinlichkeiten eine Art idealisierter Häufigkeiten sind. Ohne hier auf die Probleme des Wahrscheinlichkeitsbegriffs näher einzugehen, möchte ich nur andeuten, wie eine solche These unter den drei genannten Aspekten des Idealisierens betrachtet werden könnte. – Dazu denken wir uns eine Versuchsanordnung mit höchstens abzählbar vielen Resultaten $A_1, A_2, A_3, \ldots$ gegeben. Gewöhnlich wird man in der Praxis die Wahrscheinlichkeiten der A_i, durch ihre relativen Häufigkeiten schätzen, d. h. man arbeitet mit Abbildungen h, die jedem aus den A_i gebildeten Ereignis dessen relative Häufigkeit in einer gewissen hinreichend langen Versuchsserie zuordnen. Diese Häufigkeitsabbildungen lassen sich als diejenigen Funktionen h auf der zugehörigen Ereignisalgebra charakterisieren, die den Axiomen von Kolmogoroff genügen und für die eine natürliche Zahl n existiert, so dass $n \cdot h(A_i)$ eine ganze Zahl ist. Worin besteht nun die fragliche Idealisierung des Häufigkeitsbegriffs? Den Angelpunkt bildet die Forderung, dass die zugeordneten Zahlenwerte unabhängig von einer bestimmten Versuchsserie sein sollen. Dem widerstreitet aber die zuletzt genannte Zusatzbedingung für Häufigkeitsabbildungen, die sich auf einen als Versuchslänge zu interpretierenden Parameter n bezieht. Indem man von dieser Bedingung absieht, erhält man die gewohnte axiomatische Kennzeichnung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs. Was schließlich das approximative Erfülltsein der genannten Forderung anbelangt, so gibt es dazu zwei Standpunkte:

a) Man beruft sich auf die Erfahrungstatsache, dass zwei verschiedene hinreichend lange Versuchsreihen angenähert dieselben Häufigkeitswerte liefern. Diese Begründung macht zugleich plausibel, weshalb man überhaupt jene Forderung der Unabhängigkeit aufstellen möchte.

b) Man erinnert an ein Gesetz der großen Zahl, etwa an das Bernoullische Theorem, wonach eine Abweichung der relativen Häufigkeit nach n Versuchen vom theoretischen Wahrscheinlichkeitswert um mindestens $\epsilon > 0$ eine Wahrscheinlichkeit $\leq 1/(\epsilon^2 n)$ besitzt. Ist demnach n groß, so wird die Abweichwahrscheinlichkeit klein. Allerdings benötigt man dabei noch das keineswegs selbstverständliche Prinzip von Cournot, wonach Ereignisse mit ›sehr kleinen‹ Wahrscheinlichkeiten praktisch auszuschließen seien. Auch hier führt das Argument vermutlich wieder zu einer Berufung auf empirisches Wissen.

Der skizzierte Vorgang ist sicherlich nicht der einzige in der Stochastik, der die Züge einer Idealisierung trägt. In ähnlicher Weise idealisierend sind die meisten Annahmen über Merkmalverteilungen in einer Grundgesamtheit, wie sie bei statistischen Untersuchungen zugrunde gelegt werden. Hingewiesen sei auch auf den neuerlichen Versuch Lorenzens, den Begriff der Laplaceschen Versuchsanordnung über Normen an die Herstellung von Zufallsgeneratoren ideativ einzuführen und auf dieser Basis das Bernoullische Theorem als Beweis (!) dafür zu werten, dass Wahrscheinlichkeiten idealisierte Häufigkeiten sind [Zur Definition von ›Wahrscheinlichkeit‹, in: P. Lorenzen, *Konstruktive Wissenschaftstheorie*, Frankfurt a. M. 1974, 209-218].

3. Mein drittes Beispiel ist die Geometrie. Hier ist es eine weithin akzeptierte Ansicht, dass es die geometrischen Dinge, von denen in den Axiomen die Rede ist, höchstens als ideale Gebilde gibt.

Oft denkt man sich aber etwa eine ideale Ebene durch Abstraktion aus einer Vielzahl realer, nur angenähert ebener Flächen entstanden. Man kann sich ja beispielsweise auch Zahlen durch Abstraktion aus Mengen entstanden denken. Hugo Dingler hat erkannt, dass es sich hier um zwei ganz unterschiedliche Prozesse handelt. Seit Frege wissen wir die Gleichzahligkeit von Mengen ohne Rückgriff auf den Zahlbegriff zu erklären. Damit gelingt die gewünschte abstraktive Bildung des Zahlbegriffs. Was wäre jedoch für reale Flächen die entsprechende Äquivalenzbeziehung, nach der abstrahiert werden soll? Eine solche Beziehung ist nicht bekannt und kann es Dingler zufolge auch gar nicht sein. Die geometrischen Begriffe sind nicht abstraktiv, sondern *ideativ* gebildet.

Diese Auffassung hat Lorenzen aufgegriffen und bis zu einem gewissen Grade mathematisch präzisiert. Ich werde den Grundgedanken im Rahmen meines Schemas von Idealisierung zu umreißen versuchen. Ausgangspunkt ist ein System von Aussagen, in denen zwar geometrische Wörter wie ›Ebene‹, ›Gerade‹ oder ›parallel‹ vorkommen, diese Wörter jedoch ausschließlich im Sinne physischer Formen gedeutet werden, z. B. anhand der Seiten, Kanten und Ecken eines Ziegelsteins. Dieses System macht man nun zu einer Geometrie, indem man es um Normen erweitert, die den Grundtermini ideale Eigenschaften vorschreiben. So verlangen Dingler und Lorenzen von einer Ebene E eine *innere Homogenität*: Was von einem Punkt P von E in Bezug auf E gilt, soll von jedem anderen Punkt P' von E in Bezug auf E gelten. – Eine entsprechende Forderung für die nicht mit E inzidierenden Punkte beschreibt die *äußere Homogenität*, durch die ebene von sphärischen Flächen unterschieden werden. Ähnliche Normen benötigt man für das Parallelsein und das Senkrechtstehen.

Um die Normen insgesamt geltend zu machen, müssen nun eventuell gewisse vorgeometrische ›Sachverhalte‹ preisgegeben werden, weil sie zu den idealen Anforderungen im Widerspruch stehen. Schließlich haben wir ein System, in dem die alten Sprachteile in einem neuen Sinn verwendet werden. Dabei sind die hinzugekommenen Normen im alten System approximativ erfüllt – jedoch nicht in dem Sinn, dass ideale Verhältnisse mit beliebiger Genauigkeit durch reale anzunähern sind. Vielmehr heißt approximativ hier: Die Abweichungen realer Verhältnisse von den Normen der Idealisierung lassen sich unterhalb einer gewissen Schranke halten, die dem praktischen Zweck der betreffenden Norm angepasst ist [für Details siehe Lorenzen/Schwemmer, *Konstruktive Logik, Ethik und Wissenschaftstheorie*, Mannheim 1973].

Nach diesen Beispielen möchte ich den hinter ihnen stehenden Begriff der Idealisierung formal präziser fassen. Dabei kommen drei Aussagensysteme E, N, E' ins Spiel. E spielt die Rolle des mit einer ›Norm‹ N zu idealisierenden Bereichs, und es soll erklärt werden, wann E' als *Idealisierung von E bzgl. N* anzusehen ist (die zu E' und N gehörende Sprache möge die Sprache von E umfassen). Dazu dienen die drei eingangs genannten Kriterien in folgender Formulierung:

1. E' ist widerspruchsfrei.
2. Es gibt eine Teiltheorie Δ von E derart, dass E' und $\Delta \cup N$ äquivalent sind, d. h. dieselbe Folgerungsmenge besitzen.
3. N ist in E ›approximativ erfüllt‹.

Von diesen Bedingungen ist allein (3) noch vage gehalten. Wie die Beispiele zeigen, kann ›approximative Erfüllung‹ vielerlei bedeuten. Es ist daher sicher eine schwierige Aufgabe, eine für alle oder doch wenigstens viele wichtige Fälle brauchbare Explikation dieses Begriffs zu entwickeln. Durch einschlägige Untersuchungen wird das bestätigt [erwähnt sei hier nur E. Scheibe, The Approximative Explanation and the Development of Physics, in: Suppes (ed.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science IV*, Amsterdam 1973, 931-942]. Dass aber auch die unvollständige Präzisierung des Idealisierungsbegriffs schon Brauchbares leisten kann, möchte ich wenigstens kurz andeuten. – Zunächst auf metatheoretischem Felde: Ist N eine konsistente Norm, so lässt sich beweisen, dass stets auch eine maximale Idealisierung i. w. S. von E bzgl. N existiert. Wie man eine solche findet, ist damit allerdings nicht gezeigt und muss im Einzelfall untersucht werden. – Ein zweiter Punkt ist Hilberts Widerspruchfreiheitsdoktrin. H. Luckhardt hat sie wie folgt rekonstruiert [Über Hilberts reale und ideale Elemente, *Arch. math. Logik* 17 (1975), 61-70]: Die Widerspruchsfreiheit einer (klassischen) Theorie ist notwendig und hinreichend dafür, dass alle in ihr beweisbaren realen Aussagen gültig sind. Dabei sind reale Aussagen (im Hilbertschen Sinn) gerade die Aussagen der quantorfreien rekursiven Arithmetik. Der hier vorgeschlagene Begriff der Idealisierung erlaubt nun eine geeignete Verallgemeinerung des Realitätsbegriffs zu einem Konzept 2. Stufe, auf das bezogen die Luckhardtsche Rekonstruktion immer noch gültig bleibt. Hilberts Argumente in Fragen der Widerspruchsfreiheit erscheinen so von einer allgemeineren methodischen Warte aus als präzisierbar.

Soweit diese Andeutungen.

Schließlich sind auch *Einsichten für die Fachdidaktik* zu erwarten, sofern diese (unter anderem) mit der Analyse von allgemeineren sachlichen und methodischen Zusammenhängen befasst ist. Ich möchte dazu nur drei Punkte hervorheben:

1. Ein logisches Verständnis von ideativer Begriffsbildung erlaubt eine Abgrenzung gegenüber Abstraktionsprozessen. Idealisierungen und die Rolle, die sie im Erkenntnisgeschehen spielen, können deutlicher erfasst werden. Außer psychologischen Fragen bietet sich nun auch die Aufgabe an, die Funktion der Sprache bei ideativen Vorgängen zu untersuchen.

2. Idealisierungen sind naturwissenschaftlichem und mathematischem Denken gemeinsam. Das gilt vor allem für den Aspekt der Wirklichkeitserschließung. Hier spielt (3) eine Schlüsselrolle: Auf (3) beruht die praktische Anwendbarkeit von Idealisierungen; von (3) hängt auch der Sinn ab, in dem eine solche Anwendung ›praktisch‹ ist. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist dies ein anderer Sinn als in der Geometrie, ein Unterschied, der anhand des jeweiligen Begriffs von approximativer Erfüllung zu verdeutlichen ist. Aber auch ohne Approximation ist das Idealisieren i. w. S.

ein für viele Bereiche der Mathematik bedeutsames Verfahren, dessen syntaktisches Gerüst in (1) und (2) beschrieben wird.

3. Endlich ist noch an heuristische Gesichtspunkte zu denken. Ideative Begriffsbildungen geschehen ja nicht um ihrer selbst willen, sondern stets zur Lösung eines Problems. Das Aufstellen der jeweiligen Normen bildet dabei zumeist ein Zwischenstadium auf dem Weg zu einer Lösung. Darin drückt sich das Streben nach möglichst direkten und einfachen Lösungen aus. Die Hauptaufgabe, sie in einem widerspruchsfreien Rahmen geltend zu machen, darf man dabei als eine Art Schema für die dann noch möglichen Lösungsstrategien ansehen. Sie bestimmt z. B. weitgehend die Vorgehensweise bei der formalen Adjunktion in der Algebra. Auch im früheren physikalischen Beispiel wird durch sie das Nachdenken gerade auf die konsistenzstörenden Ursachen gelenkt, was dann zu einer Verbesserung bzw. Verfeinerung der anfänglichen Vorstellungen über die Wirklichkeit führen kann.

Diese Punkte berücksichtigend mögen meine Betrachtungen als ein Beitrag aufgefasst werden, das Verständnis für einen fundamentalen Aspekt des mathematischen Denkens zu fördern.

Teil V.
Referate

Mathematical Reviews (MR)
Zentralblatt für Mathematik (zbMATH)

William G. Bloch: Jorge Borges' Inescapable Labyrinth[1]

The famous argentine writer Jorge Luis Borges (1899-1986) liked speculations on the idea of infinity, e. g. in his fictional essay 'The Library of Babel', most likely inspired by the story 'Die Universalbibliothek' (The Universal Library) the german science writer Kurd Lasswitz (1848-1910) first published in *Ostdeutsche Allgemeine Zeitung* (issue 18 Dec 1904). — In his well-written and entertaining paper the author starts with a brief sketch of the underlying idea of the 'Universal Library' (UL) as well as of its literary, philosophical and simple combinatorial background. The main part of the article then deals with the question of what kind of manifold could serve as a suitable space for Borges' library. The reasoning runs something like this: Let a book be defined as any sequence of k symbols (with k fixed) taken from an alphabet of cardinality m (Borges assumes $m = 25$ and $k = 1312000$). The corresponding UL contains $m^k \approx 1.96 \cdot 10^{1834097}$ books, an unimaginably large but finite number. According to Borges' old and wise babylonian Librarian, however, the essential feature of the UL lies in its mystical character as an infinite (!) model (metapher) of the Universe. This implies that a proper space for the UL should be, among other things, 'periodic', 'spherical', and 'limitless'. The author argues that the 3-sphere may be regarded as an 'excellent candidate that almost perfectly addresses these properties'. His explanations and illustrations (Euclidean 3-space passing through a 3-sphere, fibration into infinitely many intersecting 2-spheres) are throughout clear, intuitive and well understandable even to laymen.

It should be noted that, in a stronger sense, the UL does not really deserve its name, since 'books' containing more than m^k symbols have to be splitted up in several volumes (not necessarily to be found on the same shelf). Moreover, taking $k = 1$ would legitimately yield even the alphabet as a UL (by the way, the small variant used by Raimundus Lullus (1232-1315)). Admitting books of unbounded finite length k leads to a genuine

[1] In: Emmer, M. (Ed.): *Imagine Math. Between Culture and Mathematics.* Springer-Verlag Italia 2012, 155-165. — Review: MR 3287627.

universal library which is countably infinite and fits into Euclidean three-dimensional space.

Karen Mortillaro: 3D Anamorphic Sculpture and the S-Cylindrical Mirror[1]

Anamorphic images are deformed images that appear normal, i. e. in their true shape, when viewed from a particular angle (oblique) or with a suitable lens or mirror (catoptric). The most typical examples are unrecognizable drawings which can be seen undistorted only in a cylindrical mirror. Renaissance art used some kind of sophisticated anamorphic perspective (e. g., Leonardo da Vinci in his notebooks, Hans Holbein in his famous painting 'The Ambassadors', 1533). Also many contemporary artists use a variety of anamorphic effects in their works. The present article describes K. Mortillaro's own contributions to 3D anamorphic sculpture. A central part of her work is a series of sculptures that illustrate 'Alice in Wonderland' (cf. the website www.karenmortillaro.com). After a brief sketch of well-known examples from history the artist explains to some detail the realization of her Alice project: its underlying ideas, techniques and means, such as the use of a "new" S-cylindrical mirror ("slicing a cylindrical mirror in half, then shifting and joining the opposite edges together"). She announces the Alice Series will be completed using new technological design and fabrication tools like 3D scanning and 3D printing. Sections 1 and 4 contain some minor flaws relating to mirrors and reflection.

[1] In: *Recreational Mathematics Magazine* No. 4 (2015), 49-61. — Review: MR 3403233.

Demetra Christopoulou: On the synthetic content of implicit definitions[1]

In his treatise *Philosophical Foundations of Physics* (ed. by M. Gardner, New York 1966) R. Carnap deals with the question of how to separate the factual ("synthetic") content of a scientific theory T from its analytical parts. To achieve this, he uses a method elaborated by F. P. Ramsey (*The Foundations of Mathematics*, ed. by R. B. Braithwaite, London 1931) which goes roughly as follows: Assume T (the 'theory') to be the finite conjunction of certain sentences formulated in a (partially interpreted) formal language. If T still contains uninterpreted predicate symbols $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ ('theoretical terms'), then replace them with appropriate variables $v_1, v_2, \ldots, v_n$. According to Carnap, then, the Ramsey-sentence $R(T)$ given by $\exists v_1 \exists v_2 \ldots \exists v_n T(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ represents the factual content of T, whereas the conditional $R(T) \to T$ may be regarded as a "meaning postulate" for the theoretical terms which occur in T.

In her paper D. Christopoulou applies this procedure moreover to implicit definitions of the kind today commonly used in mathematics ("systems of axioms" and "abstraction principles"). She considers the Ramsey-sentence $R(T)$ in the case of a Hilbert type system T "that defines implicitly the geometrical terms 'point', 'line', 'plane' ". It is stressed by the author that, though $R(T)$ does not concern empirical (physical) objects, it nevertheless proves to depend on certain "semantic and metaphysical facts" as well as on related "existential commitments to a domain of abstract entities" (section 4.2). One need not adopt this traditional Platonist view which presupposes a fundamental autonomy between the axioms and the subject matter. An implicit definition is intended to define or describe a structure or a class of structures (*not* the elements of such structures). Of course, not every collection of sentences characterizes a structure. So, doubts concerning $R(T)$ w. r. t. the "existential commitments" involved will usually be resolved by showing that the intended structure exists, i. e. that it can be

[1] In: *Log. Log. Philos.* 22 (2013), no. 1, 75-88. — Review: MR 3430544.

modeled in the set-theoretic hierarchy. Whether this kind of justification belongs to metaphysics, appears as an idle question.

Abstraction principles are tackled in a quite similar way, e. g. Frege's $\forall F \forall G[N(F) = N(G) \leftrightarrow (F\,1-1\,G)]$ where $N(F)$ reads 'the number of F's' and with $F\,1-1\,G$ the second order sentence which expresses the existence of a bijection between the F's and the G's. Here again, the (third order) Ramsey-sentence is said to "convey an excess content" which is related to "metaphysical requirements" (section 4.3). It remains open how to fulfill such requirements, i. e., what makes for the acceptability of an abstraction. Finally, the author suggests "that the definitional role [. . .] of the implicit definitions [. . .] should be assigned to their Carnap-conditionals" (section 5).

In summary: Ever since Hilbert it is well-known that implicit definitions are connected with an existence problem. The Carnap-Ramsey method *per se* and its rather sketchy discussion in the paper under review add nothing substantially new to this issue. At best, it becomes evident that, in principle, there seems to be no discrepancy between the way implicit definitions are used in mathematics and the way mathematical practice can be understood in the philosophy of science.

Stephan Kornmesser:

A frame-based approach for theoretical concepts[1]

The paper is centered on developing a formal model for concepts of different kinds that can be represented as "frames" according to L. W. Barsalou [cf. Lehrer & Kittay (eds.), *Frames, fields, and contrasts*, pp.21-74, Hillsdale 1992]. A "frame" describes the subordination of a concept b to a superordinate concept c by means of attributes δ (from a set ATTR) assigning a certain value $\delta(x)$ (from a set VAL of values) to each $x \in \mathrm{ext}(c)$

[1] In: *Synthese* 193 (2016),145-166. — Review: MR 3455223.

(= set of objects which belong to the extension of c). For example, let $c = bird$ and ATTR$=$ $\{beak, leg, foot\}$; then the subordinate concept $b = water\ bird$ applies to an individual bird $x \in$ ext(c), i. e. $x \in$ ext(b), if the equations hold: $beak(x) = round$, $leg(x) = short$, $foot(x) = webbed$. The author then introduces the notion of a "standard frame for a superordinate concept c" (Def-SF, p. 156) as a directed rooted graph with c (root), the attributes, attribute-values, and subordinate concepts as vertices; the set of arcs is denoted by A. A standard frame with root c and ATTR $= \{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ is called "defining frame" for b (Def-DF, p. 157) if $x \in$ ext(b) is equivalent to $(\delta_1(x), b) \in A \wedge \ldots \wedge (\delta_n(x), b) \in A$. [N. B.: The author's condition DF(3) is logically flawed by postponing the quantifier "for all i with $1 \leq i \leq n$". The same holds for Def-OF(3,4) on p. 157.] Though it is claimed (on p. 155) that "the formal definitions developed in this paper can be used for frame-representations of scientific concepts of any discipline" the author shows himself contented with this "narrow view of definitions as conjunctions of properties" (p. 149).

In empirical research one often deals with "prototypical properties …highly predictive, but not necessary or sufficient for a certain category" (p. 148). E. g., if a bird has webbed feet it is likely to be a water bird. This leads to the definition of a "prototype frame" (Def-PF, p. 156) requiring that each of its attributes $\delta \in$ ATTR proves predictive; in the author's notation: $p(x \in$ ext$(b) \mid (\delta(x), b) \in A) =$ high (for all $x \in$ ext(c)). Nothing is said here about the probability measure p or about the precise meaning of 'high'.

A central issue of the paper is "theoretical concepts" regarded as being defined by "*multiple* operationalization". In Sect. 3 this is illustrated by a "linguistic miniature theory" which may be briefly sketched as follows: A natural language x is said to have the property *pro drop* if for certain binary attributes $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \rightarrow$ VAL $= \{0, 1\}$ (describing specific grammatical phenomena) we have $\delta_1(x) = \delta_2(x) = \delta_3(x) = 1$. Now, "certain nomological relations" ("constraints") have been discovered, e. g., $\delta_1(x) = 1 \rightarrow \delta_3(x) = 1$ (p. 153) leading to the "empirical hypothesis" that, given any $i \in \{1, 2, 3\}$, already $\delta_i(x) = 1$ "is necessary and sufficient to be a pro drop …language" x (p. 154). This type of multiple operationalization turns out to be essentially a kind of over-determination of a concept by means of properties assumed (or eventually proven) to be equivalent. The formalized version of "operationalizing frame" (Def-OF, p. 157) does not express what is intended. It contains several mistakes that may be fixed by replacing conditions OF(3,4) through $\forall x, y, \delta[x \in \mathrm{ext}(c) \wedge \delta \in \mathrm{ATTR} \wedge (y, b) \in A \rightarrow (y = \delta(x) \leftrightarrow x \in \mathrm{ext}(b))]$.

Philosophers of science claim to "reconstruct and analyze scientific concepts" (p. 146). There is, however, no hint to how fundamental concepts of physics (like length, mass, or temperature) can be treated within the frame-based apparatus presented. Moreover, the many formalized meta-definitions do not serve for deriving any substantial statement or theorem.

Daniele Molinini et. al.:

Indispensability and explanation: an overview and introduction[1]

The philosophy of mathematics aims at revealing the essential features and sources of mathematical knowledge that is commonly deemed as indubitable, objective and timeless. Among other, one has to deal with the question what mathematics, in principle, is about and how to specify the nature of those objects and relations that (seemingly) constitute the subject matter of mathematical statements and theories. The answers developed in traditional branches of foundational philosophy (logicism, formalism, constructivism, empiricism, etc.) proved on the whole to be fragmentary, controversial and unsatisfactory. In the last decades, however, new doors have been opened for some fresh post-foundationalist approaches to the old questions. The paper under review introduces to discussions that took place in a workshop on *Indispensability and Explanation* hosted by the *Institut d'Histoire et de Philosophie des Sciences et des Techniques* in Paris on November 19-20, 2012. On a still rather general level the participants made the endeavour to clarify the following basic idea: A mathematical theory gains its meaning and justification (as "true or well-confirmed") chiefly

[1] In: *Synthese* 193 (2916), 317-332. — Review: MR 3458648.

through successful applications in the natural sciences. If it beyond proves indispensable for the "explanation of some empirical phenomena", this would, indirectly, strengthen our belief in the existence of the mathematical objects the theory purportedly is about.

The authors point out that "the very existence of mathematical explanations in science is now largely acknowledged" albeit to be distinguished from Hempel's notion of "scientific explanation, in which laws of nature and initial conditions … are paramount" (p. 323-4). Some central issues are connected with this sort of genuine mathematical applications: (i) "the relationship between mathematics per se and scientific reality per se" (Shapiro), (ii) the use and role of "mathematical and physical idealizations" (Bueno and French), (iii) a clarification of the notion of indispensability and its "highly controversial" variant called "Enhanced Indispensability Argument" (Baker) which amounts to the hypothesis that a piece of mathematics is indispensable if it "offers the best explanation" of the phenomena in question. Some crucial questions arise in this context: How can we prove a mathematical argument to be indispensable? And which criterion enables us to decide what is a *best explanation*, i. e. "to rank mathematical explanations … according to their degree of exploratoriness"? The authors concede that "we are still far from a comprehensive examination of these points" (p. 324).

Walter Bühler:

Musikalische Skalen bei Naturwissenschaftlern der frühen Neuzeit (German)[1]

The author presents a careful and thorough inquiry into the interplay of music theory and elementary mathematics in the epoch of beginning natural science and early Enlightenment. Both the choice of intervals perceived as consonant as well as the construction of scales that could be used for the tuning of musical instruments is by far the most important problem

[1] Peter Lang: Frankfurt am Main, 2013, vi + 274 Seiten. — Review: MR 3489247.

in this context. In the introductory chapter I the reader is furnished with the fundamental (mathematical) concepts needed to understand the phenomenon of consonant ('pleasing') musical sounds, the structure of diatonic scales, and the musical logarithm that maps frequency ratios onto intervals (which thus can be added and subtracted). The author gives a concise explanation of the Pythagorean scale which is based on simple number ratios 2^p3^q (p, q integers), as well as of the "just intonation" Gioseffo Zarlino had proposed in his *Institutioni harmoniche* (1558) thereby adopting the approximating ratios $6 : 5 : 4$ for the perfect fifth, major third and tonic. Also scales with irrationally proportioned intervals are discussed, the most prominent of which are the equally-tempered and the (1/4)-comma-tempered scale (studied by Fogliano, Zarlino, and Salinas). Many attempts since then had been made to construct new types of musical scales with intervals defined by frequency ratios of the form $2^p3^q5^r$ (p, q, r integers). Chapter II entails some examples connected with the names of outstanding figures of science, such as Kepler, Descartes, Wallis, or Huygens. Apart from the factual and mathematical aspects, the exposition entails many interesting details relating to the philosophical backgrounds (e. g., Pythagorean cosmology) and also to particular ideas borrowed from physics (e. g., Coincidence theory, Kepler's third law of planetary motion as an expression of the perfect fifth).

In the main part of the book (chapters III-VII) Newton, Leibniz, Henfling, and Euler are each dedicated a separate chapter. The presentation is throughout based on a faithful evaluation of sources, the original texts being given in footnotes. Wherever possible and meaningful, the text is enriched by figures and tables. All trains of thought are developed in a clear and well-worded way which contributes to a highly enjoyable reading. – It is shown in some detail that Newton's ideas essentially meet certain aspects of mathematically optimized scale construction, but to a lesser extent genuine musical purposes. In contrast, Leibniz was also interested in the practice of music and assumed a tolerance of the human ear which led him to a psychological modification of coincidence theory as well as to a legitimization of the 12-tempered intonation which already played a central role in Mersenne's *Harmonie universelle* (1636). The author has made a special contribution to gain an in-depth understanding of Leibniz's music-theoretical ideas by pointing out his systematic usage of "harmonic equations" which represent intervals as linear combinations (with integer coefficients) of fixed fundamental consonances. This allows a variety of different interval systems to be described in a uniform manner. A highlight in this respect is the trapezium on p. 180; its inner points (ordered pairs of a fifth and a major third) correspond in a well-defined sense to musically consistent systems of intervals. Some scales known from traditional music theory are represented this way; the regular ones lie on a diagonal (p. 181). Following Leibniz, Conrad Henfling (1648-1716) has crowned the classical studies of "natural scales" (based on a fixed set of consonances) with a series of remarkable investigations, presented here for the first time in such a detailed and coherent manner. Henfling, too, was an advocate of the equal temperament. The final chapter discusses Euler's contribution to the theory of consonance and its consequences for the definition of scales. Some critical remarks relate to the "gradus suavitatis" defined by a purely number-theoretic function (Euler's famous gradus function Γ) as well as to the introduction of a more complex interval system in which $7:4$ plays the role of a generating consonance. However, as Hermann R. Busch has argued in his fundamental treatise on Euler's theory of music (*Leonhard Eulers Beitrag zur Musiktheorie*, Regensburg 1970), these problematic issues might, in a broader perspective, eventually turn out as germs of an extended understanding of music.

The book under review is an excellent contribution to the history of mathematical music theory. It is well-written and highly recommendable.

José L. Falguera, Xavier de Donato-Rodríguez: Incommensurability, Comparability, and Non-reductive Ontological Relations[1]

The central issue of the paper is a concept of intertheoretical incommensurability (resp. comparability) as discussed by philosophers of science in the aftermath of Th. Kuhn's famous treatise on *The structure of scientific revolutions* (Chicago 1962). Given two scientific theories T, T' which have

[1] In: *J. Gen. Philos. Sci.* 47 (2016), 37-58. — Review: MR 3489767.

in common a sufficiently wide scope of empirical phenomena they intend to explain (e. g., classical and special relativistic mechanics, respectively), there are various ways of how comparing T and its successor T' may prove to be more or less limited or even fail at all. This typically occurs due to a – possibly 'revolutionary' – change of methods and standards and/or of the underlying language (theoretical and observational terms of T, T'). Even in cases of rather divergent theories where no "point to point comparison" is possible, let alone a direct translation of expressions from T to T' (or vice versa), the authors give evidence for a potential common basis for comparability which shows that T, T' "account 'in some way' for the same class of phenomena". Against this background, they aim at developing a formalized concept that captures the "gradual character of incommensurability" thus contributing to solving "the puzzle of the rational comparison of incommensurable theories".

The investigation is carried out completely within the formal framework of the "structuralist metatheory" (SM) which dates back to some seminal papers from the 1970s contributed by J. D. Sneed, W. Stegmüller, and C. U. Moulines. Therefore, understanding the article under review requires some familiarity with the terminology of SM mainly borrowed from set theory and formally treated in an overall presentation given by Balzer, Moulines, and Sneed (*An architecture for science*, Dordrecht: Reidel 1987). The authors provide a careful discussion of the former Balzer-Moulines-Sneed definition (no. 1) of incommensurability in both "the weakest" and "the strongest sense" together with a step-by-step modification ending up in a group (no. 7) of "new definitions for incommensurable theories". Though it is rightly pointed out that "only a careful examination of different historical cases could show whether these definitions work" (p. 55), no promising approach in this direction seems to come into sight. At this point, SM turns out to be suffering from a discrepancy: On the one hand it claims to be a kind of model-theoretic metalogic of science providing an armature of highly formalized definitions ("reconstructions" of scientific notions and metaconcepts), while on the other hand there opens up a massive lack of successful applications (as well as of metatheorems) which would make essential use of this technical apparatus.

Victoria L. Orlofsky: »A different sort of bird«[1]

The author gives an account of the different ways Lady Ada Lovelace, Lord Byron's "fair child" and "sole daughter" (*Child Harold's Pilgrimage, Canto III*), has been employed as a fictional character in steampunk novels from 1990 to 2015. Steampunk is a subgenre of science fiction which playfully paints an alternate, determinedly unreal picture of the Victorian era, in particular of its steam-powered technology including those inventions that then had no chance to be fully realized. Charles Babbage's Analytical Engine is one of the most popular examples, mainly due to Ada's thorough understanding and describing the fundamental principles that make this abstract machine work; posthumously she thus became a heroine of early computer science and patron of all programmers. – It is hardly surprising that Ada's steampunk versions are strongly influenced by the perspectives and countercultural intentions of the novel-writers and have but very little in common with the real, historical person. The author makes (from a feminist point of view) critical comments on some of these aspects. While in *The Difference Engine* (1990, by W. Gibson and B. Sterling) Ada "is accorded respect as a scientist", she nevertheless is portrayed as "an unappealing weakling whose genius is less important than her gender". In Lev Rosen's *All Men of Genius* (2011) she is "a widowed Countess in her mid-60s" and "a celebrated scientific mind", but "not allowed to be sexual". An exception is, in the opinion of the author, Sydney Padua's very popular graphic novel *The Thrilling Adventures of Lovelace and Babbage* (2015). In it Ada not only serves as "a fascinating example of female achievement in math and science", but is also conceived "as a genuine human being". So, she can keep on being an inspiring and encouraging symbol of female intelligence.

[1] In: *Ada's legacy, ACM Books 8*, ACM, New York 2016, 169-182. — Review: MR 3524306.

Peter Schroeder-Heister: Popper's Structuralist Theory of Logic[1]

The author deals with K. R. Popper's attempt (in a series of six papers published between 1947 and 1949) to establish a theory of logical deduction. Early reviewers (Kleene, Hasenjaeger, Curry) had found hidden existence assumptions in some of these contributions as well as numerous misleading formulations; Tarski even refused to take a look at them. In contrast to Popper's own talking of 'New Foundations for Logic', the author reinterpretes his view as a structuralist approach "according to which logic is a metalinguistic theory of consequence, in terms of which logical operations are characterized". Based on ideas from A. Koslow [*A Structuralist Theory of Logic*, Cambridge: CUP 1992] a *deducibility structure* is introduced as a non-empty domain $\mathcal{D}$ together with an abstract deducibility relation '$\vdash$' between finite subsets and elements of $\mathcal{D}$ which meets the conditions: $\Gamma, A \vdash A$ and $\Gamma \vdash A \quad \& \quad \Delta, A \vdash B \Rightarrow \Gamma, \Delta \vdash B$. This extends to a *logic structure* by adding finitely many logical operations $H : \mathcal{D}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{D})$, $n \geq 1$. It is assumed that if $A, B \in H(A_1, \ldots, A_n)$ then A, B are interdeducible (i. e., $A \dashv\vdash B$). Furthermore, it is assumed that the set $H(A_1, \ldots, A_n)$ remains unchanged when A_k is replaced by an interdeducible A'_k, $1 \leq k \leq n$, and finally, that $A \in H(A_1, \ldots, A_n)$ holds if $A \dashv\vdash B$ and $B \in H(A_1, \ldots, A_n)$. Within this framework, the original ideas of Popper can be reconstructed in a coherent manner. So, for example, Popper thought it could serve as an "inferential definition" of implication $\rightarrow$, if one postulates that any statement A which is "equal in force" to $A_1 \rightarrow A_2$ fulfills the metalinguistic formula $\mathfrak{A}_{\rightarrow}(A, A_1, A_2) := (\forall C)(C \vdash A \Leftrightarrow C, A_1 \vdash A_2)$. From the structuralist point of view, $\mathfrak{A}_{\rightarrow}(A, A_1, A_2)$ can be regarded as an "inferential characterization" of a binary logical operation $H_{\rightarrow} : \mathcal{D}^2 \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{D})$ which satisfies $\mathfrak{A}_{\rightarrow}(A, A_1, A_2) \Leftrightarrow A \in H_{\rightarrow}(A_1, A_2)$ where $A \in H_{\rightarrow}(A_1, A_2)$ is taken for $A \dashv\vdash A_1 \rightarrow A_2$ (equality in logical force of A and $A_1 \rightarrow A_2$ expressed as abstract interdeducibility). Provided that, given any $A_1, A_2 \in \mathcal{D}$, there exists (up to interdeducibility) $A \in \mathcal{D}$ with $\mathfrak{A}_{\rightarrow}(A, A_1, A_2)$; then, as a

[1] In: *Karl Popper—a centenary assessment. Vol. III. Science, Texts Philos.* 26, Coll. Publ., London 2015, 17-36. — Review: MR 3524274.

minimal object in $\mathcal{D}$ such that the elimination rule contained in $\mathfrak{A}_{\rightarrow}$ holds, A does not, in general, correspond to anything that is linguistically defined. Therefore, the author sees this interpretation in full accordance with what Popper originally wanted, namely "a purely metalinguistic characterization of the logical operations independently of whether they exist syntactically". — The author gives a sound discussion on several issues related to this approach, among others: (i) the relation to Gentzen's structural rules, (ii) the treatment of different forms of negation (classical, intuitionistic, weak), (iii) Popper's anti-justificationist point of view. The considerations are confined to propositional logic. — Equations (1.1) and (1.2) to which reference is made on pp. 20, 25, and 26 are not numbered.

Sandra D. Prado et al.: Temporal Network Analysis of Literary Texts[1]

The authors discuss some modeling techniques known from network theory which appear to be suitable to measure the relevance of a character in a work of literature. To this purpose, the nodes of the network are associated with the actors in a novel or a play, edges represent connections corresponding to interpersonal relations, interactions and events. Two types of models are distinguished: (1) time-independent static '*aggregate* networks' which do not reflect the intrinsic dynamic of the narrative resulting in a come and go of nodes and edges; (2) discrete '*temporal* networks' using a finite number of time-layers which allow, to a certain degree, retracing how a character evolves in the course of a novel or a play. The main goal of the paper under review is the application of (2) to literary works by combining some formal concepts for literary studies as presented by F. Moretti [*Graphs, Maps, Trees: Abstract Models for a Literary History*, Verso 2005] with mathematical methods (in particular, the use of eigenvector-based centrality measures) recently developed by D. Taylor et al. [arXiv: 1507.01266v2, Feb 2016]. – Two texts serve as objects of study: *Alice's Adventures in Won-*

[1] In: *Advances in Complex Systems*, 19/3 (2016). — Review: MR 3553053.

derland (Lewis Carroll, 1865) and *La Chanson de Roland* (anonymous epic poem, around 1100).

The basic ideas of the procedure can be roughly sketched as follows: For a given temporal network with N nodes and T time-steps a supra-adjacency matrix $\mathbb{M}(\varepsilon)$ of size $NT \times NT$ is introduced whose diagonal consists of the T blocks $\varepsilon M^{(t)}$ $(t = 1, 2, \dots, T)$ where $M^{(t)}$ is the $(N \times N)$-adjacency matrix of time-layer t and $\varepsilon > 0$ a tuning parameter that "controls how strongly a given node is coupled to itself between neighboring time layers". The investigation is carried out for the limit $\varepsilon \to 0^+$ which (according to Taylor et al.) implies a strong intrinsic temporal ordering of the layers. The *centrality* of node (character) i at time (e. g., chapter) t is now derived from the dominant eigenvector of the supra-adjacency matrix. In the subsequent step, the eigenvector centralities of the nodes (instead of their degree centralities) are used to calculate both the *Freeman index* of the network, which indicates how close a graph is to a star graph, as well as the *vitality* of its nodes i defined by $m(G) - m(G \setminus i)$. Here m is any real-valued measure on the network G (e. g., the Freeman index w.r.t. eigenvector centralities) and $G \setminus i$ the graph after removing i and all edges attached to i.

In their case study the authors used both aggregate (static) and temporal (dynamic) network models of *Alice* and *Roland*. Freeman indices (vitalities) and the eigenvector centralities of the characters are plotted in colored figures. The results are mostly in good accordance with the picture one would also get by attentively reading the texts. So, for instance, it turns out that "Alice has the highest vitality (in both cases, aggregate and dynamic)". A perhaps less obvious fact: The King's vitality surpasses that of the Queen in the aggregate case, but the opposite is true in the dynamic case. In the *Roland* epos, too, the authors found evidence for a similar, even more pronounced phenomenon concerning the roles assumed by Roland and Charlemagne. Considering these results, the authors believe in the "utility of this new approach". However, the question remains open, whether at all new and relevant insights can be gained by applying temporal network techniques to literary texts. The authors do not rule out that, "if one is able to devise a way of systematically gathering information from classics", their method "may provide a kind of network-theoretical signature to classify authors, genres and epochs".

Jill E. Tysse: Irish Dancing Groups [1]

The paper deals with symmetries which appear in the arrangements of the dancers in traditional Irish contra dancing. The author illustrates some basic concepts of group theory using the example of the popular céilí dance 'The Siege of Ennis'. The main focus is on simple considerations for teaching, which should make access to the abstract theory easier. — Starting from an arrangement of $n \geq 2$ teams of four people each, the team positions change from one round of the dance to the next. Suppose we have $n = 4$ teams $ABCD$. In the first round, the outer two teams switch places according to the permutation $a = (12)(34)$ which produces the arrangement $BADC$; then, in the second round, the inner two teams follow by switching places according to $b = (23)$, thus yielding the new arrangement $BDAC$, and so on. Since we have $a^2 = b^2 = (ab)^4 = (1243)^4 = e$, there are 8 different rounds (arrangements) representing the symmetry group of a square (dihedral group $\mathcal{D}_4$ of order 8). If we proceed from arrangements $BACD$ or $CBAD$ (which both have not yet been produced), we get the right cosets $\mathcal{D}_4(12)$ and $\mathcal{D}_4(13)$ of $\mathcal{D}_4$ in the symmetry group $\mathcal{S}_4$, respectively. In Section 5 it is shown that also in the general case, dancing the Siege of Ennis 'calculates' $\mathcal{D}_n$ and its cosets. The article concludes with some few suggestions for classroom activities.

---

[1] In: *Irish Math. Soc. Bulletin*, 77 (2016), 71-78. — Review: MR 3561110.

John T. Baldwin:

Foundations of mathematics: Reliability and Clarity: The Explanatory Role of Mathematical Induction[1]

In his paper, the author deals with the explanatory value of proofs that make use of mathematical induction. He points out "that explanation is a fundamental goal of mathematics", and, in particular, "inductive proof is designed to explain: the passage from example to universal". This view of things is not unanimously shared by either mathematicians or philosophers [e. g., M. Lange has attempted to substantiate principal doubts about the explanatory power of proofs by induction; *Analysis* 69 (2009), 203-211]. Unfortunately, such debates suffer from the problem that there is actually no clear idea, let alone a sufficiently precise concept of what an explanation in mathematics can be. Explanatory power is mainly a graded heuristical feature which can be distinct in a proof to a more or less extent; moreover, as the author points out, it depends on the audience the proof is communicated to. Nevertheless, on the basis of a few examples, he rejects the opinion that inductive arguments have generally weak (or even non-)explanatory value.

Five alternative proofs for $S(n) := 1+2+\ldots+n = n(n+1)/2$ are considered and their hypotheses stipulated "in order to assess the explanatory value". The discussion is, for the most part, well-known. The method ascribed to the young Gauss [who calculated $(1+n)+(2+(n-1))+\ldots+((n-1)+2)+(n+1)$] seems to bypass the inductive argument, but, of course, it is hidden in the ellipsis '$\ldots$' which makes the proof "not acceptable because the expression $1+2+\ldots+n$ is not defined". According to the author, Gauss' argument turns into an acceptable proof if, for fixed n and $k < n$, f is introduced by defining $f(k) = (n+1) - k$. It remains unexplained why $((1+f(1)) + (2+f(2)) + \ldots + (n+f(n)))/2$, which is also an 'elliptic' expression for $S(n)$, should be "what the 'qualified mathematician' is assuming" while, at the same time, "the function $f(n)$ is usually taken as

[1] In: *Logic, Language, Information, and Computation*, 68-82, *Lecture Notes in Comput. Sci.* 9803, Springer: Berlin, 2016. — Review: MR 3568470.

a definition of $\Sigma_{k=1}^{n} k$" [sic!]. — In some detail, a "telescoping argument" is presented as "[Paul] Sally's Proof" for $S(n) = n(n+1)/2$. It amounts to adding up the neighboring differences $(k+1)^2 - k^2$ to $(n+1)^2 - 1$. Similar to the method of Gauss, this (generalizable) approach [which already goes back to Pascal; cf. L. Brunschvicg, P. Boutroux (eds.), *Œuvres complètes de Blaise Pascal*, vol. 3 (1908), 341-367] has in fact explanatory power because the bare induction scheme is enriched by a genuine structural as well as intuitive argument. Such a thing is not the rule, but rather a stroke of luck.

Some more special topics are treated in the remaining sections, e. g., Henkin's proof (of the completeness theorem) the inductive 'construction' of which the author regards as explanatory; also a refutation of Lange's argument that a singular sentence $P(a)$ cannot be a partial explanation for the assertion $(\forall x)P(x)$. — Several minor mistakes have to be mentioned: on p. 71: x^4[insert minus]$14x^2$; on pp. 72-73: omission of 7 plus signs; on p. 73 (Gauss 2): the summand of $\Sigma_{k=1}^{n}(n-i)$ must be replaced by $(n+1-i)$.

Graham Priest: What *If*? The Exploration of an Idea[1]

The author is known as an advocate of dialetheism, in particular of revising logic in the sense that the contradictory conclusions from the paradoxes of self-reference (Liar, Russell, etc.) "are simply to be accepted". In the 2nd edition of his monograph *In Contradiction* (*IC*) [Oxford University Press, 2006] he developed a (weak) system of paraconsistent logic *LP* to the extent that it allows dialetheic solutions of the paradoxes. By contrast, the paper under review focuses on the use of a material conditional $\supset$ that does not detach, i. e., the inference from A and $A \supset B$ to B is not valid. *LP* can be interpreted as a three-valued logic, with t, f, b indicating "that a formula relates only to truth, only to falsity, or to both", respectively. The case 'both' can occur, since an n-place predicate P is interpreted by a pair of n-ary rela-

[1] In: *Australasian Journal of Logic* 14/1 (2017), 54-127. — Review: MR 3636094.

tions $\delta^{+}(P)$, $\delta^{-}(P) \subseteq D^n$ (D the non-empty domain of quantification) which are *not necessarily disjoint* (as extension and anti-extension in classical logic use to be). Thus, $P(x_1, \ldots, x_n)$ and $\neg P(x_1, \ldots, x_n)$ possibly can both be satisfied by one and the same n-tuple from D^n. The logical connectives are now defined such that $A \supset B$ has truth value b, when A is b and B is f. So, if A is contradictory, we are not compelled (since not even able) to conclude that everything can be proved. In the author's view, *ex contradictione quodlibet* is an excrescence, "which does not appear to be an integral part of classical reasoning" [*IC*, p. 221].

Some "naive" semantic principles are considered which are central to the paradoxes, e. g., the T-Schema for closed sentences A: $T\langle A\rangle \Leftrightarrow A$ (where $\langle . \rangle$ is a name-forming device, T the truth predicate) or Set Abstraction: $y \in \{x : A\} \Leftrightarrow A_x(y)$ (where $A_x(y)$ denotes A with every free occurrence of x replaced by y). The author calls *Strategy 1* the option to take $\Rightarrow$ to be the conditional $\supset$ from *LP* mentioned above. The aim he pursues is investigating the ways Strategy 1 can be applied to the semantic and set-theoretic paradoxes.

In a first group of sections (4-8) several types of paradoxes are discussed in great detail, among them the Curry paradox (delivered by a sentence, C, of the form $T\langle C\rangle \Rightarrow \perp$, where $\perp$ is a logical constant which entails everything), the paradoxes of denotation, and one from Kripke's *Philosophical Troubles* [Oxford University Press, 2011]. Section 9 gives a brief account of the "relative advantages and disadvantages of each approach". Using an intensional and detachable (!) conditional together with a "consistency operator" (introduced in section 7) finally appears as the option with the most plusses.

The following sections (10-14) are dedicated to set-theoretic matters. In this area, the author is more optimistic about the possibilities of Strategy 1, as here the "situation [...] is importantly different from the theory of truth and other semantic notions". The title of section 11 proclaims "Regaining Set Theory", which means: retaining the substantial corpus of informal (naive) set theory as well as capturing the power of *ZF* (or even going beyond it) within a dialetheic framework. The latter fulfills its very role, for informal set theory is known to be inconsistent due to the naive Set Abstraction in the form of the Comprehension Schema: $\exists x \forall y(y \in x \Leftrightarrow A)$

(x not free in A). Taking A to be $\neg y \in y$, the schema yields Russell's set r, and we have $r \in r \equiv \neg r \in r$. Though Zermelo's Separation Principle (*Aussonderungsaxiom*) $\forall z \exists y \forall x (x \in y \equiv x \in z \wedge A)$, where y is not free in A, does in no way allow r to be defined, "there is no reason to believe that the axioms of *ZF* are *consistently* true", if "inconsistent sets are part of the picture". So, taking A to be $r \in r$, it is shown (on p. 98) that the resulting instantiation of Zermelo's axiom has the truth value b. In order to obtain the desired dialetheic framework, the author then looks for *LP* interpretations of naive set theory "that verify all the theorems of *ZF* (including the Axiom of Choice)". Section 11 presents some (mostly unusual, if not far-fetched) models of this type constructed by techniques of partition, covering, and expansion. The remaining sections contain remarks on metatheory, a revision of *IC*, and a supplementary appendix (9 pages) on Curry's Paradox.

The majority of mathematicians will hardly be inclined to share the author's view that there are "true contradictions" we should accept as "dialetheia" in a mathematical theory. Consistency may be conceived as an ideal property of logical systems, and we strive for it regardless of whether the use of the *ex-falso*-rule is to be rejected or not (the author himself is concerned about a "minimally inconsistent" *LP*). Moreover, dialetheism, as a theory, is little organized and far from being a well-structured logical field. Could, therefore, mathematicians benefit from it at all? The answer is, to a certain extent, 'yes', for it offers a variety of stimulating considerations together with a fresh philosophical perspective on old and new foundational problems.

Ron Aharoni: Mathematics, Poetry, and Beauty [1]

In general, it is hard for laypersons to follow mathematicians who talk about the key role beauty allegedly plays in their work. Not only mathematicians are inclined to believe that beauty is the guide to truth; according

[1] World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2015, vii + 261 pp. — Review: MR 3676532.

to Paul Dirac, too, "a physical theory must possess mathematical beauty" which manifests itself in concise definitions, in elegant proofs, or in pithy and magic formulas like $e^{i\pi} = -1$. The book under review tries to show that it is precisely this kind of beauty —"cold and austere, like that of sculpture", as Bertrand Russell said— mathematics and poetry have in common, though their domains "are so far apart" (p. 4) and also some differences between poetry and sculpture have to be conceded.

The author has divided his book into three parts. The first part is dedicated to the relationship between order and beauty. The much larger second part deals with a variety of more subjective and technical aspects of the creative process in both areas. In the final brief part, the author draws further conclusions and sets forth his personal conception of the deeper meaning that characterizes poetic as well as mathematical creation.

The book has a number of pleasing qualities. First and foremost, it does not simply offer a collection of gems all too well known from popular science literature. Instead, the author sticks to his topic by developing a line of original arguments that runs through the book from the first to the last page. Besides interesting reflections, the reader will find a lot of well-chosen examples, enriched by photos and drawings and spiced up with striking mottos. The result is a clear and lively written text with mathematical requirements at a quite moderate level. So, the book is easy to understand and should not cause any difficulties to the educated layman. Last but not least, it also provides a stimulating and, occasionally, challenging interdisciplinary reading for experts in the fields of mathematics as well as of literary studies. A few comments may illustrate this by example.

While the search for order and hidden patterns in mathematics is commonplace, this can in general not be taken for granted with respect to poetry. The author, however, assumes that in both fields, the aesthetic pleasure roots equally in "saving mental energy" through order. A similar (questionable) argument is presented in the section "The Power of the Oblique" (p. 77). Here the author asserts an analogy between both indirectness as an "artistic means of the poem" and the method of indirect proofs in mathematics. In his view, their common feature and "source of beauty" again is "economy of thought". More plausible than this appears "compression" as something that is typically shared by mathematics and poetry as well (where it "is one of the poem's magician tricks", p. 85). This observation is without prejudice to the fact that the German word for poetry ('Dichtung') certainly does not mean 'compression' (as the author erroneously assumes on pp. 85, 259). The author's list of aspects intended to reveal an internal similarity between mathematics and poetry is much more longer. Some of its items may safely be considered overestimated (e. g., the use of paradoxes, the phenomenon of self-reference, the role of symmetry), while others are substantially related to creative activities that play a prominent role in the work of mathematicians and poets alike (e. g., "fantasy and imagination", "the appearance of unexpected combinations", the function of analogies resp. metaphors).

Despite all these more or less clearly identifiable parallels between mathematics and poetry, both areas are largely separated in practice. The German poet Heinrich von Kleist once remarked that people who understand metaphors and formulas equally well were too small a class. It is to be hoped this fine book will change that at least a little bit.

Yuanping Zheng , Nadia N. Li: Bivariate extension of Bell polynomials [1]

Let $Y_n(x_1, \ldots, x_n)$ denote the (complete) Bell polynomials according to Riordan [*Introduction to Combinatorial Analysis*, New York, 1958, p. 35] and set $B_n(x) := Y_n(x, \ldots, x)$. The starting point of the authors is Spivey's recurrence formula for the Bell numbers $B_n(1)$ [J. Integer Seq. 11 (2008), Article 08.2.5] and its generalized version for the univariate Bell polynomials $B_n(x)$ whose exponential generating function is $\exp(x(e^t - 1))$ [cf. Gould and Quaintance, ibid., Article 08.3.7]. In a similar manner the e.g.f. $g(t; x, y) := \exp(x \log(1 + y(e^t - 1)))$ defines a "bivariate extension" $B_n(x, y)$, which satisfies the following analog of Spivey's identity (Theo-

[1] In: *J. Integer Seq.*, No. 8, Article 19.8.8, 9 p. (2019) — Review: zbMATH DE071579939.

rems 1 and 2):

$$B_{m+n}(x,y) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} k^{n-i} S(m,k)\binom{n}{i} B_i(x-k,y)(x)_k y^k. \qquad (*)$$

Here $S(m,j)$ denote the Stirling numbers of the second kind (and 0^0 is taken to be 1). The identity (*) remains valid if $S(m,k)$ is replaced with the r-Stirling numbers $S_r(m,k)$ introduced by Carlitz [Fibonacci Quart. 18 (1980), 147–162]; correspondingly, the "r-Bell polynomials" $B_{n,r}(x,y)$ defined by the modified generating function $e^{rt}g(t;x,y)$ need to be substituted for the extension polynomials $B_n(x,y)$ (Theorems 3 and 5).

It should be noted here that in order to obtain correct identities, the upper summation limits n, m in the Spivey-Gould-Quaintance equations (2) and (3) must be swapped. In Remark 4 one has to read $B_{n-j,r}(x,y)$ instead of $B_{n-j}(x,y)$. In view of the fact that $B_n(1)$ counts the total number of partitions of an n-set, it would be interesting to know if the bivariate extensions $B_n(x,y)$ and/or the above relation (*) have a combinatorial meaning. Since $g(t;1,1) = e^t$, one gets $B_n(1,1) = 1$ for every integer $n \geq 0$.

Fernando Chamizo: Sumando de la W a la Z (Spanish) [1]

This article deals with the discrete integration problem

$$z_{k+1} - z_k = t_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

where $(t_k)_{k\geq 0}$ is given and $(z_k)_{k\geq 0}$ is looked for under the assumption that both sequences are hypergeometric (in the sense that their quotient sequences t_{k+1}/t_k and z_{k+1}/z_k are rational in k). Using a series of examples, the author explains in some detail an elegant method that leads to a solution by combining the Wilf-Zeilenberger (WZ) Theorem [J. Amer. Math. Soc.

[1] In: *La Gaceta de la RSME*, Vol. 23 (2020), 163–175. — Review: zbMATH DE07274301X.

3 (1990), 147–158] with Gosper's algorithm [Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 75 (1978), 40–42]. For this purpose, a function F defined on $\mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}$ is introduced with $t_k = F(n+1,k) - F(n,k)$. Supplementary to F, a function G of the same type can be computed with the help of the Gosper algorithm such that (F, G) forms a so called WZ pair satisfying $t_k = G(n,k+1) - G(n,k)$ and thus $G(n,k) = z_k$. Under the boundary conditions specified in the WZ Theorem one obtains statements and expressions for $\sum_k F(n,k)$ and $\sum_n G(n,k)$.

The article has expository character and is written in a conversational tone. Most of the examples are elementary, except for the following remarkable formula established by Ramanujan:

$$\frac{8}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{20n+3}{2^{10n}} \binom{4n}{2n} \binom{2n}{n}^2.$$

Guillera [Adv. in Appl. Math. 20 (2002), 599–603] has succeeded in proving this identity with the WZ method. In the final section, the author gives an outline of this sophisticated proof.

Suho Oh, Jina Park: Necklaces and slimes [1]

In this paper bijective mappings are considered between the set $\mathcal{N}_{n,k}$ of binary necklaces with n black beads and k white beads and a set $\mathcal{F}_{n,k,0}$ of certain (n,k)-codes, which are defined as sequences $(f_1, \ldots, f_n)$ of nonnegative integers with $f_1 + \cdots + f_n = k$ and $\sum_{i=1}^{n} i f_i \equiv 0 \pmod{n}$. In the case where n and k are coprime, a bijection $\mathcal{N}_{n,k} \to \mathcal{F}_{n,k,0}$ was given in 2019 by Brauner, Glebe, and Perkinson [arXiv:1906.04768]. Oh and Park ask how far this can be generalised. As their main result they show in Theorem 2 that a bijective mapping $\mathcal{N}_{n,k} \to \mathcal{F}_{n,k,0}$ can be constructed when n is prime. To achieve this, they introduce some auxiliary notions ("slime",

[1] In: *Discrete Math.*, 343, No. 8, Article ID 111847, 4 p. (2020). — Review: zbMATH DE072093971.

"riwi-map"), which refer to code sections and codes of period n, respectively. The construction method based on this also yields the mentioned result for coprime n, k. Finally, it is discussed whether the method also applies to the case of an arbitrary $n \geq 0$. The authors outline an idea that seems to work at least for some small values of n. However, the general question remains open.

Khristo N. Boyadzhiev: New Series Identities with Cauchy, Stirling, and Harmonic Numbers, and Laguerre Polynomials [1]

The author considers an appropriate class of analytic functions $f(z)$ of moderate growth in certain half-planes $\Re(z) > \lambda$. Expanding $f(z)$ into its Newton interpolation series (with simple nodes $0, 1, 2, \ldots$) and applying binomial transformation (inversion) to the sequence $f(k)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ then yields representations of $\int_0^1 f(x)dx$ (Proposition 1) and of $f^{(m)}(0)/m!$ (Proposition 8), respectively. In Proposition 1, the Cauchy numbers c_n, defined as the Taylor coefficients of $x/\ln(1+x)$), come into play, while in Proposition 8 the signed Stirling numbers $s(n, m)$ of the first kind appear.

In a total of fourteen special cases of $f(z)$, the two basic formulas are evaluated. In this way, already known results originally obtained by other methods are rediscovered, but also a number of new identities are found. For example, applying Proposition 1 to the function $f(z) = (1 + xz)^{-1}$ with $\Re(z) > -1/x$, $x > 0$, leads to the remarkable expansion

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n c_n x^{n+1}}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)},$$

which is convergent for all $x > 0$. — In the final section, the classical Laguerre polynomials $L_n(x)$ are treated as binomial transforms of $f(z) =$

[1] In: *J. Integer Seq.* 23, No. 11, Article 20.11.7 (2020). — Review: zbMATH DEDE072844685.

$x^z\Gamma(z+1)^{-1}$, $x > 0$. The application of Proposition 8 then yields the new series

$$\begin{aligned}\frac{\gamma^2}{2} + \gamma \ln x - \frac{\pi^2}{12} + \frac{\ln^2 x}{2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n s(n,2)}{(n-1)!n} L_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} H_{n-1} L_n(x),\end{aligned}$$

where γ is Euler's constant, and H_{n-1} the $(n-1)$th harmonic number.

Note: The summation in Example 6, Eq. (10), must start at $n = 1$.

*   *   *

WEITERE BÜCHER DES AUTORS

Die enttäuschte Erkenntnis
Paramathematische Denkzettel.
2., rev. u. erweiterte Auflage (218 Seiten)
Logos-Verlag: Berlin 2022
ISBN 978-3-8325-5538-2

Stirling Polynomials in Several Indeterminates
Logos-Verlag: Berlin 2021 (155 Seiten)
ISBN 978-3-8325-5250-3

Werktage im Niemandsland
Aus dem Fahrtenbuch eines mathematischen Grenzgängers.
Logos-Verlag: Berlin 2017 (243 Seiten)
ISBN 978-3-8325-4379-2

Didaktische Schriften zur Elementarmathematik
Logos-Verlag: Berlin 2014 (255 Seiten)
ISBN 978-3-8325-3716-6

Begriffsbestimmungen
Aufsätze zur Heuristik und Logik mathematischer Begriffsbildung.
Logos-Verlag: Berlin 2011 (308 Seiten)
ISBN 978-3-8325-2883-6

CBT-Anwendungen professionell entwickeln
Mit 131 Abbildungen
Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg 1998 (410 + xi Seiten)
ISBN 3-540-62026-5

Operative Genese der Geometrie
(mit Peter Bender) hpt & Teubner: Wien / Stuttgart 1985.
Reprint bei Neopubli: Berlin 2012 (468 Seiten)
ISBN 978-3-8442-2454-2

Theorie und Rechtfertigung
Untersuchungen zum Rechtfertigungsproblem axiomatischer Theorien.
Friedr. Vieweg & Sohn: Braunschweig 1975 (204 Seiten)
ISBN 978-3-528-08345-8