1 Gewinnabsicherung bei Wetten mit festen Auszahlungsquoten

1.1 Einleitung

Beim Abschluss risikobehafteter Kontrakte verfolgen die Beteiligten außer ihren Gewinninteressen häufig auch das Ziel, ihre Positionen bis zu einem gewissen Grad gegen Verluste zu schützen. Die diversen Formen des Hedging auf Futures-Märkten sind dafür ein bekanntes Beispiel. Ein verwandtes Phänomen – in anderem Rahmen – ist die unermüdliche Suche privater Spieler nach möglichst risikoarmen Wettkombinationen oder sonstigen als sicher (oder so gut wie sicher) ausgegebenen Strategien beim Glücksspiel. Die Aktualität dieses Themas belegen die sich im internationalen Maßstab immer rascher ausbreitenden Wettangebote (Sportwetten und dgl.) und die dabei im Internet vermittelte Suche nach Arbitragemöglichkeiten („sure bets“). Bei wiederholt durchführbaren Spielen (wie Roulette) scheinen sich zudem viele Teilnehmer nicht von dem trügerischen Glauben abbringen zu lassen, sie könnten Verluste durch anschließende Manipulation (meist Steigerung) ihrer Einsätze wieder ausgleichen und dabei, mit einem passenden 'Wettsystem', sogar Gewinne erzwingen.[1]

Die erwähnte Arbitrage lässt sich immerhin effektiv ausüben, solange man geeignete Wettkontrakte in noch nicht vereinheitlichten Marktbereichen (zum selben Treffer-Ereignis) abschließen kann. Eine simple Geschichte möge dies illustrieren:

Beispiel 1.1
In Coin City findet am Wochenende ein Boxkampf zwischen Benny und Jonny statt. Bruno, der bei solchen Gelegenheiten gerne wettet, setzt bei seinem Buchmacher 100 Dollar auf den Sieg von Benny bei einem Wettverhältnis 10 : 13 (was einer Auszahlungsquote von $(10+13)/10 = 2{,}3$ brutto entspricht). Als er am Freitag vor dem Kampf in einem anderen Stadtteil Einkäufe macht, entdeckt er zufällig einen Buchmacher, der Wetten auf den Sieg von Jonny im Verhältnis 5 : 4 (also zur Quote 1,8) annimmt. Bruno denkt einen Augenblick nach und findet einen Einsatzbetrag, der ihm einen positiven Reingewinn unabhängig davon garantiert, wer den Kampf gewinnt. (Der gesuchte zweite Einsatz x muss $1{,}3 \cdot 100 - x$ und $0{,}8 \cdot x - 100$ positiv machen, d. h. $125 < x < 130$ erfüllen.)

Eine solche Möglichkeit kann natürlich nur solange bestehen, wie sie von wenigen Spielern still genutzt und den Wettanbietern nicht aufgedeckt wird.

Ein allgemeines Kriterium, welches über die Existenz gewinnsicherer Einsatzverteilungen bei einer beliebigen Anzahl von Alternativen entscheidet, ist wohlbekannt und wurde bereits 1937 von B. de Finetti im Zusammenhang seiner Interpretation subjektiver Wahrscheinlichkeiten als Wettquotienten erwähnt (vgl. [Fin64]). Im folgenden Abschnitt 2 wird ein elementares Modell

[1] Der Bericht [Beh06] über einen vor einiger Zeit im Fernsehen präsentierten Fall führt das anschaulich vor Augen. Nahrung finden Systemsucher womöglich auch in der berühmten, zum Teil erfolgreichen Geschichte um Casino-Blackjack („17 und 4“); sie ist in [Pou05] farbig geschildert.

für Wetten mit Auszahlungsquoten entwickelt, in dessen Rahmen sich dann (Abschnitt 3) de Finettis Kriterium systematisch herleiten lässt und darüber hinaus im Arbitragefall geeignete Einsatzverteilungen zu beliebig (nicht nur konstant) vorgebbaren Reinerlösvektoren berechnet werden. In Abschnitt 4 werden in diesem Modell Wetten auf Wartezeitenversuche dargestellt und die Wirkung bestimmter gewinnsichernder Einsatzstrategien auf Erwartungswert und Varianz (abhängig von der Wartezeit) untersucht.

1.2 Ein Modell für Wetten mit Auszahlungsquoten

Begriffliche Grundlagen

Zur Vorbereitung sollen anhand einer typischen Wette zunächst einige einfache Begriffe eingeführt werden. Die beiden Parteien, die eine Wette über ein unsicheres Ereignis ω abschließen, nennen wir *Spieler* und *Gegenspieler*. Der Spieler macht einen Einsatz a darauf, dass ω eintritt, der Gegenspieler setzt den Betrag b dagegen; beide Einsätze sind positiv. Die soweit beschriebene Vereinbarung kennzeichnet das *Wettverhältnis* $a : b$. Die Einsatzsumme $a+b$, auch *Stock* genannt, wird an den Gewinner der Wette ausgezahlt. Nehmen wir die Sichtweise des Spielers ein, so erhält dieser im Erfolgsfall, d. h. bei Eintreten des *Treffer*-Ereignisses ω, das q-fache seines Einsatzes als Bruttogewinn, wo $q := (a+b)/a$ die sog. *Auszahlungsquote* (kurz: *Quote*) der Wette darstellt. Die Differenz $g = aq - a = (q-1)a$ ist somit der *Reingewinn* (kurz: *Gewinn*) für den Spieler. Das Verhältnis $\hat{q} := q - 1 = g/a$ von Gewinn zu Einsatz bezeichnet man als *Nettoquote*.

Zu erwähnen ist schließlich noch der *Wettquotient* („betting quotient"), der als Kehrwert $b := 1/q$ der Quote definiert wird. Ihm kommt eine besondere Bedeutung zu, sofern er sich (nach B. de Finetti) als subjektive Wahrscheinlichkeit interpretieren lässt, die der Spieler dem Treffer-Ereignis durch die Höhe seines Einsatzes im Verhältnis zum Stock der Wette zumisst. Entsprechendes gilt für den Gegenspieler. Offenbar sind die Wettquotienten beider Parteien positive Zahlen, die sich zu 1 addieren, und bilden somit zumindest formal eine Wahrscheinlichkeitsverteilung. Diese „Kohärenz" (de Finetti) erfordert allerdings, dass die Einsätze „hinlänglich klein" sind [Fin64, S. 102 f]. Außerdem wird sie gestört, wenn der Gegenspieler als Anbieter der Wette mit der Absicht auftritt, einen für ihn vorteilhaften Vertrag zu Lasten des Spielers abzuschließen. In umgekehrter Richtung – das zeigt die Beispielgeschichte der Einleitung – kann eine Störung dadurch entstehen, dass ein Spieler mehrere Wettanbieter zu einem fiktiven Gegenspieler zusammenfasst, welcher aufgrund fehlender Informationen nicht rational handeln (sich also insbesondere nicht gegen Arbitrage schützen) kann.

Dieser Hintergrund gibt Anlass, die Begriffe Spieler und Gegenspieler von vornherein so weit zu fassen, dass darunter auch Kollektive fallen. Zum Beispiel besteht das Spielerkollektiv (in der kürzeren Sprechweise: der Spieler) eines Pferderennens aus allen Personen, die auf dessen mögliche Ergebnisse wetten. Tritt ein Kollektiv von Gegenspielern als Anbieter von Wetten auf, so wird es im Folgenden *Bankhalter* (oder kurz: *Bank*) genannt. In einigen Fällen ist der Bankhalter zugleich Veranstalter des Zufallsversuchs, auf dessen Ergebnisse er Wetten zu von ihm festgesetzen Quoten annimmt. Ein Beispiel dafür sind Roulette-Spielbanken.

Nach diesen terminologischen Vorbereitungen wenden wir uns dem allgemeinen Fall zu, in dem ein Spieler auf endlich (oder abzählbar) viele Ergebnisse $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ eines Zufallsversuchs wetten kann. Für die Überlegungen in Abschnitt 2 und 3 genügt es, eine *endliche Ergebnismenge* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ zu betrachten. Durch den Zufallsversuch wird genau eines ihrer Elemente ω_k realisiert, und zwar mit der Wahrscheinlichkeit $p_k = P(\omega_k)$, $1 \leq k \leq n$. Mit einer solchen Funktion $P : \Omega \to [0,1]$ wird dann (Ω, P) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Dazu wählt man die Potenzmenge von Ω als Ereignisalgebra und setzt P auf dieser fort durch die Vorschrift: $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$, $A \subseteq \Omega$ beliebig (zu diesen Begriffsbildungen vgl. etwa [Hes03]). Wir erweitern diese Struktur zu einem Tripel $\Gamma = (\Omega, P, Q)$ durch Hinzunahme einer Abbildung $Q : \Omega \to (1, \infty)$, die jedem Spielergebnis die zugehörige Auszahlungsquote zuordnet: $q_k = Q(\omega_k)$, $1 \leq k \leq n$. Die so definierten Tripel Γ fungieren im Folgenden als Modelle für Wetten bzw. Glücksspiele mit Quoten.

In einigen Situationen, z. B. bei Wetten auf Sportereignisse oder auf den Ausgang politischer Wahlen, ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion P nur teilweise oder gar nicht bekannt bzw. explizit gegeben. Gleichwohl ist es zweckmäßig, sie generell in das obige Modell Γ aufzunehmen, da sich so (mindestens theoretisch) die Beziehungen zwischen Quoten und Wahrscheinlichkeiten untersuchen lassen. Aus praktischer Sicht obliegt es bei nicht verfügbarem P der Bank, die Quotenfunktion Q so festzulegen, dass ein Spieler keine Arbitrage ausüben kann (eine Aufgabe, die in Abschnitt 3 vollständig gelöst wird).

Im ersten Schritt ist es zweckmäßig, die innerhalb von $\Gamma = (\Omega, P, Q)$ relevanten Zufallsvariablen zusammenzustellen und mit ihrer Hilfe die Gewinnerwartung zu bestimmen.

Mit X_k werde der Indikator von ω_k bezeichnet, d. h. es gilt $X_k(\omega) = 1$ für $\omega = \omega_k$, sonst $= 0$. Setzt daher ein Spieler den Betrag e_k auf ω_k, so ist $B_k := e_k q_k X_k$ der auf ω_k erzielbare Bruttogewinn, und der entsprechende Reingewinn ist gegeben durch $G_k := B_k - e_k$. Generell setzen wir $e_k \geq 0$ voraus. Eine vom Spieler(kollektiv) auf ganz Ω realisierte *Einsatzverteilung* $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ muss mindestens einen positiven Einsatzbetrag enthalten. Ferner verabreden wir die Bezeichnungen:

$$
\begin{aligned}
S &= e_1 + \cdots + e_n && \text{für den Stock (die Einsatzsumme),}\\
B &= B_1 + \cdots + B_n && \text{für den (totalen) Bruttogewinn,}\\
G &= G_1 + \cdots + G_n && \text{für den (totalen) Reingewinn.}
\end{aligned}
$$

Es gilt $G = B - S$. Für den Erwartungswert von G erhalten wir die folgende Aussage:

Satz 1.1
Für die Gewinnerwartung, d. h. den Erwartungswert $E(G)$ des Reingewinns G, der in einer Wette $\Gamma = (\Omega, P, Q)$ bei der Einsatzverteilung $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ erzielt wird, gilt:

$$E(G) = \sum_{k=1}^{n} (p_k q_k - 1)\, e_k$$

Beweis: Es gilt $E(X_k) = p_k$ und, unter Beachtung der Linearität des Erwartungswertes, zunächst $E(G_k) = E(B_k) - E(e_k) = q_k e_k E(X_k) - e_k = (p_k q_k - 1) e_k$ sowie wegen $E(G) = \sum_{k=1}^{n} E(G_k)$ die behauptete Gleichung. $\dashv$

Ist wie hier die Gewinnerwartung eine Linearkombination $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ der Einsätze, so kann der Spieler versuchen, ausschließlich auf Ergebnisse mit maximalen Koeffizienten λ_k zu setzen. Natürlich wirkt sich dies nur dann aus, wenn die Koeffizienten nicht sämtlich übereinstimmen.

Beispiel 1.2

7	
2	3
4	5
6	8
9	10
11	12

Bei der unter dem Namen *Lustige Sieben* bekannten Wette werden zwei Spielwürfel geworfen. Der Spieler setzt Beträge auf die Augensummen-Felder in nebenstehendem Tableau. Der Bankhalter zahlt den Einsatz auf 7 dreifach aus, die Einsätze auf allen übrigen Feldern zweifach sowie Beträge in gleicher Zeile neben der geworfenen Augensumme einfach; alle übrigen Einsätze gehen verloren. – Da auch für das Nachbarfeld des realisierten Ergebnisses ein Gewinn ausgezahlt wird, ist Satz 1.1 nicht ohne weiteres anwendbar. Das Modell ist also im Hinblick auf derartige Nebenauszahlungen zu erweitern (siehe weiter unten).

Bezeichnet e_k den Einsatz auf die Augensumme k, $2 \leq k \leq 12$, so ist etwa $E(G_4) = 2e_4 \cdot \frac{3}{36} + e_4 \cdot \frac{4}{36} + (-e_4) \cdot \left(1 - \frac{7}{36}\right) = -\frac{19}{36} e_4$ die Gewinnerwartung, wenn nur auf Feld 4 gesetzt wird. Summation aller Erwartungswerte $E(G_k)$ liefert dann die (totale) Gewinnerwartung:

$$E(G) = -\frac{1}{36}\left(29e_2 + 28e_3 + 19e_4 + 18e_5 + 11e_6 + 12e_7 + 11e_8 + 18e_9 + 19e_{10} + 28e_{11} + 29e_{12}\right)$$

Ein Spieler, der diese Linearkombination kennt, wird nur noch auf 6 und 8 setzen (statt auf die durch ihre höchste Quote und größte Wahrscheinlichkeit besonders hervorstechende 7) und solcherart die Gewinnerwartung zu seinen Gunsten verändern.

Will der Bankhalter einer Wette solchen trivialen Optimierungen vorbeugen, so muss das Verhältnis von Gewinnerwartung und Stock bei allen Einsatzverteilungen unverändert bleiben. Der folgende Unterabschnitt ist diesem Sachverhalt gewidmet.

Erwartungsstabilität

Eine Wette $\Gamma = (\Omega, P, Q)$ soll *erwartungsstabil* (oder kurz: *stabil*) heißen, wenn ein $\lambda \in \mathbb{R}$ (*Stabilitätskoeffizient*[2] genannt) existiert, sodass $E(G) = \lambda \cdot S$ gilt für alle Einsatzverteilungen $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ mit $S = e_1 + \ldots + e_n$.

Im Unterschied zu der in Beispiel 1.2 geschilderten Wette ist z. B. das Roulette-Spiel erwartungsstabil (siehe Beispiel 4). Das ergibt sich aus dem folgenden einfachen Kriterium:

Satz 1.2
$\Gamma = (\Omega, P, Q)$ ist erwartungsstabil genau dann, wenn $p_k q_k$ für $k = 1, 2, \ldots, n$ konstant ist.

Beweis: Bei $p_k q_k = \text{const}$ liefert Satz 1.1 mit $\lambda := p_k q_k - 1$ sofort $E(G) = \lambda\, S$. – Ist umgekehrt Γ stabil, so hat man (nach Satz 1.1): $\sum_{k=1}^{n} (p_k q_k - 1) e_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda e_k$ für geeignetes λ. Zu beliebigem $j \in 1, \ldots, n$ werde $e_j = S > 0$ gewählt und alle übrigen $e_k = 0$, $k \neq j$. Hieraus folgt $(p_j q_j - 1)S = \lambda S$, mithin $p_j q_j = \lambda + 1$. $\dashv$

Einen wichtigen Sonderfall bilden faire Wetten. Γ heißt *fair*, wenn $E(G) = 0$ für alle Einsatzverteilungen. Aus den Sätzen 1.1 und 1.2 ergibt sich, dass in diesem Fall stets $p_k q_k = 1$ ist, d. h. die Wettquotienten $b_k = 1/q_k$ sind identisch mit den apriori gegebenen (objektiven) Wahrscheinlichkeiten p_k und haben (wie diese) die Summe 1. Dies gibt Anlass, die Differenz

$$\delta = \delta(\Gamma) := 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q_k} \tag{1.1}$$

[2] In Abschnitt 3 wird dieser Koeffizient spieltheoretisch (nämlich als Wert eines Matrixspiels) interpretiert.

zu betrachten; sie wird im Folgenden als *Defekt von* Γ bezeichnet (und spielt eine Schlüsselrolle bei der Frage der Gewinnabsicherung in Abschnitt 3). Satz 2 liefert eine Beziehung zwischen Stabilitätskoeffizient und Defekt stabiler Wetten:

$$\delta = 1 - \frac{1}{1+\lambda} \tag{1.2}$$

Der Defekt einer fairen Wette ist Null; die Umkehrung hiervon gilt nicht allgemein, wohl jedoch für stabile Wetten. Aus Gleichung (1.2) ist allgemeiner ersichtlich: Wegen $\delta < 1$ gilt $\lambda \in (-1, \infty)$, und in diesem Bereich haben Defekt und Stabilitätskoeffizient stets gleiches Vorzeichen. Für alles Weitere legen wir diesen Bereich zu Grunde.

Beispiel 1.3
Eine große Klasse von Glücksspielen beruht auf dem Prinzip des *Totalisators* (zurückgehend auf eine Erfindung des Franzosen P. Oller im Jahre 1865, im angelsächsischen Sprachraum bekannt als „pari-mutuel betting“). Der Totalisator erlaubt es, bei Wetten ohne (bekannte) objektive Wahrscheinlichkeiten – etwa beim Pferderennen, Fußball-Toto etc. – die Quoten dennoch so festzusetzen, dass eine stabile Wette mit negativem Defekt entsteht. Dies erreicht man, *nach* Platzierung aller Einsätze, durch die Vorschrift: $q_k = \frac{\theta \cdot S}{e_k}$. Dabei bedeutet e_k den Gesamtbetrag, den das Spielerkollektiv auf das Ergebnis ω_k gesetzt hat ($1 \le k \le n$). Der Faktor θ, $0 < \theta \le 1$, bezeichnet den Anteil der Gesamteinnahmen S, den der Bankhalter in Form von Gewinnauszahlungen ausschüttet. Üblicherweise ist θ (deutlich) kleiner als 1; vom einbehaltenen Betrag $(1-\theta)S$ („house take“) bestreitet der Bankhalter seinen Erlös, Betriebskosten, Steuern etc. (vgl. Kap. 9 in [Eps67]). Für den Defekt einer Totalisator-Wette ergibt sich: $\delta = 1 - \frac{1}{\theta} < 0$, d. h. aus Sicht des Spielers ist sie stets ungünstig, was – bei angenommenen Wahrscheinlichkeiten – durch $E(G) = (\theta - 1)S < 0$ zum Ausdruck kommt. Im Übrigen kann der Bankhalter positive Nettoquoten offenbar nur dann zusichern, wenn $\theta > (1/S)\max(e_1, \ldots, e_n)$ gewährleistet ist. Dominiert in S daher ein einzelner Einsatzbetrag, so kann die untere Schranke für den Ausschüttungsanteil zu nahe bei 1 liegen und die Bank ihren Verpflichtungen unter Umständen nicht mehr in vollem Umfang nachkommen.[3]

Wetten mit *nachträglich* festgelegten Quoten und wiederholbaren Spieldurchgängen werden zu einem mehrstufigen Geschehen, wenn es dem Spieler erlaubt ist, auf zuvor realisierte Quoten in späteren Durchgängen mit angepassten Einsätzen zu reagieren (in zwei Stufen z.B. beim Pferderennen, wo man aus Vorwetten zunächst sog. Eventualquoten ermittelt und bekannt macht, bevor die abschließenden Wetteinsätze auf dem Rennplatz getätigt werden). Auf die in diesem Zusammenhang auftretenden Fragen der Verhaltensmodellierung kann hier nicht näher eingegangen werden. Vgl. etwa [Rap70] zu Problemen der Optimierung sowie [Sch80],[Sch81] zur Anpassungsdynamik der Wettquotienten.

Spielern erscheint eine Wette häufig interessanter, wenn sie vielfältige Einsatzmöglichkeiten (und damit ’Gewinnklassen’) bietet. Roulette ist dafür ein Beispiel. Außer auf eine einzelne Zahl $(0, 1, \ldots, 36)$ kann man auf eine Reihe zusammengesetzter Ereignisse setzen, etwa auf Querreihen von drei Zahlen, auf Dutzende (1 bis 12, usw.) oder sog. einfache Chancen wie Rot und Schwarz. Für die Bank ist das Wetten auf solche Verbundchancen natürlich nur dann akzeptabel, wenn die zugehörigen Auszahlungsquoten so festgelegt werden, dass die Gewinnerwartung trotz geänderter Spielweise unverändert bleibt.

---

[3] Dass gelegentlich noch Ärgeres passieren kann, zeigt der kuriose Fall einer Lotterie des absolutistischen französischen Staates, die dem in Gelddingen gewieften Philosophen Voltaire ein beträchtliches Vermögen eingebracht haben soll. Dieser entdeckte, zusammen mit dem Mathematiker La Condamine, belastbare Indizien für die Annahme $\theta > 1$ und erwarb mit finanzkräftigen Partnern fast die ganze Los-Auflage. Der Finanzminister war zuerst zufrieden über den guten Absatz, musste am Ende aber den Fehler einräumen und, durch einen Gerichtsbeschluss gezwungen, die Gewinne zu Lasten der Staatskasse ausbezahlen.

Es zeigt sich, dass dies bei stabilen Wetten stets möglich ist, aber auch nur bei diesen. Sei dazu $\Gamma = (\Omega, P, Q)$ beliebig gegeben. Der eben beschriebenen Einführung von Verbundchancen entspricht in unserem Modell der Übergang zu einer Partition $\tilde{\Omega} = \{A_1, \dots, A_m\}$ der Ergebnismenge Ω. Die paarweise disjunkten und Ω ausschöpfenden Ereignisse A_j haben dann die bekannten Wahrscheinlichkeiten $\tilde{p}_j := P(A_j)$, wobei $1 \leq j \leq m \leq n = |\Omega|$ und $\tilde{p}_1 + \cdots + \tilde{p}_m = 1$. Mit den noch festzulegenden Quoten $\tilde{q}_j = \tilde{Q}(A_j)$ erhalten wir eine neue Wette $\tilde{\Gamma} = (\tilde{\Omega}, P, \tilde{Q})$; sie möge *erwartungstreue Vergröberung von* Γ heißen, wenn für den zu $\tilde{Q}$ gehörigen Reingewinn $\tilde{G}$ gilt: $E(\tilde{G}) = E(G)$.

Satz 1.3
$\Gamma = (\Omega, P, Q)$ ist stabil genau dann, wenn es auf jeder Partition $\tilde{\Omega}$ von Ω eine Quotenfunktion $\tilde{Q}$ gibt, für die $\tilde{\Gamma} = (\tilde{\Omega}, P, \tilde{Q})$ eine erwartungstreue Vergröberung von Γ darstellt. Die Quotenfunktion ist in diesem Fall durch die gegebene Partition eindeutig bestimmt.

Beweis: 1. Sei Γ stabil, λ der Stabilitätskoeffizient von Γ und $\tilde{\Omega} = \{A_1, \dots, A_m\}$ eine beliebige Partition von Ω. Wir definieren die Funktion $\tilde{Q} : \tilde{\Omega} \to (1, \infty)$ durch

$$\tilde{Q}(A) := \left(\sum_{\omega \in A} \frac{1}{Q(\omega)} \right)^{-1} \tag{1.3}$$

und zeigen: $E(\tilde{G}) = E(G)$. – Besteht A_j etwa aus den Ergebnissen $\omega_{k_1}, \dots, \omega_{k_j}$, so liefern Gleichung (1.3) und Satz 1.2 mit unseren früheren Bezeichnungen sowie unter Beachtung der Stabilität von Γ:

$$\frac{1}{\tilde{Q}(A_j)} = \frac{1}{\tilde{q}_j} = \frac{1}{q_{k_1}} + \cdots + \frac{1}{q_{k_j}} = \frac{p_{k_1}}{1+\lambda} + \cdots + \frac{p_{k_j}}{1+\lambda} = \frac{\tilde{p}_j}{1+\lambda}. \tag{1.4}$$

Mithin ist auch $\tilde{\Gamma}$ stabil und hat denselben Stabilitätskoeffizienten wie Γ, d. h. es gilt $E(\tilde{G}) = \lambda S = E(G)$.

2. Es werde nun vorausgesetzt, dass sich aus jeder vorgegebenen Partition von Ω durch geeignete Festlegung zugehöriger Quoten eine erwartungstreue Vergröberung $\tilde{\Gamma}$ von Γ herstellen lässt. Zu beliebigem $j \in \{1, \dots, n-1\}$ betrachten wir die spezielle Partition

$$\tilde{\Omega}_j : \{\omega_1\}, \dots, \{\omega_{j-1}\}, \{\omega_j, \omega_{j+1}\}, \{\omega_{j+2}\}, \dots, \{\omega_n\}$$

sowie eine Wette $\tilde{\Gamma}_j = (\tilde{\Omega}_j, P, \tilde{Q}_j)$, für die $E(\tilde{G}_j) = E(G)$ gilt. Ausschließlich auf ω_j und ω_{j+1} mögen irgendwelche nichtnegativen Beträge e_j bzw. e_{j+1} gesetzt werden (in Γ auf die Ergebnisse einzeln, in $\tilde{\Gamma}_j$ die Summe $e_j + e_{j+1}$ auf das aus beiden Ergebnissen bestehende Ereignis). Wendet man Satz 1.1 auf die beiden Gewinnerwartungen an, so ergibt sich:

$$(\tilde{p}_j \tilde{q}_j - 1)(e_j + e_{j+1}) = E(\tilde{G}_j) = E(G) = (p_j q_j - 1)e_j + (p_{j+1} q_{j+1} - 1)e_{j+1}.$$

Bei Wahl von $e_j > 0$ und $e_{j+1} = 0$ erhalten wir hieraus $\tilde{p}_j \tilde{q}_j = p_j q_j$. Im umgekehrten Fall, d. h. für $e_j = 0$ und $e_{j+1} > 0$, ergibt sich $\tilde{p}_j \tilde{q}_j = p_{j+1} q_{j+1}$, insgesamt also $p_j q_j = p_{j+1} q_{j+1}$. Da j alle Werte $1, \dots, n-1$ durchläuft, folgt die Konstanz von $p_k q_k$, $1 \leq k \leq n$, und mittels Satz 1.2, dass Γ erwartungsstabil ist.

3. Es bleibt noch die Eindeutigkeit von $\tilde{Q}$ nachzuweisen. Sei $\tilde{\Gamma} = (\tilde{\Omega}, P, \tilde{Q})$ irgendeine erwartungstreue Vergröberung von Γ. Teil 2 des Beweises entnehmen wir, dass dann Γ und $\tilde{\Gamma}$ stabil sind und denselben Stabilitätskoeffizienten λ besitzen. Sei $A_j \in \tilde{\Omega}$ ein beliebiges Ereignis (wie in Teil 1 des Beweises) mit $\tilde{q}_j = \tilde{Q}(A_j)$ und $\tilde{p}_j = P(A_j)$. Dann ergibt sich für jede außerhalb A_j verschwindende Einsatzverteilung: $(\tilde{p}_j\tilde{q}_j - 1)S = E(\tilde{G}) = E(G) = \lambda S$. Daraus folgt $\frac{1}{\tilde{q}_j} = \frac{\tilde{p}_j}{1+\lambda}$, und man erhält mit derselben Umformung wie in Gleichung (1.4), von rechts nach links laufend, für $\tilde{q}_j$ den gewünschten Ausdruck aus Gleichung (1.3). ⊣

Beispiel 1.4

Vor dem Hintergrund der bisher entwickelten Begriffe lässt sich die Erfindung des Roulette in idealisierter Weise nachvollziehen. Die Versuchsvorrichtung (Kessel) bringt eine gewisse Anzahl gleichwahrscheinlicher Ergebnisse hervor: $\Omega = \{0, 1, \ldots, n\}$ mit $p_k = p = 1/(n+1)$. Die Zählung beginnt bei 0, weil dem damit verbundenen Ergebnis (Zero) eine besondere Rolle zukommt. Einen geeigneten Wert für n findet man dann durch folgende vier Forderungen: (R1) Die Auszahlungsquoten aller wettbaren Ereignisse sind ganze Zahlen ≥ 2. (R2) Das Spiel ist erwartungsstabil mit einem $\lambda < 0$. (R3) Die (negative) Gewinnerwartung ist maximal. (R4) Die Anzahl der Verbundchancen ist maximal. — Zunächst ergibt Satz 1.2 mit (R2), dass die Quoten q_k von $k \in \Omega$ sämtlich denselben Wert q haben; dabei gilt: $\lambda = \frac{q}{n+1} - 1$. Somit ist $\lambda < 0$ gerade bei $q < n+1$ erfüllt, d. h. im Hinblick auf (R3): $q = n$. Für die Quote $Q(A)$ einer beliebigen Verbundchance $A \subset \Omega$ erhalten wir aus Satz 1.3 mit Gleichung (1.3):

$$\frac{1}{Q(A)} = \underbrace{\frac{1}{q} + \cdots + \frac{1}{q}}_{|A|\text{-mal}} = \frac{|A|}{q}$$

und daher $Q(A) = \frac{n}{|A|}$. Um (R4) zu erfüllen, ist folglich ein n mit maximaler Teileranzahl zu wählen. Beschränkt man sich (im Hinblick auf die technischen Erfordernisse eines betriebssicheren Kessels) auf Werte bis 50, so bieten sich $n = 24$ (8 Teiler), $n = 36$ (9 Teiler) und $n = 48$ (10 Teiler) an. Das klassische Roulette-Spiel verwendet neben Zero 36 weitere Kesselfächer[4], es gilt also $\lambda = -1/37$ für das Spiel auf nicht-einfachen Chancen. Bei einfachen Chancen (Rot, Schwarz, etc.) gibt es im Fall von Zero diverse Reglements, die den Wert von λ zur Freude der Spieler noch einmal erhöhen. Vgl. dazu [Dav79].

Wetten mit Nebenauszahlungen

Die unter das bisher entwickelte Schema $\Gamma = (\Omega, P, Q)$ fallenden Glücksspiele sollen im Folgenden *Standard-Wetten* heißen. Einige Glücksspiele stellen insofern keine Standard-Wetten dar, als ihre Auszahlungen einen zusätzlichen Anteil enthalten, der nur indirekt an das Treffer-Ergebnis gekoppelt ist. Dies sei anhand des früheren Beispiels 1.2 („Lustige Sieben") erläutert: Erscheint beim Doppelwurf eine „4", so wird $3e_4$ für den Treffer (brutto) ausgezahlt, darüberhinaus aber auch $2e_5$ für dessen Nachbarfeld in gleicher Zeile. Es wäre daher falsch, den betreffenden Anteil der Gewinnerwartung mit $(p_4q_4 - 1)e_4 = -\frac{27}{36}e_4$ anzugeben; tatsächlich fällt er wegen der Beteiligung der „5" größer aus (und lautet $-\frac{19}{36}e_4$).

Nach Satz 1.1 ist die Gewinnerwartung einer Standard-Wette stets eine Linearkombination der Einsätze mit den speziellen Koeffizienten $p_kq_k - 1$. Hat man daher eine Linearkombination

[4] Dabei fehlt, obwohl möglich, eine eigenständige Verbundchance aus 9 Feldern (mit Quote 4). – Die Variante $n = 24$ ist übrigens in dem Spiel *Roulca* realisiert, das dem Roulette nahe verwandt ist. Es wurde von dem Croupier J. Schlosser während seiner Kriegsgefangenschaft in Frankreich entwickelt und später im Kleinen Saal des Casinos Baden-Baden gespielt.

mit anders aufgebauten Koeffizienten λ_k, so liegt es nahe, diese durch Einführung einer *fiktiven* Quote q'_k in das Standard-Schema zu bringen: $\lambda_k = p_k q'_k - 1$. In Beispiel 1.2 würde etwa für ein solches q'_4 die Bedingung $p_4 q'_4 - 1 = -\frac{19}{36}$ gefordert, woraus sich $q'_4 = \frac{17}{3}$ ergibt. Führt man diesen Abgleich der Reihe nach für jeden der Koeffizienten von $e_1, \ldots, e_n$ durch, so erhält man eine Standard-Wette (Ω, P, Q'), welche dieselbe Gewinnerwartung besitzt wie die ursprüngliche Wette mit Nebenauszahlungen.[5] – Die folgenden Überlegungen setzen diese Grundidee in allgemeiner Form um.

Zunächst erweitern wir das Modell der Standard-Wette um die Möglichkeit von *Nebenauszahlungen*. Bei diesen handelt es sich um Geldbeträge z_k, welche den (mit „nomineller" Quote gebildeten) Brutto-Auszahlungen $q_k e_k$ für das Ergebnis ω_k hinzugerechnet werden. Damit lässt sich der (totale) Bruttogewinn als Zufallsvariable folgendermaßen schreiben:

$$B_Z := \sum_{k=1}^{n} (q_k e_k + z_k) X_k = B + \sum_{k=1}^{n} z_k X_k \tag{1.5}$$

Der letzte Summand stellt die (totale) Nebenauszahlung dar. Kürzen wir sie mit Z ab, so gilt $B_Z = B + Z$ und entsprechend für den Reingewinn: $G_Z = G + Z$. – Eine so definierte Wette mit Nebenauszahlungen Z notieren wir in der Form: $\Gamma|Z = (\Omega, P, Q|Z)$.

Eine einzelne Nebenauszahlung z_k hängt von einem oder mehreren der vom Spieler getätigten Einsätze $e_1, \ldots, e_n$ ab, was wir in der Notation nicht eigens hervorheben. Für die meisten Anwendungen dürfte es ausreichen, z_k als Linearkombination der Einsätze vorauszusetzen (so in Beispiel 1.2). Unter dieser Annahme lässt sich zu jeder Wette vom Typ $\Gamma|Z$ eine Standard-Wette Γ angeben, deren Gewinnerwartung mit der von $\Gamma|Z$ übereinstimmt. – Die dazu erforderlichen Details dieser Reduktion präzisiert der folgende Satz:

Satz 1.4
Sei $\Gamma|Z = (\Omega, P, Q|Z)$ eine Wette mit Nebenauszahlungen der Form $z_k = \zeta_{k,1}\, e_1 + \ldots + \zeta_{k,n}\, e_n$ und $\Gamma' = (\Omega, P, Q')$ die Standard-Wette mit den Quoten $q'_k := q_k + p_k^{-1} E(\zeta_{\cdot,k})$, $1 \le k \le n$.
Dann gilt: $E(G') = E(G_Z)$.

Beweis: Nach den im Anschluss an Gleichung 1.5 gemachten Bemerkungen hat die Wette $\Gamma|Z$ die Gewinnerwartung $E(G_Z) = E(G) + E(Z)$. Wir werten zunächst $E(Z)$ aus und erhalten

$$\begin{aligned} E(Z) &= \sum_{k=1}^{n} p_k z_k = \sum_{k=1}^{n} p_k \left(\sum_{j=1}^{n} \zeta_{k,j}\, e_j \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_k \zeta_{k,j}\, e_j = \underset{\cdots\cdots}{\text{(Umordnung der Summe)}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_j \zeta_{j,k} \right) e_k. \end{aligned}$$

Der in der letzten Summe erscheinende Koeffizient von e_k lässt sich als Erwartungswert $E(\zeta_{\cdot,k})$ auffassen, wo $\zeta_{\cdot,k}$ die Zufallsvariable bezeichnet, die bei Auftreten von ω_j den Wert $\zeta_{j,k}$ annimmt. Andererseits besagt die Voraussetzung nach leichter Umformung: $E(\zeta_{\cdot,k}) = p_k q'_k - p_k q_k$. Damit

[5] In anderen Eigenschaften können sich die beiden Wetten aber durchaus unterscheiden, z. B. hinsichtlich der individuellen Auszahlungen oder der Varianz des Reingewinns.

erhält man $E(Z) = \sum_{k=1}^{n}(p_k q'_k - p_k q_k)e_k$, und unter Anwendung von Satz 1.1:

$$E(G_Z) = \sum_{k=1}^{n}((p_k q_k - 1) + E(\zeta_{\cdot,k}))e_k = \sum_{k=1}^{n}((p_k q'_k - 1)e_k = E(G'). \qquad \dashv$$

Mit der hier beschriebenen Vorgehensweise lassen sich auch Wetten, die mehrstufig in zeitlicher Folge stattfinden, als Wetten mit Nebenauszahlungen darstellen (und damit dann hinsichtlich ihrer Gewinnerwartung auch im Modell der Standard-Wette abbilden). Davon wird in Abschnitt 4 Gebrauch gemacht.

1.3 Gewinnsichere Einsatzverteilungen

Ist $\Gamma = (\Omega, P, Q)$ irgendeine Standard-Wette, so liegt es aus Sicht des Spielers nahe, eine Einsatzverteilung $(e_1, \ldots, e_n)$ zu suchen, bei welcher er unabhängig vom Ergebnis des Zufallsversuchs – also auch ohne Kenntnis oder Verfügbarkeit von P – einen positiven Gewinn erzielen kann. Dementsprechend werde definiert: Γ *erlaubt Gewinnabsicherung*, wenn eine Einsatzverteilung $(e_1, \ldots, e_n)$ existiert mit

$$g_k(e_1, \ldots, e_n) := G(\omega_k) = q_k e_k - S > 0 \qquad \text{für alle } k = 1, \ldots, n. \tag{1.6}$$

Man gelangt zu einer etwas verschärften Fragestellung, wenn zu jedem $k \in \{1, \ldots, n\}$ ein individueller positiver Reingewinn[6] $a_k > 0$ vorgegeben wird. In diesem Fall hat die gesuchte Einsatzverteilung folgendem linearen Gleichungssystem zu genügen:

$$\mathfrak{G}^{(n)}\,(e_1, \ldots, e_n)^T = (a_1, \ldots, a_n)^T \tag{1.7}$$

mit der quadratischen Matrix

$$\mathfrak{G}^{(n)} = \begin{pmatrix} \hat{q}_1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \hat{q}_1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \hat{q}_n \end{pmatrix}.$$

Die Frage der Gewinnabsicherung hat eine besonders einfache Antwort für den speziellen Fall $a_1 = \ldots = a_n = a > 0$ (vgl. [Sch77]). Dazu denken wir uns die Einsatzverteilung durch Aufteilen einer fest vorgegebenen Einsatzsumme S auf sämtliche Spielergebnisse aus Ω entstanden. Aus Gleichung (1.6) wird dann $q_k e_k = a + S$. Intuitiv ist klar (und direkt anhand von Satz 1.1 nachzurechnen), dass dann $E(G) = a$ bei beliebiger Wahrscheinlichkeitsfunktion P gilt. Andererseits erhalten wir für die Einsätze $e_k = \frac{a+S}{q_k}$ mit Hilfe von Satz 1.1:

$$E(G) = \sum_{k=1}^{n}(p_k q_k - 1)\frac{a+S}{q_k} = (a+S)\left(\sum_{k=1}^{n} p_k - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{q_k}\right) = (a+S)\cdot\delta(\Gamma)$$

[6] Das n-Tupel dieser Werte, wenn es denn realisierbar ist, könnte man mit gewissem Recht *„Arbitragevektor“* nennen.

und somit insgesamt für die gesuchten Einsätze die zweifache Darstellung:

$$e_k = \frac{a}{q_k\,\delta} = \frac{1}{q_k} \cdot \frac{S}{1-\delta}. \tag{1.8}$$

Hieraus ist abzulesen, dass Γ Gewinnabsicherung erlaubt, wenn sein Defekt δ positiv ist. In diesem Fall ist die Wette zudem erwartungsstabil, wobei sich aus $E(G) = a$ für den Stabilitätskoeffizienten von Γ ergibt: $\lambda = S^{-1}a = (1-\delta)^{-1}\delta$.

Spieltheoretische Deutung

Die Wette Γ lässt sich als Zwei-Personen-Nullsummenspiel auffassen. Die Quoten denke man sich dazu konstant vorgegeben. Spieler I (das Spielerkollektiv) und Spieler II (die Bank) wählen jeder für sich ein Ergebnis aus Ω, und zwar der Spieler nach eigenem Gutdünken, die Bank hingegen rein zufällig (nach Maßgabe des Zufallsmechanismus für die von ihr angebotene Wette). Benutzt der Spieler bei diesem „Spiel gegen den Zufall" den Einsatzbetrag 1, so ist $\mathfrak{G}^{(n)}$ gerade die Auszahlungsmatrix von Γ. Offensichtlich hat sie keinen Sattelpunkt (Maximin-Wert $= -1$, Minimax-Wert $= \min(\hat{q}_1, \ldots, \hat{q}_n) \geq 0$). Nach dem Hauptsatz über Matrixspiele besitzt aber die gemischte Erweiterung von Γ einen Sattelpunkt. In dieser verwendet der Spieler als seine Strategien n-Tupel $\sigma = (s_1, \ldots, s_n)$ von Anteilen $s_k = e_k/S$ der Einsatzbeträge auf ω_k an der festen Einsatzsumme S. Die Strategien der Bank sind die Wahrscheinlichkeitsverteilungen $\pi = (p_1, \ldots, p_n)$, über die sie das Spiel in ihrem Sinne an die vorliegenden Quoten anpassen kann. Die Sattelpunkt-Lösung ist nun ein Paar von (optimalen) Strategien $(\sigma^\circ, \pi^\circ)$, bei deren Verwendung die mittlere Auszahlung einen bestimmten Wert γ erreicht (den sog. Wert des Spiels), der vom Spieler mindestens erzielt werden und als Verlust bei der Bank höchstens zu Buche schlagen kann. Die reinen Strategien beider Parteien sind untereinander gleichberechtigt und keine wird in einer optimalen gemischten Strategie fehlen. Mit ihrem π° erreicht die Bank jedenfalls, dass für alle k gilt: $E(G|\text{Spieler wählt } \omega_k) = p_k^\circ q_k - 1 = \gamma$. Die Wette ist also nach Satz 1.2 erwartungsstabil und wir haben $\lambda = \gamma$, d. h. *der Stabilitätskoeffizient ist nichts anderes als der Wert des Spiels im spieltheoretischen Sinn*. Benutzt der Spieler sein σ°, so wird entsprechend $E(G|\text{Bank wählt } \omega_k) = s_k^\circ q_k - 1 = \gamma$. Mit S multipliziert ergibt dies: $g_k(e_1, \ldots, e_n) = e_k q_k - S = \gamma \cdot S$; der Spieler erzielt also einen konstanten Reingewinn, der bei $\gamma > 0$ positiv ausfällt.

Die Bank sorgt dafür, dass die Wette stabil ist. Um dem Spieler keine Gewinnabsicherung zu erlauben, muss der Defekt ≤ 0 werden. Denn wird auf sämtliche Spiel-Ergebnisse gesetzt, so entspricht das einer Wette auf das sichere Ereignis Ω. Nach Satz 1.3 (sowie Gleichung (1.3)) ist diese stärkste Vergröberung erwartungstreu, wenn die zu Ω gehörige Verbundquote q der Bedingung $1/q = 1/q_1 + \ldots + 1/q_n$ genügt. Daraus folgt: $\delta = 1 - (1/q)$. Da ein sicherer Gewinn genau bei $q > 1$ erzielbar wäre, muss $q \leq 1$ sein, besser noch $q < 1$ (wobei Ω nicht als eigenständige Verbundchance in Erscheinung tritt). In diesem Fall ist $\delta \leq 0$. Somit ergibt sich, wenn man das im Anschluss an Gleichung (1.8) Gesagte hinzunimmt: $\delta(\Gamma) > 0$ ist hinreichend und notwendig dafür, dass die Wette Γ Gewinnabsicherung erlaubt. – Nachstehender Satz gibt weitere Kennzeichnungen:

Satz 1.5

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. Γ erlaubt Gewinnabsicherung.
2. Der Defekt von Γ ist positiv.
3. Das Gleichungssystem (1.7) ist eindeutig lösbar.
4. Für alle Einsatzverteilungen gilt: $g_1 + \ldots + g_n > 0$.

Beweis: Für die Aussagen (1), (2), (3) wird ein Ringschluss durchgeführt, anschließend die Äquivalenz von (4) und (2) gesondert nachgewiesen.

(1) $\Rightarrow$ (2): Sind $e_1, \ldots, e_n$ Einsätze mit $g_k = e_k q_k - S > 0 \;\; (1 \leq k \leq n)$, so hat man $1/q_k < e_k/S$, woraus sofort folgt: $\delta = 1 - \sum_{k=1}^n (1/q_k) > 1 - \sum_{k=1}^n (e_k/S) = 0$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Man überzeugt sich von der Regularität der Matrix $\mathfrak{G}^{(n)}$, etwa durch den (hier unterdrückten) Nachweis von $\det \mathfrak{G}^{(n)} = \delta(\Gamma) \cdot (q_1 q_2 \cdot \ldots \cdot q_n) > 0$.

(3) $\Rightarrow$ (1): trivial.

(2) $\Rightarrow$ (4): Sei $(e_1, \ldots, e_n)$ eine beliebige Einsatzverteilung. Mit $q := \min(q_1, \ldots, q_n)$ gilt:

$$\sum_{k=1}^n \frac{g_k}{qS} \geq \sum_{k=1}^n \frac{g_k}{q_k S} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{e_k}{S} - \frac{1}{q_k} \right) = 1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{q_k} = \delta > 0.$$

(4) $\Rightarrow$ (2): Zu $k \in \{1, \ldots, n\}$ betrachten wir eine Einsatzverteilung $(0, \ldots, 0, e_k, 0, \ldots, 0)$ mit positivem e_k an k-ter Stelle. Damit wird $g_1 + \ldots + g_n = q_k e_k - n e_k > 0$, also $1/q_k \leq 1/(n+1)$, und es folgt

$$\delta = 1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{q_k} \geq 1 - \frac{n}{n+1} > 0. \qquad \dashv$$

Die nach Satz 1.5 eindeutige Lösung des Gleichungssystems (1.7) lässt sich explizit angeben.

Satz 1.6
Sei Γ eine Wette mit Defekt $\delta \neq 0$ und $a_1, \ldots, a_n$ beliebige nichtnegative Zahlen (vorgegebene Reingewinne). Dann hat das Gleichungssystem (1.7) eine eindeutig bestimmte Lösung $(e_1, \ldots, e_n)$, für die gilt:

$$e_k = \frac{1}{q_k} \left(a_k + \frac{1}{\delta} \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{q_j} \right) \qquad (1 \leq k \leq n) \tag{1.9}$$

Beweis: Zunächst resultiert für die Summe $S = e_1 + \cdots + e_n$ der in Gleichung (1.9) genannten Werte

$$S = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{q_k} + \left(\frac{1}{\delta} \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{q_j} \right) \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{q_k} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{q_k} \left(1 + \frac{1}{\delta}(1 - \delta) \right) = \frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{q_k}$$

und damit für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$:

$$g_k(e_1, \ldots, e_n) = q_k e_k - S = a_k + \frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{q_k} - S = a_k.$$

Die Eindeutigkeit folgt (wie in Satz 1.5) direkt aus $\det \mathfrak{G}^{(n)} = \delta \cdot (q_1 q_2 \cdot \ldots \cdot q_n) \neq 0$. $\dashv$

Die frühere Lösung (1.8) für konstanten „Arbitragegewinn" a ist in Gleichung (1.9) als Sonderfall enthalten. Für eine Wette, die Gewinnabsicherung erlaubt ($\delta > 0$), sind zudem sämtliche Einsätze positiv (sofern nicht alle $a_1, \ldots, a_n$ Null sind). Will ein Spieler etwa ausschließlich auf ω_j setzen (und Gewinn erzielen), d. h. $a_j > 0$ und $a_k = 0$ für alle $k \neq j$, so liefert Gleichung (1.9) die Einsätze[7]

$$e_k = \frac{a_j}{q_k} \left(\delta_{jk} + \frac{1}{q_j \delta} \right) \qquad (1 \leq k \leq n)$$

[7] Hier ist δ_{jk} das Kronecker-Symbol, das für $j = k$ den Wert 1, andernfalls den Wert 0 annimmt.

1.4 Wetten auf Wartezeiten

Ausgangspunkt für die folgende Anwendung ist ein nach Belieben unabhängig wiederholbarer Zufallsversuch mit zwei Ergebnissen, *Treffer* und *Fehlschlag*, sowie der Treffer-Wahrscheinlichkeit p, $0 < p < 1$. Setzt ein Spieler auf das mit fester Auszahlungsquote q versehene Treffer-Ereignis, so werde diesbezüglich von einer *Einzelwette* gesprochen. Wie gewohnt schreiben wir $\lambda = pq - 1$.

Der Spieler nehme sich vor, die Einzelwette bis zum ersten Auftreten eines Treffers zu spielen. Auf diese Weise entsteht ein neuer Zufallsversuch, dessen Ergebnismenge $\Omega = \{1,2,3,\ldots\}$ aus den Wartezeiten für einen Treffer besteht (und daher nicht endlich ist). Ferner werde angenommen, dass der Spieler – etwa wegen beschränkter Zeit- und Geldressourcen – nach einer bestimmten Anzahl N von Durchgängen abbricht, auch wenn er bis dahin noch keinen Treffer erzielt hat.

Durch die Wiederholung der Einzelwette entsteht zeitlich sukzessive eine Folge von Einsätzen $e_1, e_2, e_3, \ldots$ mit $e_k = 0$, $k \geq n_0$ für ein $n_0 \in \Omega$, das man sich ohne Einschränkung minimal gewählt denken kann (als Wartezeit des ersten Treffers). Der Spieler möge nun eine Höchstsumme S für seine Einsatzfolge $e_1, e_2, \ldots, e_N$ in der Weise aufbringen, dass er den Betrag e_k auf die Wartezeit $k \in \{1,\ldots,N\}$ wettet, wobei $S = e_1 + \ldots + e_N$ gilt. Bei $n_0 \leq N$ erfolgt eine Auszahlung von brutto $q\,e_{n_0}$, anderenfalls geht der Gesamtbetrag S verloren. Da der Spieler nur bei einem Fehlschlag weiterspielen würde, lässt sich seine Wettstrategie statt sukzessive ebensogut durch eine auf einen Schlag vorab festgelegte (und bereitgestellte) Einsatzverteilung $(e_1, e_2, \ldots, e_N)$ kennzeichnen. Bei Auszahlungen im Treffer-Fall ist dann lediglich dafür zu sorgen, dass eventuell nicht verwendete Einsätze zurückerstattet werden.

Die soweit geschilderte *Wartezeiten-Wette* lässt sich somit als Wette $\Gamma|Z_N = (\Omega, P, Q|Z_N)$ mit Nebenauszahlung darstellen, wo $\Omega = \{k \,|\, k \geq 1 \text{ ganz}\}$ sowie für $k \in \{1,\ldots,N\}$ gilt:

$$p_k = P(k) = (1-p)^{k-1}p \quad \text{und} \quad q_k = Q(k) = q \tag{1.10}$$

$$z_{N,k}(e_1,\ldots,e_N) = e_{k+1} + \cdots + e_N \tag{1.11}$$

Außer dem Reingewinn G_{Z_N}, kurz als G_N notiert, ist der Betrag S_N von Interesse, welcher von der Gesamtsumme S tatsächlich aufzubringen ist, um an einem Spieldurchgang von $\Gamma|Z_N$ teilzunehmen. – Der folgende Satz macht Aussagen über die zugehörigen Erwartungswerte:

Satz 1.7

1. $E(S_N) = \sum_{k=1}^{N}(1-p)^{k-1}e_k$
2. $E(G_N) = \lambda \cdot E(S_N)$

Beweis: Zu 1. S_N ist darstellbar als die Summe $e_1 + (1-X_1)e_2 + (1-X_1)(1-X_2)e_3 + \cdots$. Beim Übergang zum Erwartungswert sind demnach die Terme $E((1-X_1)\cdot\ldots\cdot(1-X_{k-1}))$ auszuwerten. Beachtet man die Unabhängigkeit der Versuche, so ergibt sich: Der Erwartungswert aller auftretenden Produkte $X_{j_1}\cdot\ldots\cdot X_{j_r}$ mit lauter verschiedenen Indizes $(1 \leq j_1 < \ldots < j_r \leq k-1)$ verschwindet für $r \geq 2$ und es bleibt allein

$$E(S_N) = \sum_{k=1}^{\infty} E((1-X_1)\cdot\ldots\cdot(1-X_{k-1}))e_k = \sum_{k=1}^{N}(1-(E(X_1)+\cdots+E(X_{k-1})))e_k.$$

Schließlich erhalten wir unter Berücksichtigung von (1.10) und nach Summierung der entstehenden geometrischen Reihe: $E(X_1) + \cdots + E(X_{k-1}) = p_1 + \cdots + p_{k-1} = 1 - (1-p)^{k-1}$ und damit die Behauptung 1.

Zu 2. Wir berechnen $E(G_N)$ als den (übereinstimmenden) Erwartungswert der nach Satz 1.4 garantierten Standard-Wette mit den dort angegebenen Quoten $q'_k = q_k + p_k^{-1} E(\zeta_{\cdot,k})$.[8] Offenbar haben die Nebenauszahlungen $z_{N,k}$ die dazu verlangte Form von Linearkombinationen der Einsätze. Deren Koeffizienten ergeben sich aus (1.11) als $\zeta_{k,1} = \ldots = \zeta_{k,k} = 0$, $\zeta_{k,k+1} = \ldots = \zeta_{k,N} = 1$ sowie $\zeta_{k,j} = 0$ für $j > N$. Mittels einfacher Überlegungen wird dann $E(\zeta_{\cdot,k}) = 0$ für $k > N$ und $E(\zeta_{\cdot,k}) = \sum_{j=1}^{k-1} \zeta_{j,k} p_j = p_1 + \cdots + p_{k-1} = 1 - (1-p)^{k-1}$ für $k \le N$, und wir erhalten die fraglichen Quoten der Standard-Wette:

$$q'_k = q_k + \frac{E(\zeta_{\cdot,k})}{(1-p)^{k-1} p} = q - \frac{1}{p} + \frac{1}{(1-p)^{k-1} p} \qquad (1 \le k \le N).$$

Hieraus resultiert nach wenigen Umformungsschritten: $p_k q'_k - 1 = (pq-1)(1-p)^{k-1}$ und schließlich (mit Satz 1.4 und Satz 1.1) die Behauptung 2:

$$E(G_N) = E(G') = \sum_{k=1}^{\infty} (p_k q'_k - 1) e_k = (pq-1) \sum_{k=1}^{N} (1-p)^{k-1} e_k. \qquad \dashv$$

Satz 1.7 bringt die Erwartungsstabilität der Wartezeiten-Wette zum Ausdruck. Der Spieler erhält durchschnittlich denselben Anteil λ des von ihm effektiv eingesetzten Betrags wie in der unterliegenden Einzelwette. Insbesondere kann er sich keine Einsatzfolge zurechtlegen, die das (allein durch $\lambda = pq - 1$ bestimmte) Vorzeichen von $E(G_N)$ beeinflusst.[9] Gleichwohl scheint die Spieler-Fantasie beim Ausdenken vermeintlich wirksamer „Wettsysteme“ keine Grenzen zu kennen [Eps67, S. 59 f]. Eines der bekanntesten ist das Verdoppeln der Einsätze auf den einfachen Chancen ($\hat{q} = 1$) beim Roulette. Es sichert im Treffer-Fall einen nur bescheidenen Gewinn, führt jedoch bei anhaltenden Fehlschlägen rasch zu hohen Einsatzbeträgen und, bei Überschreiten der Wartezeit N, zu ruinösen Verlusten. Natürlich lassen sich solche Verluste abmildern, wenn man weniger stark wachsende Einsatzfolgen verwendet. Allerdings ist es dann nicht mehr zu vermeiden, dass auch ein Treffer zur ‘rechten’ Zeit einen Verlust hervorbringen kann.

Der folgende Satz zeigt, dass *jegliche* Einsatzfolge, die den Spieler gegen Verluste bei einem Treffer innerhalb des vorgegebenen Wartezeit-Intervalls $[1,N]$ schützt und ihm einen positiven Reingewinn sichert, eine wachsende geometrische Progression zur Minorante hat.

Satz 1.8
Sei $\sigma > 0$ beliebig reell und $e_1, \ldots, e_N$ eine Einsatzfolge, die bei jeder Wartezeit $k \in \{1, \ldots, N\}$ einen Reingewinn $\ge \sigma$ liefert. Dann gilt:

$$e_k \ge \frac{\sigma}{q-1} \left(1 + \frac{1}{q-1}\right)^{k-1} \qquad (1 \le k \le N) \qquad (1.12)$$

[8] Satz 1.4 bleibt auch im vorliegenden Fall einer abzählbar-unendlichen Ergebnismenge gültig, sofern nur endlich viele von Null verschiedene Einsätze im Spiel sind. Dasselbe gilt von Satz 1.1.

[9] Z. B. kann der Spieler bei $\lambda = 0$ im Mittel keinen Zugewinn durch Teilnahme an der Wette erwarten. Das steht in Einklang mit einer Aussage aus der Theorie der Martingale, wonach in einem fairen Spiel der Erwartungswert des Kapitals eines Spielers zu irgendeinem Zeitpunkt mit seinem Kapital zu Spielbeginn übereinstimmt. Bzgl. der Martingal-Theorie, die meist in einem allgemeinen maßtheoretischen Rahmen entwickelt wird, siehe etwa [Hes03].

Ist der Reingewinn konstant $= \sigma$, so gilt auch in (1.12) Gleichheit. In diesem Fall hat man $\sigma = e_1(q-1)$ und die Einsatzfolge ist geometrisch mit dem Wachstumsfaktor $1+1/(q-1)$.

Beweis: Bei einem ersten Treffer mit der Wartezeit $k \in \{1,\ldots,N\}$ beträgt – nach erfolgter Nebenauszahlung $z_{N,k}$ – der Reingewinn $qe_k - (e_1 + \cdots + e_k) \geq \sigma$. Die behauptete Ungleichung (1.12) ergibt sich hieraus durch vollständige Induktion nach k. – Bei konstantem Gewinn hat man für $k=1$ sofort $e_1(q-1) = qe_1 - e_1 = \sigma$.[10] ⊣

Die wichtigste Konsequenz von Satz 1.8 ist diese: Um die Wirkung von Einsatzfolgen zu untersuchen, die dem Spieler bei einem Treffer mit Wartezeit $\leq N$ einen positiven Gewinn garantieren, können wir uns ohne nennenswerte Einbuße an Allgemeinheit auf den Spezialfall der geometrischen Progression

$$e_k = e_1\left(1+\frac{1}{q-1}\right)^{k-1} \qquad (1 \leq k \leq N) \tag{1.13}$$

beschränken. Dabei interessiert in erster Linie das Verhalten von Gewinnerwartung und zugehöriger Varianz, wenn die Wartezeitgrenze N gegen ∞ geht. Die benötigten expliziten Formeln liefert der folgende Satz.

Satz 1.9
Verwendet ein Spieler die in (1.13) gegebene Einsatzfolge für die Durchgänge $k = 1,\ldots,N$ einer Wartezeiten-Wette $\Gamma|Z_N$ und hat in der zugrundeliegenden Einzelwette der Treffer die Wahrscheinlichkeit p und die Quote q, so gilt für den Erwartungswert und die Varianz des Reingewinns G_N:

$$E(G_N) = e_1(q-1)\left(1-\left(1-\frac{pq-1}{q-1}\right)^N\right) \tag{1.14}$$

$$V(G_N) = e_1^2(q-1)^2(1-p)^N\left(1-(1-p)^N\right)\left(1+\frac{1}{q-1}\right)^{2N} \tag{1.15}$$

Beweis: $E(G_N)$ ergibt sich dadurch, dass man mit den Einsätzen (1.13) die in Satz 1.7 aufgestellte Formel (als geometrische Reihe) auswertet.

Für die Varianz gilt $V(G_N) = E(G_N^2) - E(G_N)^2$ nach einer bekannten Formel. Da bei Ausbleiben eines Treffers die Summe $S = e_1 + \cdots + e_N = e_1(q-1)((1+1/(q-1))^N - 1)$ mit der Wahrscheinlichkeit $(1-p)^N$ verloren geht, im anderen Fall jedoch der Reingewinn $e_1(q-1)$ entsteht, erhalten wir

$$\begin{aligned} E(G_N^2) &= e_1^2(q-1)^2\left(1-(1-p)^N\right) + S^2(1-p)^N \\ &= e_1^2(q-1)^2\left(1-(1-p)^N + (1-p)^N\left(\left(1+\frac{1}{q-1}\right)^N - 1\right)^2\right). \end{aligned}$$

Den Rest bilden eine Reihe einfacher, aber etwas langwieriger Umformungen, die an dieser Stelle ausgespart bleiben können. ⊣

[10] Für $q=2$ ergibt sich als Spezialfall die bereits erwähnte Verdopplungsstrategie. Derartige Einsatzprogressionen, mit denen Spieler Verluste nachträglich zu kompensieren suchen, wurden schon früh als „Martingale“ bezeichnet. R. de Possel: „. . . la martingale prescrive de continuer le jeu pour essayer de se rattraper.“ [Pos36, S. 25]

Beim Grenzübergang $N \to \infty$ bleibt das Vorzeichen der Gewinnerwartung erhalten; dabei entsteht für $\lambda < 0$ eine bestimmte Divergenz. Dies und das Ergebnis in den Fällen, wo λ positiv oder null ist, lassen sich ohne weiteres an Gleichung (1.14) aus Satz 1.9 ablesen. Es gilt:

$$\lim_{N\to\infty} E(G_N) = \begin{cases} e_1(q-1) & \text{falls } q > \frac{1}{p} \quad (\lambda > 0) \\ 0 & \text{falls } q = \frac{1}{p} \quad (\lambda = 0) \\ -\infty & \text{falls } q < \frac{1}{p} \quad (\lambda < 0) \end{cases}$$

Einen naiven Anwender des geometrischen Martingals würde möglicherweise die Tatsache überraschen, dass sich $1/p$ als kritischer Wert der Auszahlungsquote erhärtet, oberhalb dessen die Gewinnerwartung auch der Wartezeiten-Wette konstant-positiv ausfällt, unterhalb dessen sie aber unbeschränkte negative Werte annimmt, obwohl er doch – gerade beim Hinausschieben der Wartezeitgrenze N – jederzeit wähnt, er brauche nur auf einen Treffer zu warten, um einen positiven Betrag zu gewinnen.

Ihren Realitätsbezug erhält die hier untersuchte Gewinnerwartung freilich erst, wenn die durch sie bewertete Folge $G_1, G_2, \ldots, G_N, \ldots$ einem (starken) Gesetz der großen Zahlen genügt, demzufolge die arithmetischen Abweichungsmittel $N^{-1}\sum_{k=1}^{N}(G_k - E(G_k))$ fast sicher gegen Null streben. Das ist (für unabhängige Zufallsvariablen, die hier vorliegen) nach einem bekannten Kriterium von Kolmogorov jedenfalls dann der Fall, wenn die Summe $\sum_{N=1}^{\infty} N^{-2}V(G_N)$ konvergiert. Von der Varianz wird man in vorliegender Situation sinnvollerweise *Beschränktheit*[11] verlangen. Ersichtlich ist damit das Kolmogorov-Kriterium erfüllt (und auch das Umgekehrte ist der Fall).

Somit stellt sich die Frage nach der Existenz eines kritischen Werts q_{krit} für die Auszahlungsquote, welcher die Wartezeit-Wetten mit beschränkter Varianz von allen übrigen trennt. Die Antwort wird in nachstehendem Satz gegeben.

Satz 1.10
Unter den Voraussetzungen von Satz 1.9 und mit der Bezeichnung

$$q_{\text{krit}} = \frac{1}{1-\sqrt{1-p}}$$

gilt:

$$\lim_{N\to\infty} V(G_N) = \begin{cases} 0 & \text{falls } q > q_{\text{krit}} \\ e_1^2(q-1)^2 & \text{falls } q = q_{\text{krit}} \\ \infty & \text{falls } q < q_{\text{krit}} \end{cases}$$

Beweis: Mit den Abkürzungen $\alpha = 1-p$ und $\beta = 1+\frac{1}{q-1}$ lautet die Gleichung (1.15) aus Satz 1.9: $V(G_N) = e_1^2(q-1)^2(1-\alpha^N)(\alpha\beta^2)^N$, und man sieht (unter Beachtung von $0 < \alpha < 1$): $V(G_N)$ ist beschränkt genau dann, wenn $\alpha\beta^2 \leq 1$. Als gleichwertig damit erweist sich nach kurzem Umformen die Bedingung $q \geq q_{\text{krit}}$. Für $q = q_{\text{krit}}$, d. h. im Falle $\alpha\beta^2 = 1$, strebt $V(G_N)$ für $N \to \infty$ gegen $e_1^2(q-1)^2$, sonst gegen 0. ⊣

[11] W. Feller hat nachdrücklich auf die entscheidende Bedeutung hingewiesen, die der Varianz in diesem Zusammenhang zukommt; vgl. Abschnitt X.3 über die Theorie „fairer" Spiele in [Fel68], ferner auch [Fel45].

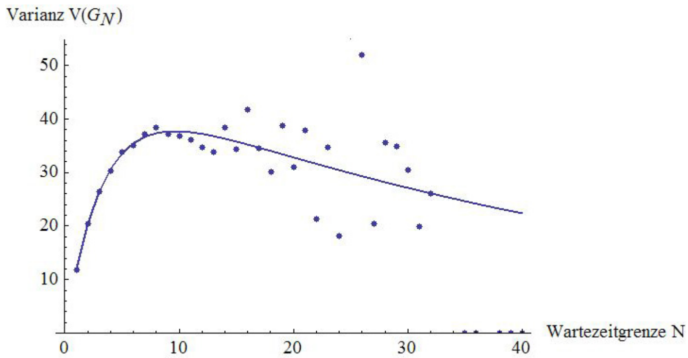
Die in Satz 1.10 genannte kritische Grenze q_{krit} für die Auszahlungsquote ist in zweifacher Hinsicht von grundsätzlichem Interesse: Einerseits genügen bei $q \geq q_{\text{krit}}$ die Gewinnerwartungen dem starken Gesetz der großen Zahlen, und für den Spieler ergibt sich der Vorteil beschränkter Varianz, im Fall $q > q_{\text{krit}}$ sogar gegen Null tendierender Schwankungen beim Gewinn. Andererseits divergiert die Varianz bereits bei einer Quote unterhalb von q_{krit}. Umso bemerkenswerter ist es, dass die neue kritische Grenze deutlich über dem früheren (an der Gewinnerwartung orientierten) Wert $1/p$ liegt:

$$q_{\text{krit}} = \frac{1}{1-\sqrt{1-p}} > \frac{1}{p} \qquad \text{für alle } p \in (0,1)$$

Das heißt: In allen „fairen" und in einem beträchtlichen Teil „günstiger" Wetten (mit positiver Gewinnerwartung, jedoch einer Quote q mit $1/p < q < q_{\text{krit}}$) wächst die Varianz exponentiell gegen ∞, und dem Spieler drohen immer mehr aus dem Ruder laufende Verluste. Bei den Wartezeiten-Wetten erweisen sich somit Einstufungen, die sich allein auf die Gewinnerwartung stützen, als unzulänglich und zum Teil widersinnig. Auf eine im Lichte der Varianz günstige Konstellation trifft der Spieler erst bei einer Quote $q > q_{\text{krit}}$.

Beispiel 1.5

Eine Einzelwette habe die Treffer-Wahrscheinlichkeit $p = 1/4$. „Fair" nach Maßgabe der Gewinnerwartung wäre somit die Auszahlungsquote 4. Nach Maßgabe der Varianz beginnen faire und günstige Wetten hingegen erst bei $q_{\text{krit}} = 4 + 2\sqrt{3} \approx 7{,}4941$. Für die geringfügig größere Quote 8 wurden nun zu den Wartezeitgrenzen $N = 1, 2, \ldots, 40$ komplette Spielverläufe simuliert (zu jedem N insgesamt 10000). Der Starteinsatz beträgt $e_1 = 1$ Euro. – Das Ergebnis zeigt: Die theoretische Varianz (in der Grafik etwas sinnwidrig, aber



besser kenntlich als durchgezogene Kurve gezeichnet) nimmt für $N = 10$ ein absolutes Maximum an – offenbar die heikelste Region für den Spieler – und nimmt danach allmählich, aber beständig gegen Null ab. Die empirischen Varianzwerte liegen bis zum Maximum nah zur Kurve, folgen dem theoretischen Verlauf dann aber nicht mehr so eng; denn bei längeren Wartezeiten fallen die Verluste stärker ins Gewicht, treten aber auch immer seltener auf. Bei Werten etwa ab $N = 30$ gelingt es trotz der großen Zahl von Spieldurchführungen immer weniger oder gar nicht, das Nichtauftreten eines Treffers zu beobachten, sodass – wie die empirischen Werte auf Nullniveau bestätigen – kaum ein Beitrag zur Varianz zustande kommt.

Eine gute Nachricht für Spieler ist dies natürlich dennoch nicht. Kein Bankhalter wird jemals eine so günstig konstellierte Wette anbieten, abgesehen davon, dass feinabgestufte Einsatzfolgen, wie sie für das geometrische Martingal zur Quote $q = 8$ benötigt werden, nirgendwo Akzeptanz fänden. Immerhin hätte ein Spieler selbst nach 30 Fehlschlägen lediglich ca. 432 Euro eingebüßt (und das, um 7 Euro zu gewinnen).

Literaturverzeichnis

[Beh06] BEHRENDS, E.: *Zocker gegen Geist*. DMV-Mitteilungen, 14(2):89–92, 2006.

[Dav79] DAVIES, P. / ROSS, A.S.C.: *Repeated zero at roulette*. The Mathematical Gazette, 63:54–56, 1979.

[Eps67] EPSTEIN, R.A.: *The Theory of Gambling and Statistical Logic*. Academic Press, New York - London, 1. Auflage, 1967.

[Fel45] FELLER, W.: *Note on the law of large numbers and "fair"games*. Ann. Math. Statist., 16:301–304, 1945.

[Fel68] FELLER, W.: *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Band 1. John Wiley & Sons, Inc., New York - London - Sydney, 3. Auflage, 1968.

[Fin64] FINETTI, B. DE: *Foresight: Its Logical Laws, Its Subjective Sources* (1937). In: H.E. KYBURG, JR. / H.E. SMOKLER (Herausgeber): *Studies in Subjective Probability*, Seiten 95–158. Wiley & Sons, New York - London - Sydney, 1964.

[Hes03] HESSE, CHR.: *Angewandte Wahrscheinlichkeitstheorie. Eine fundierte Einführung mit über 500 realitätsnahen Beispielen und Aufgaben*. Vieweg, Braunschweig - Wiesbaden, 2003.

[Pos36] POSSEL, R. DE: *Sur la théorie mathématique des jeux de hasard et de réflexion*. Hermann & Cie., Paris, 1936.

[Pou05] POUNDSTONE, W.: *Fortune's Formula. The Untold Story of the Scientific Betting System that Beat the Casinos and Wall Street*. Hill and Wang, New York, 2005.

[Rap70] RAPOPORT, A.; JONES, L.V.; KAHAN J.P.: *Gambling Behavior in Multiple-Choice Betting Games*. Journal of Mathematical Psychology, 7:12–36, 1970.

[Sch77] SCHREIBER, A.: *Über Spiele mit Quoten*. Elemente der Mathematik, 32:118–123, 1977.

[Sch80] SCHREIBER, A.: *Zur Anpassungsdynamik subjektiver Wahrscheinlichkeiten*. Grundlagenstudien aus Kybernetik u. Geisteswiss., 21(4):117–125, 1980.

[Sch81] SCHREIBER, A.: *Subjektive Wahrscheinlichkeit und Gesetz der großen Zahlen*. In: *Stochastik im Schulunterricht*, Band 3 der Reihe *Schriftenreihe Didaktik der Mathematik*, Seiten 209–215, Wien - Stuttgart, 1981. Hölder-Pichler-Tempsky / Teubner.