Nacherfindung der Parabel

von Alfred Schreiber, Dresden

Schon in der Antike hatte man brauchbare Theorien über sphärische und parabolische Hohlspiegel entwickelt (vor allem Apollonios, Diokles und Anthemios, vgl. [2], S. 90). Eine herausragende Rolle spielte dabei die folgende optische Eigenschaft der Parabel bzw. des Paraboloids, das aus ihr durch Drehung um ihre Achse hervorgeht: Parallel zur Achse einfallende Lichtstrahlen werden so reflektiert, dass sie durch einen festen, auf der Achse gelegenen Punkt F (*Brennpunkt* genannt) hindurchgehen. Diese Tatsache ergibt sich aus dem bekannten Satz der Kegelschnittlehre (vgl. etwa [4], S. 187), wonach die Tangente an einen Parabelpunkt P den Winkel zwischen Brennstrahl (PF) und Leitstrahl (PR) halbiert (siehe Abb. 1).

Gibt es womöglich andere Kurvenformen mit der optischen Brennpunkt-Eigenschaft oder ist diese ein Charakteristikum der Parabel (und des Rotationsparaboloids)? Tatsächlich ist letzteres der Fall, d. h. es gilt auch der umgekehrte Schluss von der optischen Brennpunkt-Eigenschaft auf die parabolische Form. Um das einzusehen, ist folgende Behauptung zu zeigen:

Jede in einer Ebene gelegene achsensymmetrische und überall differenzierbare Kurve, welche die optische Brennpunkt-Eigenschaft besitzt, ist eine Parabel.

Für den Beweis legen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Ursprung O zugrunde. Ohne Einschränkung werde vorausgesetzt, dass die betreffende Kurve $y = y(x)$ durch O geht und ihr Brennpunkt $\mathrm{F} = (0, f)$, $f \geq 0$, auf der y-Achse liegt, die zugleich ihre Symmetrieachse darstellt (Abb. 1). Es wird sich später zeigen, dass für $f = 0$ keine Lösung existiert und daher $f > 0$ vorauszusetzen ist.

Wir betrachten nun einen beliebigen Punkt $\mathrm{P} = (x_0, y_0)$, in welchem die Kurve eine nicht-horizontale Tangente besitzt. Diese schneide die x-Achse im Punkt Q. Nach Voraussetzung wird ein parallel zur y-Achse einfallender Strahl an P so reflektiert, dass der ausfallende Brennstrahl durch F geht. Infolgedessen stimmen nach dem Reflexionsgesetz der mit der Tangente gebildete Winkel α und der Winkel $\angle$QPF überein.

Um die Brennpunkt-Eigenschaft bzgl. P analytisch auszudrücken, stellen wir die Gleichung der Geraden PF auf. Zunächst betrachten wir die Tangenten-Gleichung $t(x) = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$ und ermitteln aus $t(x) = 0$ die Abszisse von Q als $x_0 - y_0/y'(x_0)$. Daraus ergibt sich für den (von x_0

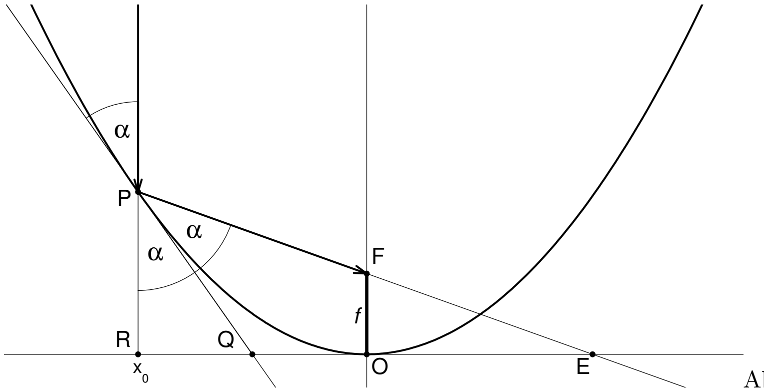

Abb. 1

abhängigen) Reflexionswinkel α:

$$\tan\alpha = \frac{|\mathrm{QR}|}{|\mathrm{PR}|} = \frac{1}{y'(x_0)}. \tag{1}$$

Der Anstieg des Brennstrahls ist gleich dem Tangens des Winkels $\angle\mathrm{PER} = {}^{\pi}/_{2} - 2\alpha$; es gilt demnach für den Punkt $\mathrm{P} = (x_0, y_0)$ die lokale Reflexionsbedingung $y_0 = \tan({}^{\pi}/_{2} - 2\alpha)x_0 + f = (\cot 2\alpha)x_0 + f$. Machen wir schließlich diese Bedingung für alle Kurvenpunkte (x, y) geltend, deren Tangente nicht horizontal verläuft, so erhalten wir

$$\begin{aligned} y &= (\cot 2\alpha)x + f = \left(\frac{\cot\alpha - \tan\alpha}{2}\right)x + f, \quad \text{also mit (1):} \\ y &= \frac{x}{2}\left(y' - \frac{1}{y'}\right) + f. \end{aligned} \tag{2}$$

(2) ist eine gewöhnliche Differentialgleichung vom D'Alembertschen (oder Lagrangeschen) Typ. Sie lässt sich durch Differentiation recht einfach in eine lineare Differentialgleichung für $p = y'$ transformieren (vgl. etwa [3], S. 52):

$$\begin{aligned} p &= \frac{d}{dx}\,\frac{x}{2}\left(p - \frac{1}{p}\right) \\ &= \frac{p}{2} - \frac{1}{2p} + \frac{x}{2}\frac{dp}{dx} + \frac{x}{2p^2}\frac{dp}{dx}. \end{aligned}$$

Lösen wir diese Gleichung nach dp/dx auf, so ergibt sich $dp/dx = p/x$ mit der vollständigen Lösung $y(x) = C_1x^2 + C_2$. Wegen $y(0) = 0$ ist $C_2 = 0$. Setzt man schließlich $y = C_1x^2$ in (2) ein, so ergibt sich $4C_1f = 1$.

Die Integrationskonstante C_1 lässt sich daher nur bestimmen, wenn wir $f > 0$ annehmen; sie lautet dann $C_1 = 1/4f$, und die gesuchte Kurve hat die Gleichung einer Parabel:

$$y(x) = \frac{1}{4f}x^2,$$

was zu zeigen war.

Bemerkung. Die soweit skizzierte Überlegung ist typisch für das in der frühen Naturwissenschaft geübte Verfahren, eine zunächst unbekannte Kurvenform von einem lokalen (differenziellen) Gesetz ausgehend zu bestimmen. Ein ähnliches Beispiel (unter vielen anderen) ist die von Christiaan Huygens im 17. Jahrhundert entdeckte Schleppkurve (Tractrix). In diesem Fall ist die analytische Darstellung erst *nachträglich*, als Lösung einer zuvor aufgestellten Differentialgleichung zu gewinnen (hier: $y = -y'\sqrt{k^2 - y^2}$, elementar behandelt in [6], S. 50 f). Im Unterschied dazu handelt es sich bei der Parabel um eine seit alters her wohlbekannte Form. Machen wir aber von unseren Vorkenntnissen keinen Gebrauch und fragen, welche Form aus einer reflektierenden (konkaven) Drehfläche einen perfekten Brennspiegel macht (oder einen Scheinwerfer, bei dem eine Lichtquelle im Brennpunkt ein Bündel paralleler Strahlen austreten lässt), so kommt es – wie gezeigt – zu einer Wiederentdeckung der Parabel. Nebenbei wird so auch deutlich, dass keine andere Form diesen Zweck erfüllt (jedenfalls nicht in voller Strenge).

Spätestens im 18. Jahrhundert war dieser Problemtyp durch die entwickelte Differential- und Integralrechnung zugänglich. Beispielsweise hat Euler 1781 Kurven durch Eigenschaften ihrer Tangenten beschrieben, die sämtlich auf Kegelschnitte führen. In den wenig später veröffentlichten *Vorlesungen über Mathematik* des Georg von Vega werden die Kegelschnitte sogar „durch ihre Fokaleigenschaften definiert . . . , die sonst in den einschlägigen Werken dieser Zeit nicht besonders hervortreten“ ([5], S. 461). Das 19. Jahrhundert hat diese Methode der Formfindung dann ausgeweitet zu dem berühmten Leitsatz für Produktgestaltung und Architektur: „Form Follows Function“. Das Prinzip lässt sich auch im Unterricht nutzen (wie in [1] aufgezeigt), indem man geometrische Formen als Resultat funktioneller Zweckvorgaben auffasst und so ihr Verständnis in einem praktischen Zusammenhang vertieft.

Literatur

[1] P. Bender, A. Schreiber: *Operative Genese der Geometrie*. Hölder-Pichler-Tempsky, B. G. Teubner: Wien und Stuttgart, 1985. Wiederabdruck bei epubli, Berlin 2012.

[2] E. J. Dijksterhuis: *Die Mechanisierung des Weltbildes*. Springer: Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1956.

[3] E. L. Ince: *Die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen*. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1956.

[4] M. Koecher, A. Krieg: *Ebene Geometrie*. Zweite, neu bearbeitete und erweiterte Auflage. Springer: Berlin, Heidelberg, New York, 2000.

[5] V. Kommerell: *Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes*. In M. Cantor (Hrsg.), *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Band 4, B. G. Teubner: Stuttgart, 1965.

[6] W. Schöne: *Differentialgeometrie*. BSG B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1975; 5. Auflage 1990.