Beleuchtung einer Tischplatte. Anmerkungen zu einer Extremwertaufgabe[1]

Ein seit langem bekanntes elementares Beispiel einer angewandten Optimierung ist die folgende photometrische Aufgabe: Über der Mitte einer kreisförmigen Tischplatte ist eine Lampe anzubringen. In welcher Höhe muss sie aufgehängt werden, damit der Tischrand möglichst hell beleuchtet ist?

Eine einfache Planskizze (Abb. 1) möge den Sachverhalt im Seitenriss verdeutlichen:

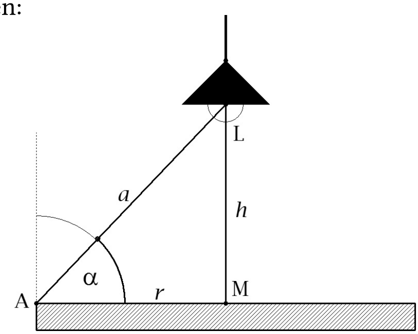

Abb. 1

Die Lichtquelle L werde als praktisch punktförmig vorausgesetzt, der von ihr ausgehende Lichtstrom als von konstanter Lichtstärke (der Einfachheit halber auf 1 normiert). Es genügt aus Symmetriegründen, eine beliebige Stelle A auf dem Tischrand zu betrachten. Nach dem Lambertschen Cosinus-Gesetz beträgt dann die dort vorhandene Beleuchtungsstärke

$$\frac{1}{a^2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{a^2} \cdot \sin\alpha = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{h}{a} = \frac{h}{a^3}. \tag{1}$$

Da das Dreieck LMA bei M einen rechten Winkel hat, gilt $a^2 = h^2 + r^2$.

Dörrie [1] entwickelt (dem Inhalt seines Lehrbuchs entsprechend) eine rein algebraische Lösung. Er bildet dazu das Quadrat $q = a^{-6}h^2 = a^{-6}(a^2 - r^2)$ des zu maximierenden Ausdrucks (1) und gewinnt aus ihm

[1] Verfasst 2005; erscheint in: WURZEL (März/April 2018).

mit der Substitution $x = a^2$ die kubische Gleichung

$$qx^3 - x + r^2 = 0.$$

Da sie außer einer negativen auch eine positive Lösung (nämlich $x = a^2$) besitzt, gilt für ihre Diskriminante: $D = q(4 - 27qr^4) \geq 0$, und damit $q \leq 4/27r^4$. Für das maximale $q = q_{\max} := 4/27r^4$ verschwindet D, und man erhält die positive Doppelwurzel $x = 1/\sqrt{3q_{\max}} = 3r^2/2$. Daraus ergibt sich für die zugehörige optimale Höhe der Lichtquelle L:

$$h_{\max} = \sqrt{a^2 - r^2} = \frac{r}{\sqrt{2}}. \tag{2}$$

Die Aufgabe lässt sich selbstverständlich auch ohne derartige Kunstgriffe als klassisches Extremwertproblem der Differentialrechnung behandeln, so geschehen etwa bei Sirk [3] (in [2] etwas verwickelter durch die Lagrange-Methode mit Nebenbedingung). Ausgehend von (1) bilden wir dazu durch Eliminierung des Abstands a die Funktion

$$F(h) := \frac{h}{(h^2 + r^2)^{3/2}}.$$

$F(h)$ liefert die in A vorhandene Beleuchtungsstärke in Abhängigkeit von der Lampenhöhe h. Aus der Gleichung

$$F'(h) = \frac{r^2 - 2h^2}{(h^2 + r^2)^{5/2}} = 0$$

ergibt sich unmittelbar die Lösung (2) als mögliche Stelle eines relativen Extremums. Tatsächlich liegt hier wegen $F''({}^{r}/\sqrt{2}) < 0$ ein Maximum vor (sogar ein absolutes, wie sich bei genauerer Betrachtung des Funktionsverlaufs herausstellt).

Es liegt nahe, die Aufgabe auf den Fall einer quadratischen Tischplatte zu erweitern. Zu Vergleichszwecken werde das Quadrat dabei so gewählt, dass der zuvor betrachtete Kreisrand zum Quadrat-Inkreis wird und A zum Mittelpunkt einer Quadratseite (Tischkante von Ecke zu Ecke, vgl. die Aufsicht in Abb. 2). Im Unterschied zum Kreis variiert die Beleuchtungsstärke auf dem Rand der quadratischen Fläche. Es ist daher sinnvoll, die über den gesamten Tischrand gemittelte Beleuchtungsstärke zu maximieren. Bei der kreisförmigen Platte war das explizit nicht erforderlich, weil alle ihre Randpunkte ohnehin die gleiche Beleuchtungsstärke aufweisen. Beim Quadrat genügt es, die Strecke von A bis zu einer benachbarten Ecke E zu untersuchen. Der Rand des Tisches besteht aus 8 solchen Abschnitten gleicher Länge, welche jeweils die gleiche Verteilung der Beleuchtungsstärke aufweisen.

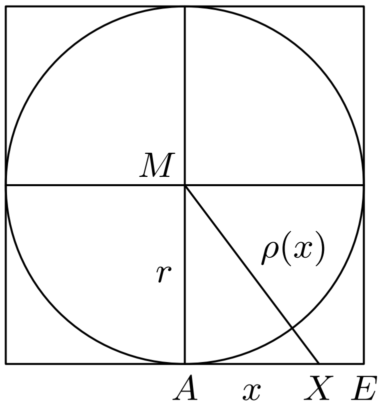

Abb. 2

Wir betrachten nun einen beweglichen Punkt X, der bei A beginnend die Strecke AE durchläuft. Das Dreieck LMA wird auf diese Weise zu einem veränderlichen, ebenfalls rechtwinkligen Dreieck LMX. Aus seinen Abmessungen soll ein Ausdruck gewonnen werden, welcher der in X vorhandenen Beleuchtungsstärke proportional ist.

Es werde dazu mit x der Abstand des Randpunktes X von A bezeichnet. Weitere von x abhängige Größen des Dreiecks LMX sind seine Hypotenuse $a(x)$, die in der Tischebene liegende Kathete $\rho(x)$ sowie der Winkel $\alpha(x) := \angle$LXM. Sobald X nicht mit A zusammenfällt, entsteht in der Tischebene ein weiteres Dreieck MAX mit einem rechten Winkel bei A. Es gilt also nach zweimaliger Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes: $a(x)^2 = h^2 + \rho(x)^2 = h^2 + r^2 + x^2$. Somit lässt sich die in X vorhandene Beleuchtungsstärke durch folgende ›Erweiterung‹ der oben definierten Funktion F wiedergeben:

$$\widetilde{F}(h, x) := \frac{h}{(h^2 + r^2 + x^2)^{3/2}}. \tag{3}$$

Es ist nicht nötig, die Extremwertbestimmung mit diesem $\widetilde{F}$ zu wiederholen. Denn nach der bereits bekannten Lösung erhalten wir im Punkt X das

Maximum der Beleuchtungsstärke, wenn die Lampe L im Abstand

$$h_{\max}(x) := \frac{\rho(x)}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{r^2 + x^2}{2}}$$

über dem Mittelpunkt M aufgehängt wird. Die optimale Aufhänghöhe erscheint hier als das quadratische Mittel von r und x.

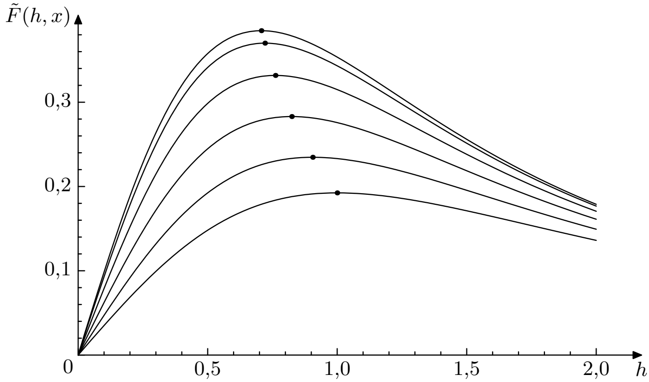

Abb. 3

Abbildung 3 zeigt die Verläufe der Beleuchtungsstärke (als Funktion von h) an sechs äquidistanten Punkten X auf AE, wobei $r = 1$ gesetzt wurde und die oberste Kurve zu A ($x = 0$), die unterste zur benachbarten Tischecke E ($x = r$) gehört. Die jeweiligen Maxima sind markiert.

Es soll nun die an der halben Tischkante AE vorhandene mittlere Gesamtbeleuchtungsstärke in Abhängigkeit von h berechnet werden. Sie ergibt sich als

$$\begin{aligned} G(h) &:= \frac{1}{r}\int_0^r \widetilde{F}(h,x)\,dx = \frac{1}{r}\cdot \frac{hx}{(h^2+r^2)\sqrt{h^2+r^2+x^2}}\bigg|_0^r \\ &= \frac{h}{(h^2+r^2)\sqrt{h^2+2r^2}}. \end{aligned}$$

Die als notwendige Bedingung für ein relatives Extremum zu diskutierende Gleichung

$$G'(h) = -\frac{2(h^4 + h^2 r^2 - r^4)}{(h^2+r^2)^2 (h^2+2r^2)^{3/2}} = 0$$

hat genau eine positive reelle Lösung:

$$h = \frac{r}{\sqrt{\tau}} \quad \text{mit } \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339.$$

Hier ist τ die Teilungszahl des ›goldenen Schnitts‹, ein in diesem Zusammenhang überraschend auftauchender Wert.

Wegen $G''(r/\sqrt{\tau}) = -16\left(3+\sqrt{5}\right)^{-5/2}\left(\sqrt{5}-1\right)^{1/2} r^{-4} < 0$ liegt an dieser Stelle ein Maximum vor.

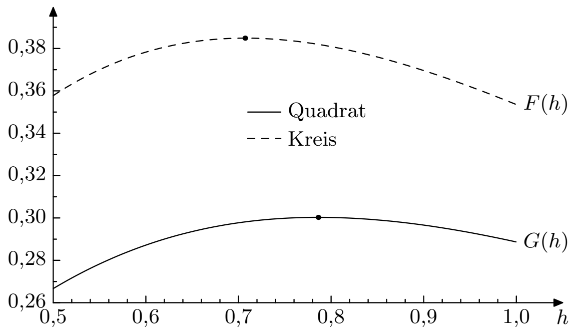

Abb. 4: Die mittleren Beleuchtungsstärken zu Kreis und Quadrat im Vergleich

Abbildung 4 zeigt die mittlere Beleuchtungsstärke auf dem Einheitskreis und auf dem ihm umschriebenen Quadrat jeweils als Funktion der Aufhänghöhe h. Das optimale h über einer kreisförmigen Platte liefert auf deren Rand die maximale Beleuchtungsstärke

$$F\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}\cdot r} \approx \frac{0{,}3849}{r^2}.$$

Beim Übergang zur quadratischen Tischplatte muss die Lampe etwa um das Stück $0{,}079 \cdot r$ höher gehängt werden, damit sich das entsprechende Maximum auf dem Rand einstellt; dieses beträgt

$$G\left(\frac{r}{\sqrt{\tau}}\right) = \frac{2\sqrt{\sqrt{5}-2}}{(\sqrt{5}+1)r^2} \approx \frac{0{,}3003}{r^2},$$

liegt also ca. 22 Prozent unter dem Maximum auf der kreisförmigen Tischplatte.

Literatur

1. Dörrie, Heinrich: *Kubische und biquadratische Gleichungen*, Leibniz Verlag: München 1948.
2. Papula, Lothar: *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*, Band 2, 12. Auflage, Springer Vieweg: Wiesbaden 2009.
3. Sirk, Hugo: *Mathematik für Naturwissenschaftler und Chemiker*, 7., verb. Auflage, Verlag von Theodor Steinkopf: Dresden und Leipzig 1956.