

KAPITEL I

Aufbau eines Funktionenkalküls

Der vorliegende Text bildet das erste Kapitel einer geplanten Monographie über multivariable Polynome, die mit gewissen Operationen auf unendlich-dimensionalen Algebren assoziiert sind und zudem eine kombinatorische Interpretation gestatten. Das Kapitel sollte dabei vor allem der schrittweisen Einführung einer Funktions- und Differentialrechnung auf Algebren formaler Potenzreihen dienen, denen in diesem Zusammenhang eine Schlüsselrolle zukommt. Aus verschiedenen Gründe habe ich das Buchprojekt inzwischen aufgegeben, kann mir aber vorstellen, dass dieses vorbereitende Kapitel zumindest noch von didaktischem Nutzen sein könnte, etwa ergänzend zu meiner Abhandlung *Stirling Polynomials in Several Indeterminates* (Logos-Verlag: Berlin 2021).

§ 1. Präliminarien: Rechnen mit Funktionen

Vorbetrachtung. — In den Anfängen der Analysis waren Funktionen hauptsächlich ein Mittel, die Abhängigkeit zwischen veränderlichen Größen zu beschreiben. Maßgebliche Anregungen gab dazu von jeher die Physik. Zu den einfachsten Beispielen aus der Fülle physikalischer Anwendungen gehören etwa: der im freien Fall zurückgelegte Weg abhängig von der Zeit, die Temperaturabhängigkeit eines Gasvolumens bei konstantem Druck, oder die Schwingungsdauer eines Fadenpendels abhängig von seiner Länge. Gesetzmäßigkeiten dieser Art werden dann in Gestalt einer Funktionsgleichung $y = f(x)$ notiert, wo x die unabhängig veränderliche Größe und y die in Abhängigkeit von x sich verändernde Größe bezeichnet. Das Symbol f steht für die Funktion selbst, welche die Abhängigkeitsbeziehung üblicherweise in Gestalt eines mit analytischen Sprachmitteln gebildeten Terms $f(x)$ expliziert.

In weniger überschaubaren Fällen wird f zunächst *indirekt* beschrieben, zum Beispiel durch eine Differentialgleichung, in der neben dem (noch) unbestimmten f auch gewöhnliche oder (im Fall mehrerer Veränderlicher) partielle Ableitungen von f auftreten können. Das legt nahe, die Lösungsgesamtheiten solcher Gleichungen systematisch aufzusuchen und zu studieren. Da-

mit bahnt sich ein Sichtwechsel an. Funktionen sind nicht mehr allein *Mittel* zur Beschreibung von Abhängigkeiten, sondern geraten nun selbst in die Rolle von *Objekten*, die (als Elemente einer strukturierten Menge) bestimmten Operationen unterworfen sind. Auf diese Weise können sie, etwa nach Einführung einer Addition und einer Multiplikation, einen algebraischen Ring oder Körper bilden. Mit einer Skalarmultiplikation wird daraus ein Vektorraum. Wird für die ›Vektoren‹ schließlich noch eine Norm definiert, so gelangt man zu den normierten linearen Räumen, die in der Funktionalanalysis eine so bedeutende Stellung einnehmen.

Ein Ring reellwertiger Funktionen. — Wir wollen nun einige der algebraischen Aspekte etwas näher betrachten. Es bezeichne wie üblich \mathbb{R} den Körper der reellen Zahlen. Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ irgendein fest vorgegebenes Intervall, so bilden wir die Menge $F(I, \mathbb{R})$ aller reellwertigen Funktionen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, die auf ganz I definiert sind. Zu beliebigen $f, g \in F(I, \mathbb{R})$ lassen sich dann eine Summe $f + g$ und ein Produkt $f \cdot g$ ›argumentweise‹ definieren, d. h. durch die für alle $x \in I$ geforderten Auswertungsvorschriften

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &:= f(x) + g(x), \\ (f \cdot g)(x) &:= f(x) \cdot g(x).\end{aligned}$$

Ist c eine reelle Zahl, so soll die Funktion, die auf I überall den konstanten Wert c annimmt, ebenfalls als c notiert werden; wir haben demnach

$$(c \cdot f)(x) = c(x) \cdot f(x) = c \cdot f(x)$$

und damit speziell auch eine *Skalarmultiplikation* zur Verfügung. Die konstanten Funktionen 0 und 1 erweisen sich erwartungsgemäß als neutrale Elemente:

$$f + 0 = f \quad \text{und} \quad f \cdot 1 = f \quad \text{für alle } f \in F(I, \mathbb{R}).$$

Ersichtlich vererben sich noch weitere algebraische Eigenschaften von \mathbb{R} auf $F(I, \mathbb{R})$. Wie man mühelos erkennt, sind beide Funktionsverknüpfungen $(+, \cdot)$ assoziativ und kommutativ; zudem erfüllen sie das Distributivgesetz:

$$(f + g) \cdot h = f \cdot h + g \cdot h.$$

Auf der rechten Seite sind die Klammern um die Produkte eingespart, da wir stillschweigend von der geläufigen Vorrangregel für die Multiplikation Gebrauch machen. Produkte werden vereinfachend häufig auch ohne Multiplikationszeichen notiert, insbesondere bei der Skalarmultiplikation.

Wir fragen nun noch nach der Umkehrbarkeit der Funktionsverknüpfungen. Dazu sei $f \in F(I, \mathbb{R})$ beliebig vorgegeben. Gibt es dann ein $g \in F(I, \mathbb{R})$, für das $f + g = 0$ gilt? Man findet die einzig mögliche Lösung für g durch schrittweises Umformen der Gleichung $f + g = 0$ zu

$$\begin{aligned}(-1)f + (f + g) &= (-1)f, \\ ((-1)f + f) + g &= (-1)f, \\ g &= (-1)f.\end{aligned}$$

Dabei haben wir bereits von $(-1)f + f = ((-1) + 1) \cdot f = 0$ Gebrauch gemacht, was ja nur heißt, dass $(-1)f$ tatsächlich eine Lösung ist. Das (eindeutig bestimmte) additive Inverse von f ist demnach die Funktion $-f := (-1)f$. Dementsprechend notieren wir, wie allgemein üblich, Summen der Gestalt $f + (-g)$ auch mit zweistelligem Operationszeichen $(-)$ als Differenz $f - g$.

Definitionsgemäß ist $F(I, \mathbb{R})$ aufgrund der bisher konstatierten Eigenschaften ein *kommutativer Ring mit Einselement*. Im Unterschied zu \mathbb{R} ist allerdings $F(I, \mathbb{R})$ kein Körper, da zu $f \neq 0$ eine Funktion $g \in F(I, \mathbb{R})$ mit $f \cdot g = 1$ nicht in jedem Fall existiert. Denn ist etwa $a \in I$ und $f(x) := x - a$, so führt die Annahme $f(x) \cdot g(x) = 1$ für $x = a$ unmittelbar zum Widerspruch $0 = f(a) \cdot g(a) = 1$. Andererseits ist es nicht schwer, Funktionen anzugeben, die ein multiplikatives Inverses besitzen, zum Beispiel $f(x) = e^x$ und das zugehörige $g(x) = e^{-x}$. Allgemein bezeichnen wir das multiplikative Inverse einer Funktion f auch als die *zu f reziproke Funktion* und notieren sie in der Form f^{-1} oder $1/f$. Selbstverständlich gilt $(f^{-1})^{-1} = f$.

Die multiplikativ invertierbaren Elemente eines Rings werden *Einheiten* genannt. Die Einheiten eines Rings bilden eine Gruppe bezüglich der im Ring gegebenen Multiplikation.

Auch die Nullteilerfreiheit von \mathbb{R} geht in $F(I, \mathbb{R})$ verloren, d. h. $F(I, \mathbb{R})$ ist kein Integritätsring. Legen wir uns dazu ein einfaches Beispiel zurecht. Sei a irgendein innerer Punkt von I . Definieren wir nun Funktionen f, g auf I wie folgt: $f(x) = 0$ für $x < a$ und $f(x) = x - a$ für $x \geq a$ sowie $g(x) = x - a$ für $x < a$ und $g(x) = 0$ für $x \geq a$. Offenbar verschwindet dann das Produkt $f(x)g(x)$ auf dem ganzen Intervall und es gilt $f \cdot g = 0$, obwohl $f \neq 0$ und $g \neq 0$ der Fall ist.

Schließlich wird $(F(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$ mit der bereits oben erwähnten Skalarmultiplikation auch zu einem *Vektorraum über \mathbb{R}* . Die Gültigkeit der zugehörigen Axiome geht unmittelbar aus den schon festgestellten Ringeigenschaften her-

vor; wir haben dazu nur die Skalarmultiplikation an die Stelle der Ringmultiplikation zu setzen. Letztere ermöglicht es aber auch, das Produkt irgend zweier Vektoren zu bilden, womit sich $F(I, \mathbb{R})$ als eine *Algebra über \mathbb{R}* erweist. Dazu ist definitionsgemäß gefordert, dass die Multiplikation bilinear in Bezug auf die Vektorraumstruktur ist (vgl. dazu Aufgabe 1, S. 7).

Unterringe. – Die nähere Betrachtung von $F(I, \mathbb{R})$ sollte hier in erster Linie vor Augen führen, auf welche Weise sich die Operationen einer algebraischen Struktur wie $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ auf Funktionen vom Typ $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ übertragen, gewissermaßen hochziehen lassen. Die Funktionenalgebra $F(I, \mathbb{R})$ selbst ist freilich zu weitgefasst und – hinsichtlich der Eigenschaften ihrer Elemente – viel zu unspezifisch, um nennenswerten mathematischen Nutzen zu entfalten.

Bei Unterstrukturen kann das durchaus anders aussehen. Ein bekanntes Beispiel eines Unterrings von $F(I, \mathbb{R})$ liefert die Menge $C^0(I)$ aller stetigen reellwertigen Funktionen auf I . Summen, skalare Vielfache sowie Produkte stetiger Funktionen sind ja ihrerseits wieder stetig. Sofern das obige Gegenbeispiel zur Nullteilerfreiheit stetige Funktionen verwendet, ist auch $C^0(I)$ kein Integritätsring.

Durch zusätzliche Bedingungen lassen sich innerhalb von $C^0(I)$ weitere Unterringe (bzw. Unteralgebren) aussondern. Vornehmlich zu nennen sind hier die Mengen $C^n(I)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) aller reellwertigen Funktionen, die auf dem Intervall I n -fach stetig differenzierbar sind. Sie bilden eine strikt absteigende Kette von Unterringen $C^0(I) \supset C^1(I) \supset C^2(I) \supset \dots$, ihr Durchschnitt ist somit der Unterring $C^\infty(I)$ der auf I unendlich oft differenzierbaren Funktionen.¹ Besonders einfache Beispiele sind die Polynomfunktionen

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m \quad (\text{I.1})$$

mit beliebigen reellen Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$. Sie sind für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert und bilden in ihrer Gesamtheit einen nullteilerfreien Unterring $P(\mathbb{R})$ von $C^\infty(\mathbb{R})$. Er enthält auch die konstanten Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (vermöge der Spezialisierung $a_k = 0, k \geq 1$). Diese bilden einen Unterring, den wir mit \mathbb{R} identifizieren, da die Abbildung, die einer reellen Zahl c die Funktion

¹ $C^\infty(I)$ umfasst als echten Unterring die Gesamtheit $C^\omega(I)$ der auf I analytischen Funktionen. Zur Erinnerung: Eine reelle Funktion $f(x)$ heißt *analytisch im Punkt $x = a$* , wenn sie sich in einer Umgebung von a als konvergente Potenzreihe in $x - a$ darstellen lässt. Dafür ist $f \in C^\infty$ keineswegs hinreichend, wie folgendes in Anfängervorlesungen zur Analysis beliebte Gegenbeispiel zeigt (hier für den Punkt $a = 0$): $f(x) = e^{-1/x^2}$, falls $x > 0$, und $f(x) = 0$ sonst.

mit dem konstanten Wert c zuordnet, eine isomorphe Einbettung von \mathbb{R} in $P(\mathbb{R})$ (und alle Oberringe) darstellt. Die Menge \mathbb{Q} der rationalen Zahlen stellt den kleinsten Unterring von \mathbb{R} dar, der (wie \mathbb{R}) noch ein Körper ist, hier: der Quotientenkörper des Rings \mathbb{Z} der ganzen Zahlen. Natürlich ist \mathbb{Z} der kleinste Unterring. – Bei dem späteren Aufbau einer formalen Funktionenalgebra (in diesem Kapitel) werden die algebraischen Fassungen der polynomialen und C^∞ -Funktionen eine maßgebliche Rolle spielen.

Funktionsspezifische Definitionsbereiche. – In vielen Fällen hat es die Analysis mit reellen Funktionen zu tun, deren natürlicher Definitionsbereich kein Intervall ist. Zum Beispiel ist es wenig sinnvoll, den Tangens auf das schmale Intervall $I = (-\pi/2, \pi/2)$ einzuschränken, welches keine seiner Polstellen $\pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) enthält. Der Sachlage angemessener ist es, \tan als Funktion auf ganz \mathbb{R} zu definieren und dabei seine Polstellen auszunehmen.

Allgemein wollen wir nach diesem Vorbild mit jeder reellwertigen Funktion f den für sie spezifischen (maximalen) Definitionsbereich D_f verbinden und als die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ festlegen, für die der Ausdruck $f(x)$ einen Sinn hat, d. h. eine reelle Zahl bedeutet. Sollen nun Summe oder Produkt zweier Funktionen $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ gebildet werden, so ergibt sich deren gemeinsamer Definitionsbereich als Durchschnitt $D_f \cap D_g$ der Definitionsbereiche von f und g .

Auch einer Gleichheitsaussage $f = g$ über Funktionen f, g kann auf ähnliche Weise ein Definitionsbereich zugewiesen werden, indem man $f = g$ auf den Durchschnitt $D_f \cap D_g$ relativiert. Dementsprechend liegt es nahe, die Gleichheitsaussage $f = g$ als die Behauptung zu verstehen, dass für alle $x \in D_f \cap D_g$ die Gleichheit $f(x) = g(x)$ gilt. Diese Auffassung steht in Einklang mit der gängigen mathematischen Praxis. Beispielsweise behauptet man in der Potenzreihendarstellung einer Funktion f die Gleichheit zwischen dem Ausdruck $f(x)$ (linker Hand) und einem von x abhängigen Summen-Grenzwert (rechter Hand), was natürlich in jedem Fall die Angabe eines Konvergenzintervalls erfordert, für dessen Punkte x auch die rechte Seite der Gleichung ein wohldefinierter Ausdruck ist.

Bemerkung. Zwar sind nun in der eben beschriebenen Weise die rationalen Rechenoperationen auch für Funktionen mit unterschiedlichen Definitionsbereichen erklärt, doch ergibt sich dabei letztlich keine Ringstruktur. So muss in einem Ring etwa das Distributivgesetz in der Form $(f+g) \cdot h = f \cdot h + g \cdot h$ für ausnahmslos *alle* Funktionen erfüllt sein. Durch die hier erforderliche Relativierung auf den gemeinsamen Definitionsbereich $M = D_f \cap D_g \cap D_h$ geht die Gleichheitsaussage allerdings in folgende

generalisierte Subjunktion über:

$$\forall x(x \in M \implies (f(x) + g(x)) \cdot h(x) = f(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h(x)).$$

Um daraus wieder eine unrelativierte Gleichheitsaussage zu erhalten, sind die beteiligten Funktionen sämtlich durch ihre jeweiligen Einschränkungen auf M zu ersetzen. Bei letzteren handelt es sich jedoch tatsächlich im Allgemeinen um *andere* Funktionen als die, von denen wir ursprünglich im Distributivgesetz ausgegangen waren.

Die leere Funktion. – Unter den geschilderten allgemeinen Bedingungen lässt es sich nicht vermeiden, dass auch einmal ein leerer Definitionsbereich entsteht. Zum Beispiel hat die Summe $f + g$, wo $f(x) = \log x$ und $g(x) = \log(-x)$, den Definitionsbereich $D_{f+g} = (0, \infty) \cap (-\infty, 0) = \emptyset$, weshalb $f + g$ nur die *leere Funktion* \emptyset sein kann. Es sei daran erinnert, dass eine Funktion mengentheoretisch als Teilmenge des kartesischen Produkts von Definitions- und Wertebereich aufgefasst wird. Ist demnach der Definitionsbereich einer Funktion $= \emptyset$, so gilt dies auch für das besagte kartesische Produkt und damit für die Funktion selbst. Umgekehrt mache man sich klar: Die leere Menge \emptyset ist in der Tat eine Funktion (rechtseindeutige Relation).

Wie ist nun mit der leeren Funktion mathematisch korrekt zu verfahren? Es besteht eine gewisse Analogie zum Umgang mit der Zahl 0, etwa in Gleichheitsaussagen wie $2 \cdot 0 = 0 = 3 \cdot 0$. Würde man hier aus der linken und rechten Seite jeweils die 0 herauskürzen, so ergäbe sich die falsche Aussage $2 = 3$. Ähnlich verhält es sich mit der leeren Funktion. Während aber die Null lediglich von ihrer Rolle als Divisor ausgeschlossen wird, müssen wir, um Widersprüche zu vermeiden, *die leere Funktion generell als Operand von Verknüpfungen ausschließen*. – Wir verdeutlichen das anhand der Funktionen im obigen Beispiel, für die $f + g = \emptyset$ gilt. Erlauben wir nun hypothetisch etwa die Addition von $(-f)$ auf beiden Seiten dieser Gleichung, so erhalten wir $g = -f + \emptyset = \emptyset$, mithin einen Widerspruch zu $D_g = (-\infty, 0)$. Natürlich lässt sich mit denselben Funktionen auch aus der Produktgleichung $f \cdot g = \emptyset$ die falsche Aussage $g = (1/f) \cdot \emptyset = \emptyset$ herleiten. Allgemein: Würden wir das Operieren mit der leeren Funktion zulassen, könnte man ganz unabhängig von diesem Beispiel für beliebige Funktionen f, g einen Widerspruch erzeugen, indem auf beiden Seiten der Gleichung $f + \emptyset = \emptyset = g + \emptyset$ die leere Funktion ›subtrahiert‹ wird.

Aus den genannten Gründen ist es generell üblich (und wird auch im Weiteren als Vereinbarung übernommen), *beliebig vorgegebene Funktionen stillschweigend als nicht-leer vorauszusetzen*.

Aufgaben

1. Zeige: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $f, g, h \in F(I, \mathbb{R})$ gelten die Identitäten $(af + bg)h = a(fh) + b(gh)$ und $h(af + bg) = a(hf) + b(hg)$.
2. Beweise, dass x^0, x^1, x^2, \dots eine Basis des reellen Vektorraums $P(\mathbb{R})$ bilden (*kanonische Basis*). – Die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m, 0, 0, \dots$ der Normalform (I.1) erscheinen in dieser Betrachtungsweise dann gerade als die Koordinaten der betreffenden Polynomfunktion bezüglich dieser Basis.
3. Es seien $f, g \in P(\mathbb{R})$ mit $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$ und $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$ gegeben. Bestimme die Koordinaten (Koeffizienten) von $f + g$ und $f \cdot g$ bezüglich der kanonischen Basis in $P(\mathbb{R})$.
4. Der größte Exponent m mit $a_m \neq 0$ wird als *Grad* der in (I.1) gegebenen Polynomfunktion bezeichnet. Eine konstante Polynomfunktion $\neq 0$ hat den Grad 0. Beweise folgende Verallgemeinerung der Aussage von Aufgabe 2: Eine beliebige Folge von Polynomfunktionen p_n vom Grad $n = 0, 1, 2, \dots$ bildet eine Basis von $P(\mathbb{R})$.
5. Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig und $p_n(x) = (x - c)^n$ für $n \geq 0$. Nach Aufgabe 4 bilden die Funktionen p_0, p_1, p_2, \dots eine Basis von $P(\mathbb{R})$. Stelle x^n bezüglich dieser Basis dar.
6. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $\hat{F}(I, \mathbb{R})$ die Menge aller Funktionen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, für die gilt: Ist f nicht die identisch verschwindende Funktion, so gibt es höchstens endlich viele Stellen in I , an denen f Null wird oder nicht definiert ist.
Zeige: $\hat{F}(I, \mathbb{R})$ ist ein Körper (mit der argumentweise erklärten Addition und Multiplikation von Funktionen).

§ 2. Komposition. Involutorische Funktionen

In der Analysis ist es ein viel geübtes Verfahren, zwei gegebene Funktionen f, g zu einer neuen Funktion $f \circ g$ zusammzusetzen (sprich: $\succ f$ nach g). Diese Verknüpfung, üblicherweise *Komposition* oder *Verkettung* genannt, ist durch die Vorschrift

$$(f \circ g)(x) := f(g(x))$$

erklärt, welche verlangt, das Argument x im Funktionsausdruck $f(x)$ durch den Wert $g(x)$ zu ersetzen. Das ist natürlich nur für solche $x \in D_g$ möglich, für die $g(x)$ dem Definitionsbereich von f angehört. Das unter dieser Voraussetzung existierende Verknüpfungsergebnis $f \circ g$ nennen wir im Folgenden *Verkettungs-* oder *Kompositionsprodukt*, gelegentlich auch *zusammengesetzte*

Funktion. Ihr Definitionsbereich lässt sich wie folgt darstellen:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}.$$

Für auf ganz \mathbb{R} definierte Funktionen f, g ist $f \circ g$ ebenfalls auf ganz \mathbb{R} definiert; insbesondere kann \circ auf dem Ring $P(\mathbb{R})$ der reellen Polynomfunktionen uneingeschränkt ausgeführt werden. Doch selbst auf dem Ring $F(I, \mathbb{R})$ erweist sich die Komposition als eine nur *partielle*, d. h. nicht für alle Operanden ausführbare Verknüpfung. Beispielsweise ist das Verkettungsprodukt $f \circ g$ der Funktionen $f, g : I = (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = \log x$ und $g(x) = -\sqrt{1/x}$, wegen $D_{f \circ g} = \emptyset$ die leere Funktion.

Es ist zudem sofort klar, dass \circ nicht kommutativ ist, d. h. wir haben im Allgemeinen $f \circ g \neq g \circ f$. Hingegen gilt das Assoziativgesetz

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h). \quad (\text{I.2})$$

Die Funktion $\text{id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $\text{id}(x) = x$ und im Folgenden *Identität* genannt, erweist sich wegen

$$f \circ \text{id} = \text{id} \circ f = f \quad (\text{I.3})$$

als (eindeutig bestimmtes) neutrales Element der Komposition.

Bezüglich der Addition und Multiplikation von Funktionen erfüllt \circ die folgenden Verträglichkeitsbedingungen in Gestalt von Distributivgesetzen:

$$(f + g) \circ h = (f \circ h) + (g \circ h), \quad (\text{I.4})$$

$$(f \cdot g) \circ h = (f \circ h) \cdot (g \circ h). \quad (\text{I.5})$$

Die Gleichungen (I.2)–(I.5) ergeben sich unmittelbar aus den Definitionen der Verknüpfungen.

Existiert zu gegebener Funktion $f : D_f \rightarrow A$ eine Funktion $g : A \rightarrow D_f$ mit $D_g = A$ derart, dass $f \circ g = \text{id}$ und $g \circ f = \text{id}$, so heißt g *inverse Funktion*² (oder *Umkehrfunktion*) von f . Eine Funktion kann höchstens eine Umkehrfunktion besitzen; sind nämlich g_1, g_2 invers zu f , so erhalten wir unter Verwendung von (I.2) und (I.3)

$$\begin{aligned} g_1 &= g_1 \circ \text{id} = g_1 \circ (f \circ g_2) \\ &= (g_1 \circ f) \circ g_2 \\ &= \text{id} \circ g_2 = g_2. \end{aligned}$$

² Gelegentlich wird die Bezeichnung *kompositionelle Inverse* verwendet, um diese von der multiplikativen Inversen zu unterscheiden.

Eine Funktion f heißt (*kompositionell*) *invertierbar*, wenn sie eine Umkehrfunktion besitzt. Diese ist eindeutig bestimmt und wird im Folgenden mit \bar{f} bezeichnet. Offensichtlich gilt $\overline{\bar{f}} = \text{id}$ sowie $\bar{\bar{f}} = f$.

Bemerkung. Man beachte, dass die Definitionsbereiche von $f \circ \bar{f}$ und $\bar{f} \circ f$ im Allgemeinen nicht übereinstimmen müssen. Das gilt beispielsweise für die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ und den (natürlichen) Logarithmus $\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, die jeweils Umkehrfunktionen voneinander sind. Dementsprechend haben auch die Gleichungen $\log \circ \exp = \text{id}$ und $\exp \circ \log = \text{id}$ unterschiedliche Definitionsbereiche (\mathbb{R} bzw. $(0, \infty)$). Der Ausdruck $\langle \text{id} \rangle$ auf den rechten Seiten bedeutet daher strenggenommen nicht dieselbe Funktion, sondern jeweils die auf den zugehörigen Definitionsbereich bezogene (eingeschränkte) Identität.

Die (kompositionell) invertierbaren Funktionen lassen sich auf einfache Weise charakterisieren.

Satz I.1. *Eine Funktion ist invertierbar genau dann, wenn sie bijektiv ist.*

Beweis. Sei $f : D_f \rightarrow A$ irgendeine Funktion. — 1. Ist f invertierbar und \bar{f} die zu ihr inverse Funktion, so erhalten wir für alle $u, v \in D_f$ mit $f(u) = f(v)$

$$u = (\bar{f} \circ f)(u) = \bar{f}(f(u)) = \bar{f}(f(v)) = (\bar{f} \circ f)(v) = v,$$

was besagt, dass die Funktion f injektiv (oder: *eindeutig*) ist. Sie ist auch surjektiv, denn zu jedem $x \in A$ haben wir für $u := \bar{f}(x)$ selbstverständlich

$$f(u) = f(\bar{f}(x)) = (f \circ \bar{f})(x) = x.$$

2. Wir setzen nun umgekehrt f als bijektiv voraus. Die Menge A besteht (wegen der Surjektivität von f) aus genau denjenigen x , die f als Werte annehmen kann, d. h. für die $x = f(u)$ mit einem $u \in D_f$ erfüllt ist. Aufgrund der Injektivität von f ist das u in $x = f(u)$ sogar *eindeutig* von x abhängig. Folglich lässt sich damit vermöge $g(x) = u$ eine Funktion $g : A \rightarrow D_f$ definieren. Diese ist invers zu f , denn es gilt

$$\begin{array}{ll} (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(u) = x & \text{für alle } x \in A = D_g, \\ \text{sowie } (g \circ f)(x) = g(f(x)) = x & \text{für alle } x \in D_f. \quad \diamond \end{array}$$

Die folgende Aussage gibt Auskunft über die Inversenbildung bei einer zusammengesetzten Funktion.

Satz I.2 (Umkehrregel). Seien f, g irgend zwei invertierbare Funktionen, für die das Verkettungsprodukt $f \circ g$ definiert ist. Dann ist auch $f \circ g$ invertierbar, und es gilt:

$$\overline{f \circ g} = \bar{g} \circ \bar{f}.$$

Beweis. Wir bestätigen, dass $\bar{g} \circ \bar{f}$ invers zu $f \circ g$ ist. In der Tat ergibt sich mit (I.2) und (I.3) sofort

$$\begin{aligned} (\bar{g} \circ \bar{f}) \circ (f \circ g) &= (\bar{g} \circ (\bar{f} \circ f)) \circ g \\ &= (\bar{g} \circ \text{id}) \circ g \\ &= \bar{g} \circ g = \text{id}. \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung geht im Übrigen unmittelbar hervor, dass das Kompositionsprodukt $\bar{g} \circ \bar{f}$ wohldefiniert ist, nämlich auf der Menge aller $(f \circ g)(x)$ mit $x \in D_{f \circ g}$. — Auf dieselbe Weise lässt sich natürlich auch die Gleichheit $(f \circ g) \circ (\bar{g} \circ \bar{f}) = \text{id}$ verifizieren. \diamond

Involutorische Funktionen. — Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *involutorisch* (oder *Involution*), wenn $f \circ f = \text{id}$ gilt. Es ist unmittelbar klar, dass ein solches f invertierbar ist (und damit bijektiv nach Satz I.1). Dabei gilt $\bar{f} = f$, d. h. f ist Umkehrfunktion von sich selbst. Die Ausdrücke $-x$ und $1/x$ definieren einfachste Beispiele involutorischer Funktionen.

Im Folgenden sollen einige grundlegende Eigenschaften zusammengestellt werden.

Satz I.3. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Involution $\neq \text{id}$. Dann ist f streng monoton fallend und besitzt genau einen Fixpunkt $a \in \mathbb{R}$ mit $f(a) = a$.

Beweis. 1. Als involutorische Funktion ist f invertierbar. Zusammen mit der Stetigkeit von f ergibt sich daraus nach einem bekannten Satz der Analysis³, dass f streng monoton ist. Tatsächlich kann f , da involutorisch, nur eine fallende Funktion sein. Zum Beweis werde ein $c \in \mathbb{R}$ mit $f(c) \neq c$ gewählt (was wegen $f \neq \text{id}$ stets möglich ist). Wir nehmen zunächst $f(c) > c$ an. Wäre f streng monoton wachsend, so ergäbe sich hieraus sofort der Widerspruch $c = f(f(c)) > f(c)$; und auch der verbleibende Fall $f(c) < c$ führt auf einen Widerspruch: $c = f(f(c)) < f(c)$.

³ Vgl. etwa Friedhelm Erwe: *Differential- und Integralrechnung*, Band I, Bibliographisches Institut, Mannheim 1962, rev. Nachdruck 1964, S. 116–117.

2. Um die Existenz eines Fixpunkts zu zeigen, betrachten wir die auf ganz \mathbb{R} definierte Funktion $\phi(x) := f(x) - x$. Wie in Teil 1 wählen wir wieder ein $c \in \mathbb{R}$ mit $f(c) \neq c$. Man überzeugt sich unmittelbar davon, dass $\phi(c)$ und $\phi(f(c))$ verschiedene Vorzeichen haben. Der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen sichert dann die Existenz einer zwischen c und $f(c)$ gelegenen Zahl a mit $\phi(a) = 0$, d. h. $f(a) = a$.

3. Schließlich zeigen wir die Einzigkeit des Fixpunkts. Sei dazu indirekt $b \neq a$ mit $f(b) = b$ angenommen. Ohne Einschränkung können wir $a < b$ voraussetzen. Da f streng monoton fällt, hat man sofort den Widerspruch $a = f(a) > f(b) = b$. \diamond

Korollar. *Ist f im Fixpunkt a differenzierbar, so hat die Tangente dort die Steigung $f'(a) = -1$.*

Beweis. Die Kettenregel für zusammengesetzte Funktionen liefert

$$(f \circ f)'(a) = f'(f(a)) \cdot f'(a) = f'(a)^2 = 1.$$

Da f streng monoton fällt, kann hier nur $f'(a) = -1$ sein. \diamond

Stetige Involutionen erlauben eine charakteristische Zerlegung, die in folgender Aussage genauer spezifiziert wird.

Satz I.4. *Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion $\neq \text{id}$. Es gilt: f ist involutorisch genau dann, wenn eine stetige und bijektive Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, so dass $f = g \circ (-\text{id}) \circ \bar{g}$, das heißt: $f(x) = g(-\bar{g}(x))$ für alle $x \in \mathbb{R}$.*

Beweis. 1. Da $-\text{id}$ involutorisch ist, gilt dies auch für f (siehe Aufgabe 11).

2. Wir wollen nun umgekehrt zeigen⁴, dass für jede stetige Involution $\neq \text{id}$ eine solche Darstellung erreicht werden kann. Sei a der eindeutig bestimmte Fixpunkt von f , dessen Existenz durch Satz I.3 garantiert ist. Damit definieren wir die (stetige) Funktion

$$f^*(x) := f(x + a) - a, \tag{I.6}$$

die ebenfalls involutorisch ist, nun aber 0 als einzigen Fixpunkt besitzt (vgl. Aufgabe 12). Zunächst soll die behauptete Darstellung für f^* angegeben werden. Dazu nutzen wir die Tatsache, dass der Fixpunkt 0 den Funktionsgraphen von f^* in zwei spiegelbildliche Hälften zerteilt. Da f^* streng monoton

⁴ Dabei folgen wir einer Beweisidee von Patrick J. McCarthy: Functional n th Roots of Unity, *The Mathematical Gazette*, Vol. 64, No. 428 (1980), 107–115.

fällt, verläuft sein Graph links vom Nullpunkt vollständig im zweiten Quadranten des Koordinatensystems, denn wir haben $f^*(x) \geq f^*(0) = 0$ für $x \leq 0$. Die Einschränkung von f^* auf diesen Bereich wollen wir im Folgenden mit $\varphi : (-\infty, 0] \rightarrow [0, \infty)$ bezeichnen; es gilt demnach

$$\varphi(x) := f^*(x) \geq 0 \quad \text{für alle } x \leq 0. \quad (\text{I.7})$$

Als Einschränkung einer bijektiven Funktion ist φ ebenfalls bijektiv und besitzt damit nach Satz I.1 eine Umkehrfunktion $\bar{\varphi} : [0, \infty) \rightarrow (-\infty, 0]$. Deren Graph verläuft vollständig im vierten Quadranten (als an der Geraden $y = x$ gespiegeltes Bild des Graphen von φ); es gilt nämlich

$$\bar{\varphi}(x) = f^*(x) \leq 0 \quad \text{für alle } x \geq 0. \quad (\text{I.8})$$

Damit erklären wir nun die Funktion $g^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch die Vorschrift

$$g^*(x) := \begin{cases} \bar{\varphi}(-x) & \text{falls } x \leq 0; \\ x & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

Ersichtlich ist g^* stetig und invertierbar. Die Umkehrfunktion lautet

$$\bar{g}^*(x) = \begin{cases} -\varphi(x) & \text{falls } x \leq 0; \\ x & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

Sei nun $x \leq 0$. Dann erhalten wir aus (I.7) zunächst $\varphi(x) \geq 0$ und aufgrund der Eigenschaften von g^*

$$g^*(-\bar{g}^*(x)) = g^*(\varphi(x)) = \varphi(x).$$

Andererseits wird für $x \geq 0$

$$g^*(-\bar{g}^*(x)) = g^*(-x) = \bar{\varphi}(-(-x)) = \bar{\varphi}(x).$$

Insgesamt ergibt sich hieraus mit (I.7) und (I.8) eine Darstellung von f^* in der gewünschten Form: $f^*(x) = g^*(-\bar{g}^*(x))$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

3. Schließlich soll auch die ursprünglich vorgegebene Involution f , welche a als Fixpunkt hat, auf solche Weise dargestellt werden. Setzen wir dazu $g(x) := g^*(x) + a$, so ergibt sich aus (I.6) und der Darstellung für f^* in Teil 2 für alle reellen x :

$$\begin{aligned} f(x) &= f^*(x - a) + a \\ &= g^*(-\bar{g}^*(x - a)) + a \\ &= g(-\bar{g}(x)). \end{aligned}$$

Natürlich ist auch g stetig, womit der Satz bewiesen ist. \diamond

Bemerkung. (a) Die in der Zerlegung von f auftretende Funktion g ist keineswegs eindeutig bestimmt. So lässt sich in Teil 2 des Beweises die Funktion g^* allgemeiner wie folgt definieren:

$$g^*(x) := \begin{cases} \overline{\varphi}(h(-x)) & \text{falls } x \leq 0; \\ h(x) & \text{falls } x \geq 0, \end{cases}$$

wo h eine irgendeine stetige Bijektion $[0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ mit $h(0) = 0$ sein kann.

(b) Zwei Funktionen g_1, g_2 besitzen die für g in Satz I.4 bewiesene Eigenschaft genau dann, wenn die eine aus der anderen durch Komposition mit einer bijektiven, stetigen und ungeraden Funktion $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hervorgeht, d. h. wenn gilt: $g_2 = g_1 \circ \psi$.

Aufgaben

7. Folgere die Distributivgesetze (I.4) und (I.5) direkt aus den Definitionen von Addition, Multiplikation und Komposition.

8. Für beliebiges reelles a sei $f_a(x) := a \cdot \cos x$. Für welche a ist $\tan \circ f_a$ auf ganz \mathbb{R} definiert?

9. Sei $h(x) := 1/x$. Bestimme den Definitionsbereich von $h \circ \sin \circ h$.

10. (a) Für welche Werte von $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ ist die gebrochene lineare Funktion $f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ invertierbar? Gib den Ausdruck $\bar{f}(x)$ für die Umkehrfunktion an.

(b) Für welche $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ ist f involutorisch?

(c) Erörtere Anzahl und Lage der Fixpunkte von f (aus (b)).

11. Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ irgendeine invertierbare Funktion. Zeige: f ist involutorisch genau dann, wenn $g \circ f \circ \bar{g}$ involutorisch ist.

12. Sei f eine Involution, $a, b \in \mathbb{R}$ und f^* definiert durch $f^*(x) = f(x+a-b) - a + b$. Zeige: f^* ist involutorisch, und es gilt $f^*(a) = a$ genau dann, wenn $f^*(b) = b$.

13. Beweise die Aussagen (a) und (b) in der Bemerkung zu Satz I.4.

§ 3. Ein axiomatischer Rahmen

Eine Reihe von grundlegenden algebraischen Sachverhalten, die in den beiden vorangehenden Abschnitten exemplarisch für das Rechnen mit reellen

Funktionen herausgearbeitet wurden, sollen nun als Axiome in die Definition einer abstrakten Struktur \mathbb{F} einfließen. Die Elemente (Objekte) aus \mathbb{F} übernehmen dabei rein formal die Rolle von Funktionen (eines einzigen Arguments). Ebenso undefiniert bleiben die zweistelligen Operationen (hier: Addition $\succ + \langle$, Multiplikation $\succ \cdot \langle$ und Komposition $\succ \circ \langle$), die auf der Trägermenge \mathbb{F} eine algebraische Struktur etablieren. Das ganze Verfahren unterscheidet sich also in nichts von der formalen Axiomatik, mittels der man in gewohnter Weise abstrakte Begriffe wie \succ Gruppe \langle , \succ Körper \langle oder \succ Vektorraum \langle einführt.

Axiomensystem für eine Funktionenalgebra. — Nach den in §§ 1-2 entwickelten Vorbereitungen bieten die Axiome für den auf unsere Zwecke zugeschnittenen Begriff einer *Funktionenalgebra* keine wirklichen Überraschungen mehr. Das Addieren und Multiplizieren von Funktionen ist summarisch in folgendem Axiom geregelt:

(F0) \mathbb{F} ist ein unitärer kommutativer Integritätsring der Charakteristik Null.

Diese Aussage soll hier zunächst etwas näher erläutert werden. Dass die Struktur $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ ein unitärer kommutativer Integritätsring ist, beinhaltet im Einzelnen folgende Sachverhalte:

- (i) \mathbb{F} ist bezüglich der Addition eine kommutative Gruppe (deren neutrales Element wie üblich mit 0 bezeichnet werde).
- (ii) \mathbb{F} ist bezüglich der Multiplikation eine kommutative Halbgruppe mit neutralem Element (das wie üblich mit 1 bezeichnet werde).
- (iii) Es gilt das Distributivgesetz⁵ $f \cdot (g + h) = f \cdot g + f \cdot h$ für alle $f, g, h \in \mathbb{F}$.
- (iv) \mathbb{F} ist nullteilerfrei, d. h. es gilt $f \cdot g \neq 0$ für alle $f, g \in \mathbb{F}$ mit $f \neq 0$ und $g \neq 0$. Äquivalent dazu ist die Kürzungsregel: $f \cdot g = f \cdot h$ mit $f \neq 0$ impliziert $g = h$ (für alle $f, g, h \in \mathbb{F}$).

Die Elemente $f \in \mathbb{F}$ stehen für \succ reine \langle , argumentfrei zu denkende Funktionen; diese haben von sich aus keinen Definitionsbereich und sind somit auch nicht durch einen Ausdruck der Form $f(x)$ spezifiziert. Eine neben und unabhängig von \mathbb{F} bestehende Menge von Zahlen, die als Argumente dienen könnten, kommt hier zudem ohnehin nicht ins Spiel. Immerhin haben aber

⁵ Da die Multiplikation kommutativ ist, folgt hieraus auch das rechtsseitige Distributivgesetz $(g + h) \cdot f = g \cdot f + h \cdot f$, das für Ringe im allgemeinen Fall eigens zu postulieren ist.

0 und 1, als Elemente von \mathbb{F} , ›zahlenartigen‹ Charakter, und in der Tat lassen sich mit ihrer Hilfe Konstanten definieren, nämlich in Gestalt ›konstanter Funktionen‹ in \mathbb{F} .

Eine erste, naheliegende Idee besteht darin, zu gegebener natürlicher Zahl $n \geq 0$ die Summe $s(n) := 1 + 1 + \cdots + 1$ zu bilden, worin die Eins von \mathbb{F} n -mal als Summand auftritt.⁶ Es ist durchaus möglich, dass $s(n)$ für gewisse positive Werte von n Null wird, wie etwa im Restklassenring modulo 5, wo $s(5) = 0$ gilt. Ist jedoch – wie in (F0) gefordert – die Charakteristik von \mathbb{F} gleich Null, so besagt dies gerade, dass $s(n) \neq 0$ für alle $n \geq 1$.

Schließlich können wir die Abbildung s sinngemäß noch auf ganz \mathbb{Z} erweitern, indem wir für $n < 0$ den Wert $s(n) := -s(-n)$ festlegen. Man überzeugt sich jetzt leicht davon, dass s ein Monomorphismus $(\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{F}, +)$ ist (siehe Aufgabe 14); durch ihn erscheint die Gesamtheit der $s(n)$ ($n \in \mathbb{Z}$) als isomorphes Bild der additiven Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ innerhalb von \mathbb{F} . Diese strukturelle Übereinstimmung rechtfertigt es, auch bezeichnungstechnisch nicht mehr zwischen den speziellen ›konstanten Funktionen‹ $s(n)$ von \mathbb{F} und den durch sie dargestellten ganzen Zahlen n zu unterscheiden, d. h. wir schreiben künftig einfach n anstelle von $s(n)$ und identifizieren dementsprechend auch die Mengen $\{s(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ und \mathbb{Z} .

Die restlichen Axiome regeln den Gebrauch der Komposition – auch hier vorausgesetzt als eine lediglich *partielle Operation* auf \mathbb{F} – und ihr Zusammenwirken mit der in \mathbb{F} gegebenen Addition und Multiplikation. Dazu gehört die Annahme eines bezüglich \circ neutralen Elements, das hier (in (F4)) und künftighin mit ι bezeichnet werden soll:

$$(F1) \quad f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h,$$

$$(F2) \quad (f + g) \circ h = (f \circ h) + (g \circ h),$$

$$(F3) \quad (f \cdot g) \circ h = (f \circ h) \cdot (g \circ h),$$

$$(F4) \quad f \circ \iota = \iota \circ f = f,$$

$$(F5) \quad 1 \circ 0 = 1.$$

Die Axiome (F1–4) entsprechen in dieser Reihenfolge den Regeln (I.2), (I.4), (I.5) und (I.3), die wir bereits aus § 2 in ihrer Fassung für (einstellige) reelle Funktionen kennen. Das feste Symbol › ι ‹ für das neutrale Element der Komposition ist gerechtfertigt, da dieses durch (F4) eindeutig bestimmt ist.⁷ Sinn-

⁶ Diese etwas saloppe Erklärung kann präziser gefasst werden, indem man die Abbildung s rekursiv durch $s(0) = 0$, $s(n+1) = s(n) + 1$ definiert.

⁷ Ist nämlich auch ι_1 ein neutrales Element, so hat man sofort $\iota = \iota_1 \circ \iota = \iota \circ \iota_1 = \iota_1$.

gemäß, d. h. aufgrund seiner Entsprechung zu id , bezeichnen wir ι auch als *Identitätsfunktion* (oder kurz *Identität*).

Im Folgenden stellen wir zunächst einfachste Tatsachen und Begriffsbildungen zusammen, die sich direkt aus den obigen Axiomen ergeben bzw. von den §§ 1–2 wörtlich übernehmen lassen.

Aus (F2) folgt für alle $f, g \in \mathbb{F}$

$$0 \circ f = 0, \quad (\text{I.9})$$

$$(-f) \circ g = -(f \circ g). \quad (\text{I.10})$$

Die simplen Beweise können hier ausgespart bleiben (siehe Aufgabe 15).

Ferner gilt

$$\iota \neq 0 \quad \text{und} \quad \iota \neq 1. \quad (\text{I.11})$$

Beweis. Aufgrund seiner Charakteristik ist der Ring \mathbb{F} nichttrivial, d. h. es ist $1 \neq 0$. Wäre nun $\iota = 0$, so hätte man nach (F4) (mit $f = 1$) und (I.9) sofort den Widerspruch $1 = 1 \circ 0 = 0 \circ 1 = 0$. – Wäre hingegen $\iota = 1$, so ergäbe sich mittels (F5) derselbe Widerspruch: $0 = \iota \circ 0 = 1 \circ 0 = 1$. \diamond

Die *Einheitengruppe* von \mathbb{F} werde mit \mathbb{F}^\times bezeichnet. Sie besteht aus den Elementen $f \in \mathbb{F}$, die ein multiplikatives Inverses f^{-1} besitzen (gleichbedeutend auch in reziproker Form $1/f$ notiert). In jedem Fall gehören 1 und -1 zu \mathbb{F}^\times .

Ähnlich wie in § 2 definieren wir zueinander (kompositionell) *inverse* Funktionen $f, g \in \mathbb{F}$ durch die Bedingung $f \circ g = g \circ f = \iota$. Ebenso übernehmen wir die früher eingeführte Schreibweise \bar{f} für die dann zu f eindeutig bestimmte Umkehrfunktion g . Natürlich gilt auch $f = \bar{\bar{f}}$ und behält wortwörtlich die in Satz I.2 formulierte Umkehrregel ihre Gültigkeit. Eine Funktion $f \in \mathbb{F}$ ist involutorisch, wenn $f \circ f = \iota$ (und damit $\bar{\bar{f}} = f$).

Konstanten. Polynomiale Funktionen. – Das soweit vorgestellte Axiomensystem einer Funktionenalgebra \mathbb{F} bezieht sich auf nur eine Sorte von Dingen, die als *Funktionen* bezeichnet werden, da dies der informellen inhaltlichen Vorstellung entspricht, an der sich die Formulierung der Axiome und die daran geknüpften Begriffsbildungen ausrichten. Anders als bei den in §§ 1–2 betrachteten reellen Funktionen gibt es hier nicht mehr die ontologische Zweiteilung in Zahlen einerseits und auf Zahlenmengen operierenden Funktionen andererseits. Nichtsdestoweniger ist es möglich, aus dem in \mathbb{F} gegebenen »Material« eine gewisse Teilmenge auszusondern, deren Elemente

(Funktionen) ersatzweise die Rolle von Zahlen übernehmen. Die Rekonstruktion der ganzzahligen ›Konstanten‹ $n \in \mathbb{Z}$ als spezielle Elemente von \mathbb{F} ist ein Beispiel dafür.

Spätestens jetzt benötigen wir daher aber auch eine Definition, die allgemein und in plausibler Weise festlegt, wann eine Funktion als konstant anzusehen ist. Das folgende einfache Kriterium hat Karl Menger [*Algebra of Analysis*, Notre Dame Mathematical Lectures No. 3, Indiana 1944] vorgeschlagen:

Definition I.1. Eine Funktion $f \in \mathbb{F}$ heißt *Konstante* oder *konstante Funktion*, wenn $f \circ 0 = f$ gilt. Die Menge der Konstanten werde mit \mathbb{K} bezeichnet.

Auf den ersten Blick mag dieses Kriterium als schwach erscheinen; es reicht aber gleichwohl aus, um die Konstanz einer Funktion wie folgt in uneingeschränkter Form zur Geltung zu bringen:

$$\text{Für alle } c \in \mathbb{K} \text{ und für alle } f \in \mathbb{F} \text{ gilt: } c \circ f = c. \quad (\text{I.12})$$

Beweis. Mit (I.2), (I.9) sowie zweimaliger Anwendung von Definition I.1 erhalten wir $c \circ f = (c \circ 0) \circ f = c \circ (0 \circ f) = c \circ 0 = c$. \diamond

Satz I.5. \mathbb{K} ist ein unter der Komposition \circ abgeschlossener unitärer und nullteilerfreier Unterring von \mathbb{F} ; der kleinste solche Unterring ist $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{K}$.

Beweis. 1. Axiom (F5) besagt gerade, dass $1 \in \mathbb{K}$. Seien nun $a, b \in \mathbb{K}$ beliebig gewählt. Wir haben lediglich zu zeigen, dass dann auch $a - b$, $a \cdot b$ und $a \circ b$ konstante Funktionen gemäß Definition I.1 sind. In der Tat ergibt sich mittels Axiom (F2) und (I.10)

$$(a - b) \circ 0 = (a \circ 0) + ((-b) \circ 0) = a - (b \circ 0) = a - b.$$

Noch einfacher erhalten wir mittels Axiom (F3)

$$(a \cdot b) \circ 0 = (a \circ 0) \cdot (b \circ 0) = a \cdot b.$$

Nach (I.12) haben wir speziell $a \circ b = a \in \mathbb{K}$ und damit auch die Abgeschlossenheit von \mathbb{K} unter der Komposition. Die Nullteilerfreiheit ist selbstverständlich, da bereits im Oberring \mathbb{F} gegeben.

2. \mathbb{Z} ist der von 1 (= Eins von \mathbb{F}) erzeugte und damit kleinste unitäre Unterring von \mathbb{F} . Es ist daher noch zu zeigen, dass die Elemente von \mathbb{Z} tatsächlich Konstanten sind (was dem Leser überlassen bleibt; siehe Aufgabe 17). Hieraus ergibt sich dann die Abgeschlossenheit bezüglich \circ als triviale Folgerung. \diamond

Bemerkung. Ist das Verkettungsprodukt zweier Funktionen $f, g \in \mathbb{F}$ nicht definiert, so heißt das: Es gibt kein $h \in \mathbb{F}$ mit $f \circ g = h$. In Anlehnung an die leere Funktion (siehe Ende von § 1), die bei der Zusammensetzung konkreter Funktionen (mit Definitionsbereich) entstehen kann, können wir hier ein abstraktes Analogon λ zu \emptyset einführen, das vereinbarungsgemäß *nicht* in \mathbb{F} enthalten ist und als Operand in jeglichem Funktionsterm diesen zu λ annulliert. Die Gleichung $f \circ g = \lambda$ drückt dann gerade aus, dass $f \circ g$ nicht definiert ist. Im Hinblick auf diese Vereinbarung ($\lambda \notin \mathbb{F}$) besagt nun umgekehrt die Abgeschlossenheit einer Menge $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{F}$ unter \circ , dass die Komposition dort eine *totale* Verknüpfung der Form $\mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ ist.

Die Argumente einer gewöhnlichen Funktion, etwa vom Typ $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sind Konstanten (reelle Zahlen). Da sich nun – wie Satz I.5 zeigt – auch in einer abstrakten Funktionenalgebra \mathbb{F} ein ihr eigener, gleichsam von Haus aus mitgegebener Ring \mathbb{K} von Konstanten abgrenzen lässt, liegt es nahe, die Anwendung einer Funktion auf eine Konstante (als Argument) mit Hilfe der in \mathbb{F} gegebenen Verkettung nachzubilden. Mit jedem $f \in \mathbb{F}$ assoziieren wir daher eine Abbildung $f^* : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ vermöge der Vorschrift

$$f^*(c) := f \circ c. \quad (\text{I.13})$$

Man beachte: Die Funktion f^* ist keinesfalls ein Element von \mathbb{F} , sondern eine Abbildung im gewöhnlichen Sinn. Ihr Definitionsbereich besteht aus allen Konstanten $c \in \mathbb{K}$, für die $f \circ c$ existiert. Ist letzteres der Fall, so ist $f \circ c$ in der Tat eine Konstante, denn man hat $(f \circ c) \circ 0 = f \circ (c \circ 0) = f \circ c$.

Wir bezeichnen nun mit \mathbb{F}^* die Menge $\{f^* : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} \mid f \in \mathbb{F}\}$ und etablieren auf ihr die (wie üblich argumentweise definierten) Verknüpfungen: Addition, Multiplikation und Verkettung von Funktionen (als Ersetzung nach dem Muster von § 3). Der Einfachheit halber sollen diese Operationen mit denselben Symbolen der Funktionenalgebra \mathbb{F} notiert werden; durch die Kennzeichnung der ›echten‹ Funktionen mit einem Stern sind Missverständnisse dabei nicht zu befürchten.

Es zeigt sich, dass \mathbb{F}^* ein strukturtreues Abbild der zugrunde liegenden abstrakten Funktionenalgebra \mathbb{F} ist:

Satz I.6. Die Abbildung $\mathbb{F} \ni f \mapsto f^* \in \mathbb{F}^*$ ist ein Homomorphismus, d. h. für alle $f, g \in \mathbb{F}$ gelten die Aussagen: $(f + g)^* = f^* + g^*$, $(f \cdot g)^* = f^* \cdot g^*$, $(f \circ g)^* = f^* \circ g^*$; ferner gilt $a^* = a$ für $a \in \mathbb{K}$ sowie $\iota^* = \text{id}$.

Beweis. Sei $c \in \mathbb{K}$ beliebig. Dann ergibt sich mit (I.13) und (F2)

$$\begin{aligned}(f + g)^*(c) &= (f + g) \circ c \\ &= (f \circ c) + (g \circ c) \\ &= f^*(c) + g^*(c) \\ &= (f^* + g^*)(c)\end{aligned}$$

und damit $(f + g)^* = f^* + g^*$. Auf dieselbe Weise erhält man mittels (F3) die Aussage zur Multiplikation. — Für die Verkettung liefert (F1):

$$\begin{aligned}(f \circ g)^*(c) &= (f \circ g) \circ c \\ &= f \circ (g \circ c) \\ &= f \circ g^*(c) \\ &= f^*(g^*(c)) \\ &= (f^* \circ g^*)(c).\end{aligned}$$

Für beliebiges $a \in \mathbb{K}$ hat man nach (I.12) speziell $a^*(c) = a \circ c = a$. Somit ist a^* die Funktion $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, die für jedes Argument die Konstante a liefert. Die Gleichheit $\iota^* = \text{id}$ folgt unmittelbar aus $\iota^*(c) = \iota \circ c = c$. \diamond

Die Frage liegt nahe, ob der Homomorphismus in Satz I.6 darüber hinaus ein Monomorphismus ist, d. h. ob $f^* = g^*$ die Gleichheit $f = g$ impliziert. Offensichtlich ist dies äquivalent zur Aussage⁸

$$\forall c \in \mathbb{K} : f \circ c = g \circ c \implies f = g. \quad (\text{I.14})$$

Es ist in dieser Allgemeinheit nicht ohne weiteres zu erkennen, ob (I.14) sich bereits aus den Axiomen (F0-5) folgern lässt. Schwächt man (F0) allerdings dahingehend ab, dass \mathbb{F} ein beliebiger kommutativer Ring mit $1 \neq 0$ sein darf, so lassen sich leicht endliche Modelle (bestehend aus gewissen Polynomen über Restklassenringen) angeben, in denen (I.14) ungültig wird [vgl. K. Menger (1944), 13–15]. Im Fall unendlicher Integritätsringe jedoch liegen Gegenbeispiele nicht eben auf der Hand. Die weiter unten beschriebenen Modelle für (F0–5) sind aus klassischen Funktionen bestehende Algebren und erfüllen erwartungsgemäß sämtlich auch (I.14).

⁸ K. Menger [*Algebra of Analysis*, 1944] spricht von einer *Konstantenbasis* \mathbb{K} in \mathbb{F} , wenn dieses Postulat in der Funktionenalgebra \mathbb{F} erfüllt ist

Die Frage, inwieweit (I.14) aus (F0–5) gefolgert werden kann, hat aber zumindest teilweise eine positive Antwort. Dazu betrachten wir den Ring $\mathbb{K}[X]$ der (algebraisch aufgefassten) Polynome über \mathbb{K} in einer Unbestimmten X . Ein solches Polynom hat die Gestalt

$$p = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n \quad \text{mit } a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}.$$

Natürlich ist p kein Element von \mathbb{F} . Ersetzen wir aber in p die Unbestimmte X durch eine Funktion $h \in \mathbb{F}$, so gehört das Ergebnis

$$E_p(h) := a_0 + a_1h + a_2h^2 + \cdots + a_nh^n \quad (\text{I.15})$$

zur Funktionenalgebra \mathbb{F} . Die speziell für $h = \iota$ entstehenden Funktionen nennen wir *polynomial* oder *innere Polynome von \mathbb{F}* und bezeichnen die zugehörige Gesamtheit sinngemäß mit $\mathbb{K}[\iota]$. Somit ist $f \in \mathbb{K}[\iota]$ genau dann, wenn $f = E_p(\iota)$ für ein $p \in \mathbb{K}[X]$.

Aufschlussreich ist nun der Übergang von f zu f^* . Nach Satz I.6 ergibt sich

$$\begin{aligned} E_p(\iota)^* = f^* &= a_0^* + a_1^*\iota^* + a_2^*(\iota^*)^2 + \cdots + a_n^*(\iota^*)^n \\ &= a_0 + a_1\text{id} + a_2\text{id}^2 + \cdots + a_n\text{id}^n = E_p. \end{aligned} \quad (\text{I.16})$$

Die Menge aller $E_p : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ mit $p \in \mathbb{K}[X]$ werde mit $\text{P}(\mathbb{K})$ bezeichnet (in Analogie zum Ring $\text{P}(\mathbb{R})$ aus § 1).

Satz I.7. *Es bestehen (bezüglich Addition, Multiplikation und Komposition) die Isomorphismen: $\mathbb{K}[\iota] \cong \mathbb{K}[X] \cong \text{P}(\mathbb{K})$.*

Beweis. 1. Wir stellen zunächst fest, dass die Identität $\iota \in \mathbb{F}$ ein in Bezug auf \mathbb{K} transzendentes Element ist. Denn anderenfalls hätte man $E_p(\iota) = 0$ für ein geeignetes $p = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ und damit nach (I.16): $E_p(\iota)^* = 0^* = 0$. Da jedoch die Potenzen $\text{id}^0, \text{id}^1, \text{id}^2, \dots$ eine Basis des Vektorraums $\text{P}(\mathbb{K})$ bilden⁹, müssen sämtliche Koeffizienten a_0, a_1, \dots, a_n verschwinden. Dies ist ein Widerspruch zu $p \neq 0$, womit die Transzendenz von ι gezeigt ist.

2. Nach einem bekannten Lehrsatz der Algebra ergibt sich aus der Transzendenz von ι bezüglich \mathbb{K} die Isomorphie $\mathbb{K}[X] \cong \mathbb{K}[\iota]$, und zwar vermittelt

⁹ Vgl. dazu die Aufgabe 2–§ 1, deren Lösung beinahe wörtlich auch für den Fall gilt, dass die Koeffizienten aus dem unendlichen Integritätsring \mathbb{K} statt aus \mathbb{R} genommen werden.

durch den Ringisomorphismus¹⁰

$$\mathbb{K}[X] \ni p \mapsto E_p(\iota) \in \mathbb{K}[\iota].$$

Eine einfache Rechnung bestätigt, dass dieser Isomorphismus auch die Komposition einbezieht, d. h. es gilt $E_{p \circ q}(\iota) = E_p(\iota) \circ E_q(\iota)$ für alle $p, q \in \mathbb{K}[X]$. Hierbei ist $p \circ q$ als das Polynom definiert, welches entsteht, indem wir in p die Unbestimmte X durch das Polynom q ersetzen.

3. Die Abbildung $E : p \mapsto E_p$, welche die Unbestimmte eines Polynoms p durch die Identität id ersetzt, ist ein Ringhomomorphismus $\mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{K})$. Sofern nun aber mit \mathbb{K} ein unendlicher Integritätsring vorliegt, ist E nach einem grundlegenden Satz der Algebra¹¹ sogar injektiv; das heißt: Die Polynomfunktionen $E_p, E_q \in \mathbb{P}(\mathbb{K})$, die aus voneinander verschiedenen Polynomen p, q hervorgehen, sind ebenfalls voneinander verschieden. Auch dieser Isomorphismus erstreckt sich auf die Komposition, denn mit (I.16) und Satz I.6 ergibt sich unter Verwendung der Gleichung aus der obigen Nr. 2:

$$E_{p \circ q} = E_{p \circ q}(\iota)^* = (E_p(\iota) \circ E_q(\iota))^* = E_p(\iota)^* \circ E_q(\iota)^* = E_p \circ E_q.$$

Damit ist der Nachweis von $\mathbb{K}[X] \cong \mathbb{P}(\mathbb{K})$ erbracht. \diamond

Satz I.8. *Die inneren Polynome von \mathbb{F} bilden einen unter der Komposition \circ abgeschlossenen unitären kommutativen und nullteilerfreien Unterring $\mathbb{K}[\iota]$ von \mathbb{F} , in dem (I.14) erfüllt ist.*

Beweis. Die Menge $\mathbb{K}[\iota] \subseteq \mathbb{F}$ ist nach Satz I.7 isomorph zum Polynomring $\mathbb{K}[X]$ und daher ein kommutativer Unterring von \mathbb{F} ; die $1 \in \mathbb{F}$ ist auch das Einselement von $\mathbb{K}[\iota]$. Aus der Algebra ist bekannt¹², dass der Polynomring über einem Integritätsring wieder ein Integritätsring ist; folglich ist auch $\mathbb{K}[\iota]$ nullteilerfrei. Die Abgeschlossenheit von $\mathbb{K}[\iota]$ unter \circ ist ebenfalls schon in Satz I.7 enthalten (Abschnitt Nr. 2 des Beweises; vgl. auch Aufgabe 17).

Wir haben somit lediglich noch (I.14) zu verifizieren.

Laut Satz I.6 ist die Abbildung $\mathbb{F} \ni f \mapsto f^* \in \mathbb{F}^*$ ein Homomorphismus (bezüglich Addition, Multiplikation und Komposition). Er lässt sich auf die Unter algebra $\mathbb{K}[\iota]$ einschränken zu einer Abbildung $\mathbb{K}[\iota] \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{K})$. Letztere ist

¹⁰ Siehe etwa L. J. Okunjew: Der Ring der Polynome und der Körper der rationalen Funktionen (hier: Satz 3, S. 124–126); in: Alexandroff, Markuschewitsch, Chinchin, *Enzyklopädie der Elementarmathematik*, Band II: Algebra; Berlin 1972.

¹¹ Vgl. auch dazu Okunjew (Fußnote 10), Satz 11, S. 153–154

¹² Siehe Okunjew (Fußnote 10), Satz 4, S. 128.

nun in der Tat injektiv (und vermittelt infolgedessen die Isomorphie $\mathbb{K}[\iota] \cong P(\mathbb{K})$, die ja schon anderweitig – aufgrund von Satz I.7 – feststeht).

Zum Beweis seien irgend zwei polynomiale Funktionen $f, g \in \mathbb{K}[\iota]$ mit $f^* = g^*$ angenommen. Dann gilt $f = E_p(\iota)$ und $g = E_q(\iota)$ mit geeigneten $p, q \in \mathbb{K}[X]$. Hieraus folgt mittels (I.16): $E_p = E_p(\iota)^* = E_q(\iota)^* = E_q$. In Abschnitt Nr. 3 des Beweises zu Satz I.7 wurde die Injektivität der Abbildung $E : \mathbb{K}[X] \ni p \mapsto E_p \in P(\mathbb{K})$ dargelegt; aus ihr gewinnen wir $p = q$ und damit auch $f = g$. \diamond

Bemerkung (über rationale Funktionen von \mathbb{F}). Da $\mathbb{K}[\iota]$ ein Oberring von \mathbb{K} ist, liefert Satz I.8 eine gegenüber Satz I.5 erweiterte Aussage. Ihr zufolge muss jede Funktionenalgebra, d. h. jedes Modell der Axiome (F0–5), eine Unter algebra von polynomialen Funktionen enthalten. Wenn wir darüber hinausgehend annehmen, dass $\mathbb{K}[\iota]$ Unter ring eines (nicht näher bezeichneten) Teilkörpers von \mathbb{F} ist, können wir in letzterem den zu $\mathbb{K}[\iota]$ gehörenden Körper der Brüche $f/g = fg^{-1}$ ($f, g \in \mathbb{K}[\iota]$, $g \neq 0$) bilden. Dieser ist (auch unter Einbeziehung der Komposition) isomorph zum Körper $\mathbb{K}(X)$ der rationalen Funktionen über \mathbb{K} in der Unbestimmten X . Sinngemäß bezeichnen wir ihn daher mit $\mathbb{K}(\iota)$. Addition und Multiplikation in $\mathbb{K}(\iota)$ erfolgen nach den Regeln der gewöhnlichen Bruchrechnung. Sind $f, g \in \mathbb{K}[\iota]$, $g \neq 0$ und $h \in \mathbb{K}(\iota)$, so ergibt sich für die Komposition \circ gemäß Axiom (F3) und unter Beachtung von Aufgabe 18:

$$\frac{f}{g} \circ h = (f \cdot g^{-1}) \circ h = (f \circ h) \cdot (g^{-1} \circ h) = (f \circ h) \cdot (g \circ h)^{-1} = \frac{f \circ h}{g \circ h}. \quad (*)$$

Da $\mathbb{K}(\iota)$ eine Unter algebra von \mathbb{F} ist, sind sämtliche Verkettungsprodukte in (*) bereits dann wohldefiniert, wenn $g \circ h \neq 0$ ist.

Beispiele: Modelle des Axiomensystems (F0–5). — Bei den im Folgenden aufgeführten Beispielen handelt es sich um konkrete Strukturgebilde, welche die Axiome (F0) bis (F5) erfüllen. Der Begriff ›Funktionen algebra‹ soll für diese Strukturen auch dann verwendet werden, wenn sich die in ihnen gegebene Komposition als nicht durchgängig ausführbare Verknüpfung erweist.

1. Entsprechend Satz I.8 sind die einfachsten Beispiele von Funktionenalgebren zwangsläufig die Ringe der polynomialen (ganz-rationalen) Funktionen mit Koeffizienten aus einem unitären kommutativen Integritätsring der Charakteristik Null. Der in § 1 bereits erwähnte Ring $P(\mathbb{R})$ ist ein solches Beispiel; auf ihm wird das Verkettungsprodukt $f \circ g$ in üblicher Weise als eine Ersetzung definiert: $(f \circ g)(x) := f(g(x))$ (siehe § 3). Das Ergebnis $f \circ g$ ist in allen Fällen wieder eine polynomiale Funktion $\in P(\mathbb{R})$. Das neutrale Element

der Verkettung ist die Identitätsfunktion id .¹³ Der Unterring der Konstanten besteht aus den konstanten Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. – Ersetzt man in diesem Beispiel \mathbb{R} durch den Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen, so erhält man mit $P(\mathbb{C})$ ein völlig analoges Modell für (F0–5).

2. Sei U eine offene Teilmenge von \mathbb{C} und $H(U)$ die Menge der auf U holomorphen Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. Mit der (wie in § 1) argumentweise erklärten Addition und Multiplikation von Funktionen erfüllt $H(U)$ das Axiom (F0). Auch den übrigen Bedingungen (F1–5) ist Genüge getan, sofern die Fälle ausgenommen werden, in denen ein Verkettungsprodukt $f \circ g$ nicht existiert (weil Bildpunkte von g außerhalb U liegen). Im allgemeinen ist daher \circ nur eine partielle Operation auf $H(U)$. Die Komposition wird hingegen uneingeschränkt ausführbar, wenn man $U = \mathbb{C}$ voraussetzt und damit zum Integritätsring $H(\mathbb{C})$ der ganzen Funktionen übergeht. Wie in Beispiel 1 erhält man so einen unter \circ abgeschlossenen Ring. Die konstanten Funktionen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ bilden den Unterring seiner Konstanten.

Bemerkung. Zu den frühen Quellen einer strukturtheoretisch ausgerichteten Untersuchung von Funktionenringen mit uneingeschränkt ausführbarer Komposition gehört die Arbeit von Irving Adler [Composition Rings. *Duke Math. J.* 29/4 (1962), 607–623]. Sich auf diese Klasse von Kompositionsalgebren festzulegen, würde freilich unsere späteren Betrachtungen in mancher Hinsicht zu sehr einengen. Zudem dienen uns hier, anders als bei den von Adler angeregten Studien, algebraische Strukturen vornehmlich als ein Mittel, die gewöhnliche Praxis des rechnerischen Umgangs mit Funktionen formal widerzuspiegeln. Für diesen Zweck erweist es sich als sachgerecht und ausreichend, die Zusammensetzbarkeit von Funktionen fallweise, d. h. für bestimmte Teilmengen $\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2$ von \mathbb{F} sicherzustellen, und zwar in dem Sinn, dass $f \circ g$ jedenfalls dann als Element von \mathbb{F} definiert ist, wenn nur $f \in \mathbb{H}_1$ und $g \in \mathbb{H}_2$ gilt.

3. Den Körper der (einstelligen) *rationalen Funktionen* über \mathbb{R} können wir entstanden denken als Quotientenkörper des Integritätsrings $P(\mathbb{R})$. Zusammen mit der (in § 2 erklärten) Komposition von Funktionen ist er ein Modell der Axiome (F0–5). Wie in Beispiel 2 sind seine Konstanten die konstanten Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Eine rationale Funktion f lässt sich in der Form eines Bruchs

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \text{mit } p, q \in P(\mathbb{R}), \quad q \neq 0,$$

darstellen, worin gemeinsame Faktoren von Zähler- und Nennerpolynom bereits herausgekürzt seien. Insbesondere sind damit die p und q gemeinsa-

¹³ Das gilt auch für die übrigen hier aufgeführten Beispiele.

men Nullstellen gleicher Vielfachheit beseitigt und die dadurch bedingten hebbaren Unstetigkeiten gehoben. Auszuschließen sind ferner die höchstens endlich vielen Nullstellen $a \in \mathbb{R}$ von q (mithin Polstellen von f), für die $f \circ a = f(a)$ nicht definiert ist. Die rationalen Funktionen f sind somit auf ganz \mathbb{R} außerhalb einer endlichen Menge P_f von Polstellen erklärt. Man überzeugt sich leicht davon, dass auch ihre Verkettungsprodukte diese Eigenschaft besitzen (siehe Aufgabe 19); der Körper der rationalen Funktionen ist infolgedessen abgeschlossen unter der Komposition. — Ersetzt man den Koeffizientenkörper \mathbb{R} durch \mathbb{C} , so gelten *mutatis mutandis* dieselben Verhältnisse für die so entstehenden rationalen Funktionen im Komplexen.

4. Ähnlich wie die rationalen Funktionen durch Quotientenbildung aus den ganz-rationalen Funktionen hervorgehen, erhalten wir die Gesamtheit $M(\mathbb{C})$ der *meromorphen Funktionen* auf der komplexen Ebene als Quotientenkörper des Integritätsrings $H(\mathbb{C})$ der ganzen (d. h. auf \mathbb{C} holomorphen) Funktionen. Eine meromorphe Funktion f besitzt *höchstens außerwesentliche Singularitäten*. Denken wir uns, wie in Beispiel 3, die hebbaren von ihnen stets schon gehoben, so bleibt allenfalls noch eine diskrete Menge P_f von Polstellen (= Nullstellen der Nennerfunktion von f) übrig. Die Funktion f ist dann auf $\mathbb{C} \setminus P_f$ holomorph. — Summen, Produkte und Reziproke meromorpher Funktionen sind ebenfalls wieder meromorph.¹⁴ Nimmt man die Komposition \circ als dritte Verknüpfung hinzu, so erfüllt auch $M(\mathbb{C})$ die Axiome (F0–5) einer Funktionenalgebra. Die Konstanten sind dieselben wie in Beispiel 2.

Im Unterschied zu den vorausgegangenen Modellen ist die reichhaltigere Funktionenklasse $M(\mathbb{C})$ jedoch nicht abgeschlossen unter \circ ; die Komposition ist daher eine partielle Verknüpfung auf $M(\mathbb{C})$. Das zeigen schon einfache Gegenbeispiele wie das Verkettungsprodukt $f(z) = e^{1/z}$ der (ganzen) Exponentialfunktion mit der (meromorphen) Stürzung $z \mapsto 1/z$. Es gilt nämlich $f(z) \rightarrow \infty$ für $z \rightarrow +0$, hingegen $f(z) \rightarrow 0$ für $z \rightarrow -0$, was impliziert, dass f im Nullpunkt eine wesentliche singuläre Stelle besitzt.

Aufgaben

14. Beweise: Die auf Seite 15 (Fußnote 6) definierte Abbildung $s : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{F}, +)$

¹⁴ Einzelheiten dazu findet man in zahlreichen Lehrbüchern zur komplexen Analysis; vgl. etwa Henri Cartan: *Elementare Theorie der analytischen Funktionen einer oder mehrerer komplexen Veränderlichen*. Bibliographisches Institut, Mannheim 1966, Kapitel I, Abschnitt 4.5.

ist ein injektiver Homomorphismus der additiven Gruppen.

15. Gib Beweise für (I.9) und (I.10).

16. Zeige: $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{K}$. (Hier ist \mathbb{Z} zu verstehen als das isomorphe Bild der Menge der ganzen Zahlen unter der Abbildung s aus Aufgabe 14.)

17. Zeige: $E_{p \circ q}(t) = E_p(t) \circ E_q(t)$ für alle $p, q \in \mathbb{K}[X]$.

18. Es sei $g \in \mathbb{F}^\times$ und $h \in \mathbb{F}$. Zeige: $g \circ h \in \mathbb{F}^\times$ und $g^{-1} \circ h = (g \circ h)^{-1}$.

19. Seien f, g irgend zwei rationale Funktionen über \mathbb{R} . Beweise: $f \circ g$ ist eine rationale Funktion über \mathbb{R} , die überall außerhalb einer endlichen Menge $P_{f \circ g}$ von Polstellen definiert ist. Gib eine genauere Beschreibung von $P_{f \circ g}$.

20. Die Funktionen $f(z) = e^z$, $g(z) = (z - 1)^{-1}$ und $h(z) = z^{-1}$ sind sämtlich meromorph. Warum ist $g \circ f \circ h$ nicht meromorph?

§ 4. Formale Differentialrechnung

Der axiomatisch gekennzeichneten Funktionenalgebra \mathbb{F} soll im Folgenden ein einstelliger Operator $D : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ hinzugefügt werden, der das formale Gegenstück zum Differential bzw. zur Ableitung von Funktionen in der klassischen Analysis darstellt. Zu diesem Zweck sind Axiome zu formulieren, welche die Wirkung von D auf die drei in \mathbb{F} vorhandenen Verknüpfungen irgend zweier Funktionen $f, g \in \mathbb{F}$ beschreiben:

$$(D1) \quad D(f + g) = D(f) + D(g),$$

$$(D2) \quad D(f \cdot g) = D(f) \cdot g + f \cdot D(g),$$

$$(D3) \quad D(f \circ g) = (D(f) \circ g) \cdot D(g).$$

Leicht wiederzuerkennen sind hier die aus der Analysis bekannte Summenregel (D1), Produktregel (D2) und Kettenregel (D3).

Definition I.2. Der Ring \mathbb{F} wird *Differentialring* und D eine *Derivation* oder *Ableitung auf \mathbb{F}* genannt, wenn (D1) und (D2) für alle $f, g \in \mathbb{F}$ erfüllt sind. $D(f)$ heißt dann *Derivierte von f* oder *von f abgeleitete Funktion*. Eine Derivation D heißt *trivial*, wenn $D(f) = 0$ für alle $f \in \mathbb{F}$.

Für das Folgende werde D als nichttriviale Derivation vorausgesetzt. Auf der Funktionenalgebra \mathbb{F} ist natürlich auch die Komposition als dritte Verknüpfung einzubeziehen. Eine Derivation, die zusätzlich (D3) erfüllt, nennen

wir *Derivation mit Kettenregel*. (D3) handhaben wir hier als optionales Axiom, was bedeuten soll, dass auch Ableitungen betrachtet werden, für welche die Kettenregel nicht gilt. Ein einfaches Beispiel dafür ist θD , wo $\theta \in \mathbb{F}$, $\theta \neq 0$, und D eine nichttriviale Derivation mit Kettenregel ist. Dann ist auch θD eine nichttriviale Derivation; allerdings erfüllt diese (D3) nur für $\theta = 1$ (siehe Aufgabe 21). Nebenbei erweist sich so, dass die Kettenregel von (D1) & (D2) unabhängig ist.

Wir wollen (\mathbb{F}, D) eine *Funktionenalgebra mit Derivation* nennen, wenn beide Axiomengruppen (F0–5) und (D1–3) erfüllt sind¹⁵.

Bemerkung. Fügt man den vier Modellen von (F0–5), die am Ende von § 3 beschrieben wurden, die gewöhnliche reelle bzw. komplexe Ableitung hinzu, so gelten in ihnen auch die Differentiationsregeln (D1–3). Ferner ist $D(f) \in \mathbb{F}$ für $f \in \mathbb{F}$ gewährleistet, da die betreffenden (polynomialen, holomorphen, etc.) Funktionen in ihren Definitionsbereichen beliebig oft differenzierbar sind.

Grundformeln im Differentialring \mathbb{F} . – Im Folgenden sind einige grundlegende Eigenschaften einer Derivation D zusammengestellt, soweit sie sich bereits aus den Axiomen (D1) und (D2) gewinnen lassen.

$$\text{Für alle } m \in \mathbb{Z}, f \in \mathbb{F} \text{ gilt: } D(mf) = mD(f). \quad (\text{I.17})$$

Beweis. Nach (D2) hat man $D(mf) = D(m)f + mD(f)$. Somit bleibt noch $D(m) = 0$ zu zeigen. – Mit (D1) ergibt sich $D(0) = D(0+0) = D(0)+D(0)$, also $D(0) = 0$. Nach (D2) ist $D(1) = D(1 \cdot 1) = D(1) \cdot 1 + 1 \cdot D(1)$, mithin $D(1) = 0$. Hieraus folgt mit (D1) die Gültigkeit von $D(m) = 0$ für alle ganzen $m \geq 0$. Ebenfalls aus (D1) erhalten wir $0 = D(-f + f) = D(-f) + D(f)$ und damit $D(-f) = -D(f)$, woraus ersichtlich wird, dass $D(m) = 0$ auch für $m < 0$ gilt. \diamond

Die Produktregel (D2) lässt sich leicht auf mehrere Faktoren $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{F}$ verallgemeinern (siehe Aufgabe 22):

$$D(f_1 \cdots f_n) = \sum_{k=1}^n f_1 \cdots f_{k-1} D(f_k) f_{k+1} \cdots f_n. \quad (\text{I.18})$$

Hieraus erhält man speziell für $f_1 = \dots = f_n = f \in \mathbb{F}$ die *Potenzregel*

$$D(f^n) = n f^{n-1} D(f). \quad (\text{I.19})$$

¹⁵ Später wird noch ein weiteres Axiom (D4) hinzukommen; siehe Seite 30.

Für Einheiten $f \in \mathbb{F}^\times$ gilt die folgende *Reziprokenregel*:

$$D(f^{-1}) = -f^{-2}D(f). \quad (\text{I.20})$$

Beweis. Aus $1 = f \cdot f^{-1}$ ergibt sich mit (I.17) und (D2) die Gleichung $0 = D(f \cdot f^{-1}) = D(f)f^{-1} + fD(f^{-1})$, die noch nach $D(f^{-1})$ aufzulösen ist. \diamond

Ist f eine Einheit von \mathbb{F} , so gilt die Potenzregel (I.19) auch für $n \leq 0$. Für $n = 0$ ist das klar. Für $n < 0$ gilt definitionsgemäß $f^n = (f^{-1})^{-n}$, woraus unter Verwendung von (I.19) und (I.20) folgt:

$$D(f^n) = -n(f^{-1})^{-n-1}D(f^{-1}) = -nf^{n+1}D(f^{-1}) = nf^{n-1}D(f).$$

Unmittelbar aus (D2) und (I.20) ergibt sich für alle $f \in \mathbb{F}$, $g \in \mathbb{F}^\times$ die *Quotientenregel*

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{D(f)g - fD(g)}{g^2}. \quad (\text{I.21})$$

Die Ableitung polynomialer Funktionen. – Es soll im Folgenden untersucht werden, inwieweit sich die Derivierte $D(f)$ einer polynomialen Funktion $f = a_0 + a_1\iota + \dots + a_n\iota^n \in \mathbb{K}[\iota]$ mit Hilfe der bisher bekannten Regeln bestimmen lässt. Zunächst ist klar, dass dies durch (D1) auf die Aufgabe zurückgeführt wird, die Summanden $a_k\iota^k$ abzuleiten. Mittels (D2) und (I.19) erhalten wir für $k = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} D(a_k\iota^k) &= D(a_k)\iota^k + a_kD(\iota^k) \\ &= D(a_k)\iota^k + ka_k\iota^{k-1}D(\iota) \end{aligned}$$

und nach Aufsummierung für f (und Umordnung der Summanden):

$$D(f) = \sum_{k=0}^n D(a_k)\iota^k + \left(\sum_{k=1}^n ka_k\iota^{k-1} \right) \cdot D(\iota). \quad (*)$$

Die erste Summe auf der rechten Seite von (*) werde vorläufig mit f_D , die zweite (geklammerte) Summe mit $\partial(f)$ abgekürzt. Damit wird (*) zu

$$D(f) = f_D + \partial(f)D(\iota). \quad (\text{I.22})$$

Offensichtlich entspricht $\partial(f)$ der Form nach der gewöhnlichen Ableitung von ganz-rationalen Funktionen oder – was auf dasselbe hinausläuft – der

formalen Ableitung von algebraisch aufgefassten Polynomen. Seien p, q solche Polynome über dem Ring \mathbb{K} mit $f = E_p(\iota)$ und $\partial(f) = E_q(\iota)$:

$$p = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n, \quad q = a_1 + 2a_2X + \cdots + na_nX^{n-1};$$

dann entsteht q aus p definitionsgemäß durch ›formales Ableiten¹⁶ nach der Unbestimmten X ‹.

Mittels einer einfachen Rechnung bestätigt man, dass ∂ tatsächlich eine Derivation auf $\mathbb{K}[\iota]$ ist, d. h. (D1) und (D2) erfüllt (siehe Aufgabe 24).

Konvention: Auch für Polynome $p \in \mathbb{K}[X]$ soll im Folgenden anstelle der häufig anzutreffenden Bezeichnung p' (für das obige q) die Notation $\partial(p)$ verwendet werden. Das hat den Vorteil, ein selbständiges Operatorzeichen zur Verfügung zu haben. In Fällen, wo der Bezug auf eine Unbestimmte von Belang ist, verwenden wir vorzugsweise Bezeichnungen¹⁷ wie

$$q = \partial_X p \quad \text{oder} \quad q = \frac{\partial p}{\partial X}.$$

Zudem soll die Ersetzung der Unbestimmten künftig direkt (d. h. ohne den Ersetzungsoperator E) durch Anfügen einer Argumentklammer in herkömmlicher Weise notiert werden, also etwa im obigen Beispiel: $f = p(\iota)$ und $\partial(f) = \partial_X p(\iota)$. Der Einfachheit und Einheitlichkeit halber werden von nun an auch die Elemente von $\mathbb{K}[\iota]$ als *Polynome* bezeichnet. Missverständnisse sind dabei nicht zu befürchten, zumal unter den hier gemachten Annahmen ohnehin die algebraische und die funktionale Auffassung zur Deckung kommen (vgl. Satz I.7).

Wenden wir nun unsere Aufmerksamkeit erneut der Gleichung (I.22) zu. Um darin weitere Vereinfachungen zu erzielen, sind noch die folgenden Fragen zu klären:

- Was ist die Derivierte $D(\iota)$?
- Was ist die Derivierte einer Konstanten aus \mathbb{K} ?

Führen wir uns vor Augen, dass die Identität ι ebenso wie die konstanten Funktionen Elemente von \mathbb{F} sind, deren ›Verhalten‹ ausschließlich über die Komposition festgelegt wird, so leuchtet es ohne weiteres ein, dass allein auf

¹⁶ Die Operation hat rein algebraischen Charakter und ist an keinerlei Begriffe der Analysis gebunden wie ›Grenzwert‹ oder ›Differentialquotient‹.

¹⁷ Diese Schreibweisen kommen vor allem dann zum Zug, wenn wir uns mit Polynomen in mehreren Unbestimmten beschäftigen.

der Basis von (D1) und (D2) eine zufriedenstellende Antwort nicht zu gewinnen ist. Das ändert sich erst, wenn man für D auch das Erfülltsein der Kettenregel fordert. Erwartungsgemäß und in Übereinstimmung mit den aus der klassischen Analysis vertrauten Tatsachen ergibt sich dann $D(\iota) = 1$ sowie $D(c) = 0$ für alle $c \in \mathbb{K}$ (siehe weiter unten den Abschnitt: Einbeziehung der Kettenregel).

Wenn die Derivation D die Konstanten zum Verschwinden bringt, wird auch der Ausdruck f_D in (I.22) gleich Null. In diesem Fall ist die Derivierte $D(f)$ eines Polynoms f bis auf den festen Faktor $D(\iota)$ eindeutig bestimmt als die formale (oder gewöhnliche) Ableitung von f :

$$D(f) = \partial(f) \cdot D(\iota). \quad (\text{I.23})$$

Dieses Resultat erhalten wir aber für Polynome $f \in \mathbb{Z}[\iota]$ bereits ohne die Einbeziehung der Kettenregel, denn nach (I.17) gilt $D(m) = 0$ zumindest für die ganzzahligen Konstanten $m \in \mathbb{Z}$.

Da in Differentialringen ohne Komposition die Menge \mathbb{K} ohnehin nicht definiert werden kann, erklärt man dort Konstanten von vornherein als diejenigen Elemente von \mathbb{F} , die durch Anwendung von D annulliert werden.

Definition I.3. Sei D eine Derivation auf dem Integritätsring \mathbb{F} . Eine Funktion $f \in \mathbb{F}$ mit $D(f) = 0$ heiße D -Konstante¹⁸. Die Menge aller D -Konstanten werde mit \mathbb{K}_D bezeichnet.

Ebenso wie \mathbb{K} ist auch \mathbb{K}_D ein Unterring von \mathbb{F} (siehe Aufgabe 25). Wie sich beide Unterringe zueinander verhalten, muss weitgehend offen bleiben, solange wir über die Natur der Funktionen nichts Genaueres wissen. In jedem Fall hat man aber $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{K}_D \cap \mathbb{K}$ und – wie wir weiter unten sehen werden – $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}_D$ bei Hinzunahme der Kettenregel.

Bemerkung. Für spezielle Unterringe (oder Modelle) von \mathbb{F} kann auch umgekehrt $\mathbb{K}_D \subseteq \mathbb{K}$ der Fall sein. Ein Beispiel dafür ist $\mathbb{Z}[\iota]$. Sei dazu D als Derivation auf $\mathbb{Z}[\iota]$ und $f = a_0 + a_1\iota + \dots + a_n\iota^n \in \mathbb{Z}[\iota]$ mit $D(f) = 0$ vorausgesetzt. Nach (I.23) gilt dann $\partial(f)D(\iota) = 0$. Da D nichttrivial ist, muss $D(\iota) \neq 0$ sein und somit $\partial(f) = a_1 + 2a_2\iota + \dots + na_n\iota^{n-1} = 0$ wegen der Nullteilerfreiheit von $\mathbb{Z}[\iota]$. Mit denselben Überlegungen wie im Beweis zu Satz I.7 (Abschnitt Nr. 1) ergibt sich dann, dass $a_1 = 2a_2 = \dots = na_n = 0$ und infolgedessen $f = a_0$ ist. Andererseits haben wir $f \circ 0 = a_0$ und damit, wie behauptet, $f \circ 0 = f \in \mathbb{K}$. Natürlich ist $\mathbb{K}_D = \mathbb{K} = \mathbb{Z}$.

¹⁸ Üblicherweise spricht man einfach von den *Konstanten* des Differentialrings. Um jedoch nicht in Konflikt mit unserer früheren und davon völlig unabhängigen Definition I.1 zu geraten, müssen wir die Konstanten eines Differentialrings bezeichnungstechnisch abgrenzen.

Der folgende Satz konstatiert eine abgespeckte Version der Kettenregel für den Fall, dass die ›äußere‹ Funktion des Verkettungsprodukts ein Polynom mit D -Konstanten als Koeffizienten ist.

Satz I.9. *Sei D eine Derivation auf \mathbb{F} mit $D(\iota) = 1$. Es gilt dann für alle $f \in \mathbb{K}_D[\iota]$ und $g \in \mathbb{F}$: $D(f \circ g) = (D(f) \circ g) \cdot D(g)$.*

Beweis. Siehe Aufgabe 26. ◇

Zweifellos ist das Nebeneinander von zweierlei Konstantenbegriffen eine unbefriedigende Situation. Innerhalb unseres axiomatischen Rahmens lässt sie sich naturgemäß aber nur harmonisieren, indem man die Forderungen an eine Derivation bezüglich der Komposition in hinlänglicher Weise spezifiziert. Immerhin zeigt (I.26) (siehe unten), dass aus der Kettenregel die Inklusion $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}_D$ folgt. Deren Umkehrung (und damit Gleichheit von \mathbb{K} und \mathbb{K}_D) ergibt sich erst, wenn wir der zweiten Axiomengruppe (D1–3) eine weitere Formel hinzufügen:

$$(D4) \quad D(f) = 0 \implies f \circ 0 = f.$$

Vorläufig machen wir von Axiom (D4) keinen Gebrauch. Die komplette Gruppe (D1–4) wird dann aber von Beginn des nächsten Kapitels an generell in Kraft gesetzt.

Einbeziehung der Kettenregel. – Um beliebige Verkettungsprodukte von Funktionen aus \mathbb{F} untersuchen zu können, setzen wir jetzt die Gültigkeit von (D3) voraus. Als erstes grundlegendes Resultat erhalten wir für jede nicht-triviale Derivation D mit Kettenregel:

$$D(\iota) = 1. \tag{I.24}$$

Beweis. (D3) und (F4) liefern $D(\iota) = D(\iota \circ \iota) = (D(\iota) \circ \iota) \cdot D(\iota) = D(\iota)^2$ und damit $D(\iota)(D(\iota) - 1) = 0$. Da \mathbb{F} ein Integritätsring ist, kann nur $D(\iota) = 0$ oder $D(\iota) = 1$ sein. Der erste Fall lässt sich leicht ausschließen, denn dann hätte man für jedes $f \in \mathbb{F}$: $D(f) = D(f \circ \iota) = (D(f) \circ \iota) \cdot D(\iota) = 0$ im Widerspruch zur Nichttrivialität von D . Also bleibt nur $D(\iota) = 1$. ◇

Mit (I.24) lässt sich auf einfache Weise die Derivierte einer (kompositionellen) Inversen bestimmen. Sei $f \in \mathbb{F}$ invertierbar. Die Anwendung der Kettenregel auf $f \circ \bar{f} = \iota$ liefert dann

$$D(\bar{f}) = \frac{1}{D(f) \circ \bar{f}}. \tag{I.25}$$

Die Wirkung von D auf die ganzen Konstanten des Rings war schon aus Gleichung (I.17) ersichtlich. Nun können wir allgemeiner feststellen, dass

$$D(c) = 0 \quad \text{für alle } c \in \mathbb{K}. \quad (\text{I.26})$$

Beweis. Definitionsgemäß hat man $c = c \circ 0$ und daraus mit Hilfe der Kettenregel: $D(c) = (D(c) \circ 0) \cdot D(0) = (D(c) \circ 0) \cdot 0 = 0$. \diamond

Die Produktregel und (I.26) liefern nun auch sogleich das entsprechende Gegenstück zu (I.17):

$$\text{Für alle } c \in \mathbb{K}, f \in \mathbb{F} \text{ gilt: } D(cf) = cD(f). \quad (\text{I.27})$$

Der folgende Satz zeigt, dass ein linearer Operator auf dem Polynomring $\mathbb{K}[\iota]$, der die Kettenregel und eine schwache Gradbedingung erfüllt, bereits eindeutig bestimmt ist als die gewöhnliche (formale) Ableitung ∂ auf $\mathbb{K}[\iota]$.

Satz I.10. Sei $D : \mathbb{K}[\iota] \rightarrow \mathbb{K}[\iota]$ eine \mathbb{K} -lineare Abbildung mit $\text{Grad } D(\iota^2) = 1$. Dann gilt: $D = \partial \iff D$ erfüllt die Kettenregel.

Beweis. 1. \Rightarrow : Trivialerweise erfüllt ∂ die Voraussetzungen des Satzes. Darüberhinaus ist ∂ eine Derivation auf $\mathbb{K}[\iota]$ (Aufgabe 24), wobei $\mathbb{K}_\partial = \mathbb{K}$ (Aufgabe 25). Damit gilt für ∂ nach Satz I.9 auch die Kettenregel.

2. \Leftarrow : Sei nun ein \mathbb{K} -lineares D vorgegeben mit (D3) und der im Satz genannten Gradbedingung. Aufgrund der Kettenregel allein haben wir (nach (I.24)) $D(\iota) = 1$. Es genügt daher zu zeigen, dass D die Produktregel (D2) erfüllt (also eine Derivation ist); denn dann erhalten wir mit (I.23) $D(f) = \partial(f)D(\iota) = \partial(f)$ für alle $f \in \mathbb{K}[\iota]$, d. h. $D = \partial$.

Der Gradbedingung entnimmt man die Existenz von $a, b \in \mathbb{K}$ mit $b \neq 0$ und $D(\iota^2) = a + b\iota$. Ferner halten wir fest, dass aufgrund der \mathbb{K} -Linearität von D insbesondere gilt: $D(c) = D(c \cdot 1) = D(c)D(1) = 0$ für alle $c \in \mathbb{K}$.

Um a zu bestimmen, berechnen wir $D((a+b\iota)^2)$ auf zwei unterschiedliche Weisen. Zunächst durch direkte Auswertung des Binoms:

$$\begin{aligned} D((a+b\iota)^2) &= D(a^2 + 2ab\iota + b^2\iota^2) \\ &= D(a^2) + 2abD(\iota) + b^2D(\iota^2) \\ &= 2ab + b^2(a+b\iota) \\ &= 2ab + ab^2 + b^3\iota, \end{aligned}$$

sodann durch Anwendung der Kettenregel:

$$\begin{aligned}
 D((a + b\iota)^2) &= D(\iota^2 \circ (a + b\iota)) \\
 &= (D(\iota^2) \circ (a + b\iota)) \cdot D(a + b\iota) \\
 &= ((a + b\iota) \circ (a + b\iota))(D(a) + bD(\iota)) \\
 &= (a + b(a + b\iota))b \\
 &= ab + ab^2 + b^3\iota.
 \end{aligned}$$

Ein Vergleich der Koeffizienten ergibt $ab = 0$, also $a = 0$ wegen $b \neq 0$.

Wendet man dasselbe Verfahren auf das Binom $(1 + b\iota)^2$ an, so liefert die Kettenregel $D((1 + b\iota)^2) = b^2 + b^3\iota$, das direkte Auswerten hingegen $D((1 + b\iota)^2) = 2b + b^3\iota$. Der Koeffizient $b (\neq 0)$ erfüllt somit die Gleichung $2b = b^2$, und wir erhalten mit der Kürzungsregel $b = 2$.

Damit ist $D(\iota^2) = 2\iota$ gezeigt, und es ergibt sich mit Hilfe der Kettenregel für alle $f \in \mathbb{K}[\iota]$:

$$\begin{aligned}
 D(f^2) &= D(\iota^2 \circ f) = (D(\iota^2) \circ f) \cdot D(f) \\
 &= ((2\iota) \circ f) \cdot D(f) = (2 \circ f) \cdot (\iota \circ f) \cdot D(f) \\
 &= 2fD(f).
 \end{aligned}$$

Abschließend verallgemeinern wir diesen Sonderfall ($n = 2$) von (I.19) zur Produktregel (D2). Ausgehend von beliebigen Polynomen f, g über \mathbb{K} erhalten wir zunächst

$$2fg = (f + g)^2 - f^2 - g^2$$

und nach Anwendung von D auf beide Seiten:

$$\begin{aligned}
 2D(fg) &= D((f + g)^2) - D(f^2) - D(g^2) \\
 &= 2(f + g)D(f + g) - 2fD(f) - 2gD(g) \\
 &= 2(D(f)g + fD(g)).
 \end{aligned}$$

Die Kürzungsregel erlaubt Kürzung von $2 (\neq 0)$, und man hat (D2). \diamond

Bemerkung. Die in Satz I.10 gegebene Charakterisierung der formalen Ableitung von Polynomen durch die Kettenregel wurde angeregt durch einen Artikel von J. W. Burgmeier und R. E. Prather [Polynomial Calculus with D-like Operators. *Amer. Math.*

Monthly 82/7 (1975), 730–737]. Die Autoren betrachten lineare Operatoren auf dem Vektorraum $P(\mathbb{R})$, die jedem Polynom vom Grade n eines vom Grade $n - 1$ zuordnen («unit-degree-decreasing»). Ihr Theorem 7 besagt dann, dass die gewöhnliche Ableitung auf $P(\mathbb{R})$ der einzige dieser Operatoren ist, welcher die Kettenregel erfüllt. Burgmeier und Prather erblicken darin mit einer gewissen Berechtigung einen Beitrag zur Einsicht in die »essential uniqueness of the classical differential calculus«. Die Beobachtung, dass die Gradbedingung entscheidend abgeschwächt werden kann, hat mich wenig später auf eine andere, mehr algebraisch orientierte Beweisidee gebracht [Zur algebraischen Analyse der Kettenregel. *Math.-phys. Semesterber.* n. F. 25/1 (1978), 79–96. Für eine verbesserte Fassung vgl. meine *Didaktische Schriften zur Elementarmathematik*, Logos-Verlag: Berlin 2014, 38–46].

Polynome in mehreren Unbestimmten. — Zunächst soll hier daran erinnert werden¹⁹, dass man sich den Ring $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ der Polynome über \mathbb{K} in den Unbestimmten X_1, \dots, X_n rekursiv erzeugt denken kann als den Ring $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_{n-1}][X_n]$ der Polynome in X_n über $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_{n-1}]$. Schreiten wir nach diesem Muster weiter rückwärts, so erscheint $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ am Ende als das über \mathbb{K} n -stufig aufgeschichtete Gebilde $\mathbb{K}[X_1] \dots [X_n]$, wobei es keine Rolle spielt, in welcher Reihenfolge die Unbestimmten hinzugefügt werden. Da \mathbb{K} nullteilerfrei ist, entsteht zudem auf jeder dieser Stufen ein Integritätsring.

Jedes Polynom $P \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ lässt sich eindeutig darstellen in der folgenden *Normalform*

$$P = P(X_1, \dots, X_n) = \sum c_{j_1 \dots j_n} X_1^{j_1} \cdots X_n^{j_n}, \quad (\text{I.28})$$

worin die Koeffizienten $c_{j_1 \dots j_n}$ dem Ring \mathbb{K} angehören und die Summe über eine gewisse endliche Menge von n -Tupeln (j_1, \dots, j_n) nichtnegativer ganzer Zahlen läuft. Zu jedem Summanden (*Monom*) $c_{j_1 \dots j_n} X_1^{j_1} \cdots X_n^{j_n}$ definiert man die Summe $k = j_1 + \dots + j_n$ der Exponenten als seinen *Grad*. Ein Polynom P heißt dann *homogen vom Grad k* , wenn seine sämtlichen Monome denselben Grad k besitzen. Offensichtlich ist dies gleichbedeutend damit, dass P für alle $t \in \mathbb{K}$ die folgende Gleichung erfüllt:

$$P(tX_1, \dots, tX_n) = t^k P(X_1, \dots, X_n). \quad (\text{I.29})$$

¹⁹ Zu den wichtigsten Tatsachen über Polynome in mehreren Unbestimmten vgl. man etwa Kapitel II von Okunjew (zitiert in Fußnote 10).

Beispiel I.1. Der multinomiale Ausdruck $M_{n,k} := (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)^k$ ist ein homogenes Polynom vom Grad k . Es taucht in vielen Zusammenhängen auf und erweist sich als bedeutsam aufgrund seiner Normalform

$$M_{n,k} = \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n \geq 0 \\ j_1 + \dots + j_n = k}} \frac{k!}{j_1! \cdots j_n!} X_1^{j_1} \cdots X_n^{j_n}, \quad (\text{I.30})$$

die eine Verallgemeinerung der Binomialformel (für $M_{2,k}$) darstellt. Der hier auftretende Koeffizient erlaubt eine anschauliche kombinatorische Deutung als Anzahl der Möglichkeiten, k unterscheidbare Objekte in n nummerierte Schachteln zu legen, und zwar j_ν Objekte in Schachtel Nr. ν , $1 \leq \nu \leq n$ (siehe Aufgabe 28).

Wenden wir uns nun den Derivationen auf $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ zu.²⁰ Im Abschnitt über die Ableitung polynomialer Funktionen hatten wir gesehen, dass eine Derivation auf $\mathbb{K}[\iota]$ bis auf einen Faktor eindeutig als die formale Ableitung ∂ bestimmt ist. Auf $\mathbb{K}[X]$ entspricht dem die Derivation ∂_X . Da es für den Ring $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ im Endergebnis gleichgültig ist, in welcher Reihenfolge die Unbestimmten hinzugefügt werden, können wir ihn für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ auch in der Form

$$\mathbb{K}[X_1, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_n][X_j] \quad (*)$$

darstellen und erhalten auf diese Weise die zugehörigen sog. *partiellen Ableitungen* ∂_{X_j} auf $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$. Die Namenswahl gründet sich darauf, dass ausschließlich solche Polynome durch ∂_{X_j} nicht annulliert werden, welche die Unbestimmte X_j als echten Faktor enthalten. Man beachte: Ein Polynom in den Unbestimmten X_1, \dots, X_n über \mathbb{K} wird gemäß (*) als Polynom in der Unbestimmten X_j über dem Ring $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_n]$ aufgefasst. Als Koeffizienten spielen dessen Polynome P für die partielle Ableitung nach X_j die Rolle von ∂_{X_j} -Konstanten, d. h. es gilt $\partial_{X_j}(P) = 0$.

In der Funktionenalgebra \mathbb{F} haben die bisher für den Ring $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ geschilderten Verhältnisse keine unmittelbare Entsprechung. Während für $n = 1$ nach Satz I.7 in der Untereralgebra $\mathbb{K}[\iota]$ ein zu $\mathbb{K}[X_1]$ isomorphes Gegenstück vorliegt, lässt sich für $n > 1$ unter den allgemein gehaltenen Voraussetzungen kein zu $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ isomorpher Unterring von \mathbb{F} auszeichnen.

²⁰ Der interessierte Leser findet die diesbezügliche (weiterführende) algebraische Theorie in voller formaler Strenge entwickelt bei O. Zariski, P. Samuel: *Commutative Algebra*, Vol. I, Springer-Verlag: New York, Heidelberg, Berlin 1975; vgl. dort § 17 von Chapter II.

Für unsere Zwecke ist dies kein Verlust, denn unser Hauptaugenmerk liegt auf der *Ersetzung der Unbestimmten durch andere Polynome oder Funktionen*.

Die Ersetzung durch Polynome lässt sich in hinlänglicher Allgemeinheit wie folgt beschreiben: Sei P ein Polynom aus $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ und $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{F}$ ein Oberring von \mathbb{K} . Ersetzen wir nun jede Unbestimmte X_j in P durch ein Polynom $Q_j \in \mathbb{H}[X_1, \dots, X_m]$, so ist das Ergebnis ein Polynom aus $\mathbb{H}[X_1, \dots, X_m]$, das wir in herkömmlicher Weise mit $P(Q_1, \dots, Q_n)$ bezeichnen. Alternativ dazu notieren wir $P(Q_1, \dots, Q_n)$ auch in der kürzeren, aber nicht weniger sinnfälligen Form als Verkettungsprodukt²¹ $P \circ Q_{\#}$. Das hier verwendete Nummernzeichen ($\#$) markiert die bezifferte Stelle im einzusetzenden Ausdruck, deren Wert mit dem Index der in P durch diesen Ausdruck zu ersetzenden Unbestimmten zusammenfällt.

Beispiele I.2. Einige einfache Beispiele mögen das illustrieren.

- (i) Für $P = X_2^3 + 2X_5$ hat man $P \circ 2_{\#} = P(2^2, 2^5) = 4^3 + 2 \cdot 32$.
- (ii) Mit dem Polynom aus Beispiel I.1 ergibt sich $M_{n,1} \circ_{\#} = 1 + 2 + \dots + n$.
- (iii) Für alle Polynome $P \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ gilt $P \circ X_{\#} = P$.

Wir betrachten nun noch zwei Spielarten der Ersetzung, die für das Weitere von besonderem Interesse sind.

(1) Wenn sämtliche einzusetzenden Polynome übereinstimmen, d. h. wenn etwa $Q_1 = Q_2 = \dots = Q$ gilt, so notieren wir die Verkettung ohne das Nummernzeichen und sagen, dass $P(Q, \dots, Q)$ bzw. $P \circ Q$ aus P durch *Unifikation zum Wert Q* hervorgeht. Aus einem Polynom P in mehreren Unbestimmten entsteht durch Unifikation zum Wert X die zugehörige univariate Form $P \circ X = P(X, \dots, X)$. Der am häufigsten vorkommende Fall ist die Unifikation zur Konstanten $1 \in \mathbb{K}$, künftig schlicht *Unifikation* (ohne Zusatz) genannt. Ihr Ergebnis $P \circ 1$ ist wieder eine Konstante $\in \mathbb{K}$, nämlich die Summe der Koeffizienten von P in der Normalform (I.28).

(2) Zu gegebenen Funktionen $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{F}$ ist $P \circ f_{\#} = P(f_1, \dots, f_n)$ ebenfalls eine Funktion aus \mathbb{F} . Die dergestalt durch P vermittelte Zuordnung $\mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}$ ist offensichtlich nichts anderes als eine Verallgemeinerung von (I.15) auf Polynome in mehreren Unbestimmten. Man wird daher erwarten, dass sich auch die in Satz I.9 ausgesprochene Kettenregel für Polynome entsprechend verallgemeinern lässt. Der folgende Satz bestätigt dies und zeigt

²¹ Natürlich sollte, trotz Verwendung desselben Symbols, die Komposition von Polynomen in einer oder mehreren Unbestimmten nicht mit der entsprechenden abstrakten Operation innerhalb der Funktionenalgebra \mathbb{F} verwechselt werden.

zudem, dass die Derivierte von $P \circ f_{\sharp}$ die Gestalt eines vollständigen Differentials annimmt.

Satz I.11. Sei D eine Derivation²² auf \mathbb{F} und P ein beliebiges Polynom über \mathbb{K}_D in den Unbestimmten X_1, \dots, X_n . Dann gilt für alle $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{F}$

$$D(P(f_1, \dots, f_n)) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial P}{\partial X_k}(f_1, \dots, f_n) \cdot D(f_k).$$

Beweis. Wir denken uns P in der Normalform (I.28) dargestellt mit Koeffizienten $c_{j_1 \dots j_n} \in \mathbb{K}_D$ und bestimmen die Normalform der partiellen Ableitung von P nach X_k zu

$$\frac{\partial P}{\partial X_k} = \sum j_k c_{j_1 \dots j_n} X_1^{j_1} \dots X_k^{j_k-1} \dots X_n^{j_n}.$$

Hieraus erhalten wir mit (I.18) und (I.19) unter Beachtung der \mathbb{K}_D -Linearität von D :

$$\begin{aligned} D(P(f_1, \dots, f_n)) &= \sum c_{j_1 \dots j_n} D(f_1^{j_1} \dots f_n^{j_n}) \\ &= \sum c_{j_1 \dots j_n} \sum_{k=1}^n f_1^{j_1} \dots D(f_k^{j_k}) \dots f_n^{j_n} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum j_k c_{j_1 \dots j_n} f_1^{j_1} \dots f_k^{j_k-1} \dots f_n^{j_n} \cdot D(f_k) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial P}{\partial X_k}(f_1, \dots, f_n) \cdot D(f_k). \quad \diamond \end{aligned}$$

Bemerkung. Unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass D die Kettenregel (D3) erfüllt, erhält man aufgrund von $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}_D$ und (I.27) die Behauptung des Satzes auch für Polynome über \mathbb{K} .

Höhere Ableitungen. – Nicht anders als in der klassischen Analysis entstehen die Derivierten höherer Ordnung einer Funktion $f \in \mathbb{F}$ durch mehrmaliges Anwenden des Ableitungsoperators D : auf f , auf $D(f)$, auf $D(D(f))$, usw. Wir definieren für ganze $n \geq 0$ rekursiv

$$D^0(f) = f \quad \text{und} \quad D^{n+1}(f) = D(D^n(f)).$$

²² Es wird nur das Erfülltsein von (D1) und (D2) vorausgesetzt.

Obwohl (wie gleich zu sehen sein wird) D^n für $n > 1$ keine Derivation darstellt, spricht man herkömmlicherweise etwas lax von »höheren Ableitungen«, wo es genauer und passender wäre, $D^n(f)$ als *Derivierte von f der Ordnung n* (oder kurz: *k -te Derivierte von f*) zu bezeichnen. Wir machen, je nach Gelegenheit, von jeder dieser Sprechweisen Gebrauch.

Zunächst stellt sich die Frage, wie D^n auf Summen und Produkte von Funktionen wirkt. Die Antworten sind hier sehr einfach zu finden (anders als bei der Komposition, die weitere Vorbereitungen benötigt und daher erst später behandelt wird).

Man sieht ohne weiteres, dass die Bildung höherer Ableitungen der Summenregel (D1) genügt:

$$D^n(f + g) = D^n(f) + D^n(g). \quad (\text{I.31})$$

Bei (D2) liegt der Fall etwas anders; hier erfährt die Produktregel eine Verallgemeinerung zu einer als *Regel von Leibniz* geläufigen Form.

Satz I.12. Für alle $f, g \in \mathbb{F}$ und $n \geq 0$ gilt:

$$D^n(f \cdot g) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} D^j(f) D^{n-j}(g).$$

Beweis. Der einfache Beweis durch Induktion nach der Ordnung n kann dem Leser zur Übung überlassen bleiben (siehe Aufgabe 31). \diamond

Die rechte Seite der Gleichung von Satz I.12 steht offensichtlich in einer Analogie zur Binomialformel (wobei die j -fache Anwendung von D dem Erheben zur j -ten Potenz entspricht). Erweitert man das Funktionenprodukt auf mehrere Faktoren, so entsteht gemäß dieser Analogie ein Ausdruck nach dem Muster der Normalform (I.30):

$$D^n(f_1 \cdots f_s) = \sum_{\substack{j_1 + \cdots + j_s = n \\ j_1, \dots, j_s \geq 0}} \frac{n!}{j_1! \cdots j_s!} D^{j_1}(f_1) \cdots D^{j_s}(f_s). \quad (\text{I.32})$$

Auch diese Formel lässt sich unter Verwendung der Produktregel leicht durch Induktion verifizieren (hier: nach der Anzahl s der Faktoren).

Für den Rest dieses Kapitels setzen wir die Gültigkeit der Kettenregel (D3) voraus. Damit erhalten wir unter Beachtung von (I.26) und (I.23) einen häufig

genutzten Spezialfall von (I.32):

$$D^n(\iota^s) = \partial^n(\iota^s) = \begin{cases} n! \binom{s}{n} \iota^{s-n}, & \text{falls } n \leq s; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{I.33})$$

Beweis. Die für $f_1 = \dots = f_s = \iota$ in (I.32) auftretenden Derivierten $D^{j_k}(\iota)$ sind wegen $D(\iota) = 1$ genau dann von Null verschieden, wenn $j_k \in \{0, 1\}$, $1 \leq k \leq s$. Unter dieser Bedingung wird $j_1! \cdots j_s! = 1$. Ferner ist die Gleichung $j_1 + \dots + j_s = n$ genau dann erfüllt, wenn n der s Summanden gleich 1 (und die übrigen $s - n$ Summanden gleich 0) sind. Dafür gibt es $\binom{s}{n}$ Möglichkeiten, deren jede zu einem Summanden in (I.32) gehört. \diamond

Natürlich erhält man (I.33) unabhängig von (I.32) auch direkt durch wiederholtes Anwenden von $D (= \partial)$ auf ι^s nach der Potenzregel (I.19). Der im Fall $n \leq s$ auftretende Koeffizient von ι^{s-n} nimmt dabei die Form eines Produkts aus n fallenden Faktoren an:

$$s(s-1) \cdots (s-n+1).$$

Wir nennen diesen Ausdruck *fallende Faktorielle von s der Länge n* und kürzen ihn im Folgenden durch das Symbol $(s)_n$ ab. Ergänzend vereinbaren wir $(s)_0 = 1$ sowie $(s)_n = 0$ für $n > s$. Damit schreibt sich (I.33) nun einfacher:

$$\partial^n(\iota^s) = (s)_n \iota^{s-n}. \quad (\text{I.33}')$$

Bemerkung. Es sei hier an die kombinatorische Bedeutung der fallenden Faktoriellen erinnert. Danach ist $(s)_n$ die Anzahl der geordneten Folgen der Länge n , die sich aus s unterscheidbaren Objekten (Elementen einer Menge) bilden lassen, von denen jedes höchstens einmal in der Folge vorkommt. Folgen dieser Art heißen *n -Permutationen von s Objekten ohne Wiederholung*. Dürfen sich die Objekte in der Folge wiederholen, so lautet die Anzahl solcher n -Permutationen s^n (wobei die Bedingung $n \leq s$ natürlich entfallen kann).

Wir kommen nun zu der einfachen, aber bedeutsamen Tatsache, dass zwischen den Koeffizienten eines Polynoms und seinen höheren Ableitungen ein direkter Zusammenhang besteht. Dieser ergibt sich unmittelbar aus der obigen Gleichung (I.33'). Ist nämlich $f = a_0 + a_1 \iota + \dots + a_n \iota^n \in \mathbb{K}[\iota]$, so erhalten wir für die Derivierte k -ter Ordnung

$$\partial^k(f) = (k)_k a_k + (k+1)_k a_{k+1} \iota + \dots + (n)_k a_n \iota^{n-k}$$

und daraus $\partial^k(f)(0) = \partial^k(f) \circ 0 = k!a_k$. (I.34)

Die in (I.34) ermittelten Konstanten bezeichnen wir als *Taylor-Koeffizienten von f* . Sie entsprechen den Koeffizienten von $x^k/k!$, denen man in den nach Brook Taylor (1685–1731) benannten Potenzreihenentwicklungen der klassischen Differentialrechnung begegnet.

Beispiel I.3. Am simplen Beispiel der binomialen Funktion

$$b_n := (1 + \iota)^n = \sum_{k=0}^n c_n(k) \iota^k \in \mathbb{Z}[\iota]$$

soll illustriert werden, auf welche Weise durch höhere Ableitungen kalkulatorische und kombinatorische Aspekte der in der Normalform auftretenden Koeffizienten $c_n(k) = \binom{n}{k}$ zum Vorschein kommen.

Einerseits haben wir nach (I.19) (oder auch direkt mittels der Kettenregel)

$$\partial(b_n) = n(1 + \iota)^{n-1} \partial(1 + \iota) = n(1 + \iota)^{n-1},$$

folglich $\partial^k(b_n) = (n)_k(1 + \iota)^{n-k}$ für $0 \leq k \leq n$, und somit schließlich $\partial^k(b_n)(0) = (n)_k$. Andererseits ergibt sich aus (I.34), angewandt auf die obige Normalform, der Taylor-Koeffizient $\partial^k(b_n)(0) = k!c_n(k)$. Wir erhalten also $k!c_n(k) = (n)_k$ und damit die bekannte Darstellung der Binomialkoeffizienten als Quotient zweier Produkte:

$$c_n(k) = \binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k}.$$

Ähnlich wie im Beweis zu (I.33) können wir die k -te Derivierte von b_n alternativ aber auch mittels der verallgemeinerten Regel von Leibniz (I.32) wie folgt auswerten:

$$\begin{aligned} \partial^k(b_n) &= \partial^k \left(\underbrace{(1 + \iota) \cdots (1 + \iota)}_{n\text{-mal}} \right) \\ &= k! \cdot \sum_{\substack{j_1 + \cdots + j_n = k \\ 0 \leq j_1, \dots, j_n \leq 1}} \partial^{j_1}(1 + \iota) \cdots \partial^{j_n}(1 + \iota). \end{aligned}$$

Natürlich ist hier $\partial^{j_\nu}(1 + \iota)(0) = 1$ für alle $\nu \in \{1, \dots, n\}$ und daher

$$\partial^k(b_n)(0) = k! \cdot \sum_{1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_k \leq n} 1.$$

Hierbei sind die ν_s gerade die Indizes der $1, 2, \dots, n$, für welche $j_{\nu_s} = 1$ gilt, $1 \leq s \leq k$. – Die Summationsbedingung liefert uns nun auch eine kombinatorische Interpretation der Binomialzahlen $\binom{n}{k}$: nämlich als Anzahl der k -Kombinationen von $\{1, 2, \dots, n\}$ ohne Wiederholung; das ist die Anzahl der Möglichkeiten, aus einer n -elementigen Menge eine (ungeordnete) Teilmenge von k Elementen auszuwählen.

Aufgaben

21. Sei D eine Derivation mit Kettenregel auf \mathbb{F} und $\theta \in \mathbb{F}$ eine fest vorgegebene Funktion mit $\theta \neq 0$. Es werde $\tilde{D} := \theta D$ definiert durch $\tilde{D}(f) = \theta \cdot D(f)$ für $f \in \mathbb{F}$. Beweise: (a) \tilde{D} ist eine Derivation auf dem Ring \mathbb{F} ; (b) \tilde{D} erfüllt die Kettenregel genau dann, wenn $\theta = 1$.

22. Gib einen Beweis für die verallgemeinerte Produktregel (I.18).

23. Seien $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{F}^\times$ Einheiten von \mathbb{F} und $j_1, \dots, j_n \in \mathbb{Z}$. Beweise die folgende Identität (der sog. *logarithmischen Derivierten*):

$$\frac{D(f_1^{j_1} \cdots f_n^{j_n})}{f_1^{j_1} \cdots f_n^{j_n}} = \sum_{k=1}^n j_k \frac{D(f_k)}{f_k}.$$

24. Zeige, dass ∂ eine Derivation auf $\mathbb{K}[t]$ ist, d. h. ∂ erfüllt (D1) und (D2).

25. Zeige: (a) Ist D eine Derivation auf \mathbb{F} , so ist \mathbb{K}_D ein Unterring von \mathbb{F} ; (b) $\mathbb{K}_\partial = \mathbb{K}$.

26. Beweise Satz I.9.

27. Sei $f \in \mathbb{F}$ invertierbar und $D(f)$ eine Einheit in \mathbb{F} . Zeige: Für alle $m \in \mathbb{Z}$ gilt: $D(\bar{f})^m \circ f = D(f)^{-m}$.

28. Sei $P \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ ein zum Grad k homogenes Polynom. Beweise:

$$\sum_{j=1}^n X_j \frac{\partial P}{\partial X_j} = k \cdot P.$$

Diese Formel ist Eulers bekannte Identität für homogene Funktionen, hier in einer Fassung für Polynome.

29. Unifikation des Polynoms $M_{n,k}$ und seiner Normalform (I.30) in Beispiel I.1 führt auf die Identität

$$M_{n,k} \circ 1 = n^k = \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n \geq 0 \\ j_1 + \dots + j_n = k}} \frac{k!}{j_1! \cdots j_n!}.$$

Gib eine kombinatorische Interpretation.

30. Gegeben seien die Polynome $Q_j \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_{q(j)}]$, $1 \leq j \leq m$, sowie weitere Polynome R_1, R_2, R_3, \dots über einem Oberring von \mathbb{K} . Der Ausdruck $Q_{\#} \circ R_{\#}$ vertrete dann irgendein Glied der Polynomfolge $Q_j(R_1, \dots, R_{q(j)})$, $1 \leq j \leq m$.

Beweise: Es gilt das *Assoziativgesetz*

$$(P \circ Q_{\#}) \circ R_{\#} = P \circ (Q_{\#} \circ R_{\#}),$$

wo P irgendein Polynom über \mathbb{K} ist.

31. Beweise (a) Satz I.12 und (b) die erweiterte Produktformel (I.32).

Lösungen der Aufgaben

1–§ 1. Wir verifizieren die erste der beiden Identitäten:

$$\begin{aligned}
 ((a \cdot f + b \cdot g) \cdot h)(x) &= (a \cdot f + b \cdot g)(x) \cdot h(x) \\
 &= (a \cdot f(x) + b \cdot g(x)) \cdot h(x) \\
 &= a \cdot f(x) \cdot h(x) + b \cdot g(x) \cdot h(x) \\
 &= a \cdot (f \cdot h)(x) + b \cdot (g \cdot h)(x) \\
 &= (a \cdot (f \cdot h) + b \cdot (g \cdot h))(x).
 \end{aligned}$$

Bei der zweiten Gleichung verfährt man in derselben Weise.

2–§ 1. Aufgrund der Form der Polynome ist klar, dass die x^0, x^1, x^2, \dots ein Erzeugendensystem von $P(\mathbb{R})$ bilden. Es bleibt somit noch der Nachweis der linearen Unabhängigkeit. Dazu werde

$$f(x) := a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ angenommen. Dies impliziert, dass f das Nullpolynom ist. Denn andernfalls hätte f nach einem Satz der elementaren Algebra höchstens m Nullstellen [vgl. etwa Mangoldt/Knopp: *Einführung in die höhere Mathematik*, Stuttgart 1964, 12. Aufl., Bd. 1, 349-351], was einen Widerspruch darstellt. Infolgedessen ist $f = 0$ und müssen alle Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ verschwinden.

3–§ 1. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit werde $m \leq n$ angenommen; wir setzen dann $a_k = 0$ für $k = m+1, \dots, n$. Gliedweise Addition liefert sofort $a_k + b_k$ als Koeffizienten von x^k in $f(x) + g(x)$. Im Falle des Produkts $f(x)g(x)$ erhält man durch Ausmultiplizieren der Normalformen und Umordnen der Summe nach Potenzen von x als Koeffizienten von x^k den Ausdruck $a_0b_k + a_1b_{k-1} + \dots + a_kb_0$.

4–§ 1. Um zu zeigen, dass die Polynome p_0, p_1, p_2, \dots ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von $P(\mathbb{R})$ bilden, ist die folgende Überlegung hinreichend: Zu beliebigem $m \geq 0$ sei $f(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m$ irgendein Polynom (das auch das Nullpolynom sein kann) und seien $p_j(x) = c_{j,0} + c_{j,1}x + c_{j,2}x^2 + \dots + c_{j,j}x^j$ irgendwelche Polynome vom Grad j ($j = 0, 1, 2, \dots$). Dann zeigen wir:

- (a) Es existieren eindeutig bestimmte $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ derart, dass $f(x) = a_0p_0(x) + a_1p_1(x) + a_2p_2(x) + \dots + a_mp_m(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$;
- (b) im Falle $f(x) = 0$ (Nullpolynom) gilt $a_j = 0$ für $j = 0, 1, 2, \dots, m$.

Vorab notieren wir eine nützliche Formel über die Umordnung der Summanden in einer Doppelsumme (deren einfacher Beweis dem Leser überlassen bleiben kann):

$$\sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^j z_{k,j} = \sum_{k=0}^m \sum_{j=k}^m z_{k,j} \quad (*)$$

Schreiben wir nun den Ansatz in (a) aus, so erhalten wir

$$f(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k = \sum_{j=0}^m a_j \sum_{k=0}^j c_{j,k} x^k$$

und mittels Umordnung gemäß (*)

$$\sum_{k=0}^m b_k x^k = \sum_{k=0}^m \left(\sum_{j=k}^m a_j c_{j,k} \right) x^k.$$

Die in Aufgabe 2 bewiesene lineare Unabhängigkeit der x^0, x^1, x^2, \dots impliziert die Übereinstimmung der Koeffizienten von x^k auf beiden Seiten der letzten Gleichung (sog. *Koeffizientenvergleich*):

$$\sum_{j=k}^m c_{j,k} a_j = b_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m). \quad (**)$$

(**) ist ein lineares Gleichungssystem in den Unbekannten a_0, a_1, \dots, a_m . Die zugehörige Matrix hat obere Dreiecksform mit den Diagonalelementen $c_{j,j}$, die wegen $\text{grad } p_j = j$ sämtlich ungleich Null sind. Daher ist die Matrix regulär ($\text{Rang} = m+1$), und es gibt eine eindeutige Lösung von (**). Das beweist (a).

Im Fall, dass f das Nullpolynom ist, haben wir $b_0 = \dots = b_m = 0$ und damit $c_{m,m} a_m = 0$, d. h. $a_m = 0$; sodann $c_{m-1,m-1} a_{m-1} + c_{m,m-1} a_m = 0$, d. h. $a_{m-1} = 0$, usw. bis $a_0 = 0$, womit auch (b) gezeigt ist.

5 – § 1. Nach Aufgabe 4 gibt es eindeutig bestimmte $a_{n,k}$ derart, dass

$$x^n = \sum_{k=0}^n a_{n,k} (x-c)^k.$$

Im Prinzip lassen sich die Koeffizienten $a_{n,k}$ aus dem Gleichungssystem (**) (Aufgabe 4) ermitteln, wobei $b_0 = \dots = b_{n-1} = 0$ und $b_n = 1$. Es geht aber bedeutend einfacher mit folgender Umformung unter Zuhilfenahme der binomischen Formel:

$$x^n = (c + (x-c))^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} c^{n-k} (x-c)^k.$$

Mithin gilt $a_{n,k} = \binom{n}{k} c^{n-k}$.

6-§1. Mit denselben Überlegungen wie in §1 bezüglich $F(I, \mathbb{R})$ überzeugt man sich davon, dass auch $\hat{F}(I, \mathbb{R})$ ein kommutativer Ring mit Einselement ist. Dabei ist lediglich zu berücksichtigen, dass die $\hat{F}(I, \mathbb{R})$ definierende Eigenschaft sich von f, g auf $f + g$ und $f \cdot g$ vererbt.

Ist nun $f \in \hat{F}(I, \mathbb{R})$, so ist die reziproke Funktion f^{-1} an genau den Stellen nicht definiert, an denen f verschwindet oder selbst nicht definiert ist. Insgesamt sind dies höchstens endlich viele Ausnahmen, so dass $f^{-1} \in \hat{F}(I, \mathbb{R})$. Somit ist $\hat{F}(I, \mathbb{R})$ ein Körper.

7-§2. Wir begnügen uns hier mit der Verifikation von (I.5):

$$\begin{aligned} ((f \cdot g) \circ h)(x) &= (f \cdot g)(h(x)) \\ &= f(h(x)) \cdot g(h(x)) \\ &= (f \circ h)(x) \cdot (g \circ h)(x) \\ &= ((f \circ h) \cdot (g \circ h))(x). \end{aligned}$$

8-§2. Die Argumente des Tangens dürfen offensichtlich nicht außerhalb eines Intervalls zwischen zwei benachbarten Polstellen liegen. Wir betrachten zu beliebigem $k \in \mathbb{Z}$ die Polstelle $(2k + 1)\pi/2$ und ihren linken Nachbarn. Für alle $x \in \mathbb{R}$ muss dann

$$(2k - 1)\frac{\pi}{2} < a \cdot \cos x < (2k + 1)\frac{\pi}{2}$$

gelten. Hieraus erhalten wir speziell für $x = \pi/2$ einerseits die Ungleichung $k\pi - \pi/2 < 0$ und damit $k < 1/2$ sowie andererseits $0 < k\pi + \pi/2$ und damit $k > -1/2$. Es muss also $k = 0$ sein. Wählen wir dann noch $x = 0$, so ergibt sich sofort $|a| < \pi/2$.

9-§2. Die Funktion $h \circ \sin \circ h$ ist für genau diejenigen $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert, für die $\sin 1/x \neq 0$ ist, d. h. es muss $x \neq 1/k\pi$ sein für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Infolgedessen lautet der gesuchte Definitionsbereich

$$D_{h \circ \sin \circ h} = \mathbb{R} \setminus \left\{ 0, -\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}, -\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}, -\frac{1}{3\pi}, \frac{1}{3\pi}, \dots \right\}.$$

Die Ausnahmestellen (Pole) häufen sich bei Null. Offensichtlich enthalten die beiden Intervalle $(-\infty, -1/\pi)$ und $(1/\pi, \infty)$ keine Ausnahmestellen.

10-§2. (a): Die gebrochene lineare Funktion lässt sich umformen zu

$$f(x) = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma x + \delta} \cdot \frac{1}{\gamma}.$$

Eine invertierbare Funktion kann nicht konstant sein; wir erkennen somit anhand der Umformung, dass

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

gelten muss, wenn f invertierbar sein soll. Wir werden sehen, dass das Kriterium auch hinreichend ist. In üblicher Weise wird der Kandidat g für die Umkehrfunktion ermittelt:

$$g(x) = \frac{\delta x - \beta}{-\gamma x + \alpha}.$$

Damit bilden wir

$$(f \circ g)(x) = \frac{\beta(-\gamma x + \alpha) + \alpha(\delta x - \beta)}{\delta(-\gamma x + \alpha) + \gamma(\delta x - \beta)} = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)x}{\alpha\delta - \beta\gamma},$$

woraus sich $f \circ g = \text{id}$ nach Kürzung von $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ ergibt. Auf die gleiche Weise erhält man $g \circ f = \text{id}$, mithin $g = \bar{f}$.

(b): f ist involutorisch genau dann, wenn gilt:

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} = \frac{\delta x - \beta}{-\gamma x + \alpha} = \bar{f}(x).$$

Wir erhalten hieraus nach kurzer Umformung und Vergleich der Koeffizienten von x^k ($k = 0, 1, 2$) die Bedingungen

$$\alpha\beta = -\beta\delta, \quad \alpha^2 = \delta^2, \quad -\alpha\gamma = \gamma\delta.$$

Fall (i): $\alpha = \delta$. Ist $\alpha = 0$, müssen β und γ beide $\neq 0$ sein (um $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ zu genügen), und die resultierende Involution lautet

$$f(x) = \bar{f}(x) = \frac{\beta}{\gamma x}. \quad (*)$$

Für $\alpha \neq 0$ wird hingegen $\beta = \gamma = 0$, und wir erhalten $f(x) = \bar{f}(x) = x$.

Fall (ii): $\alpha = -\delta$. Es ergibt sich sofort

$$f(x) = \bar{f}(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x - \alpha}. \quad (**)$$

In dieser Darstellung ist der Sonderfall (*) enthalten ($\alpha = 0$).

(c): Die triviale Involution $f = \text{id}$ hat jeden Punkt $\in \mathbb{R}$ zum Fixpunkt. Wir betrachten nun die nichttriviale Form (**).

Fall (i): $\gamma = 0$. Aus (**) ergibt sich die lineare Fixpunktgleichung

$$-x - \frac{\beta}{\alpha} = x$$

und damit der eindeutig bestimmte Fixpunkt $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$. (Beachte: Die Voraussetzung $-\alpha^2 - \beta\gamma \neq 0, \gamma = 0$ impliziert $\alpha \neq 0$.)

Fall (ii): $\gamma \neq 0$. Wir erhalten die quadratische Fixpunktgleichung

$$x^2 - \frac{2\alpha}{\gamma}x - \frac{\beta}{\gamma} = 0,$$

die zwei reelle Lösungen (Fixpunkte)

$$x_{1,2} = \frac{1}{\gamma}(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma})$$

besitzt, sofern $\alpha^2 + \beta\gamma > 0$ gilt. N.B.: Nach Voraussetzung ist $\alpha^2 + \beta\gamma \neq 0$.

11-§2. Nach Satz I.2 ist $h := g \circ f \circ \bar{g}$ invertierbar, und es gilt gemäß der Umkehrregel: $\bar{h} = g \circ \bar{f} \circ \bar{g}$. Ist f involutorisch, wird daraus $\bar{h} = g \circ f \circ \bar{g} = h$, d. h. : h ist eine Involution. Sei nun umgekehrt h involutorisch. Es ist dann $\bar{h} = h$, also $g \circ \bar{f} \circ \bar{g} = g \circ f \circ \bar{g}$. Komposition mit \bar{g} und g jeweils von links und von rechts auf beiden Seiten der Gleichung liefert $\bar{f} = f$.

12-§2. Setze $g(x) := x - a + b$. Mit der Aussage in Aufgabe 11 ergibt sich, dass $f^* = g \circ f \circ \bar{g}$ involutorisch ist. Es gilt $f^*(b) = f(a) - a + b$. Hieran ist die Behauptung unmittelbar abzulesen.

13-§2. (a) Die Umkehrfunktion von g^* lautet

$$\bar{g}^*(x) = \begin{cases} -\bar{h}(\varphi(x)) & \text{falls } x \leq 0; \\ \bar{h}(x) & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

Damit ergibt sich für $x \leq 0$:

$$g^*(-\bar{g}^*(x)) = g^*(\bar{h}(\varphi(x))) = h(\bar{h}(\varphi(x))) = \varphi(x),$$

sowie für $x \geq 0$:

$$g^*(-\bar{g}^*(x)) = g^*(-\bar{h}(x)) = \bar{\varphi}(h(\bar{h}(x))) = \bar{\varphi}(x).$$

(b) (i). Wir setzen zunächst g_1, g_2 als stetige Bijektionen voraus, für die gilt:

$$g_1 \circ (-\text{id}) \circ \bar{g}_1 = g_2 \circ (-\text{id}) \circ \bar{g}_2. \quad (*)$$

Es ergibt sich unmittelbar $g_2 = g_1 \circ (-\text{id}) \circ \bar{g}_1 \circ g_2 \circ (-\text{id})$. Wir definieren daher $\psi := (-\text{id}) \circ \bar{g}_1 \circ g_2 \circ (-\text{id})$ und erhalten $g_2 = g_1 \circ \psi$. Aus (*) ergibt sich ferner

$$\psi \circ (-\text{id}) = (-\text{id}) \circ \bar{g}_1 \circ g_2 = \bar{g}_1 \circ g_2 \circ (-\text{id}) = (-\text{id}) \circ \psi,$$

was ausdrückt, dass ψ eine ungerade Funktion ist: $\psi(-x) = -\psi(x)$.

(ii). Sei nun g_1 eine Funktion, welche die Eigenschaften von g in der Aussage von Satz I.4 besitzt, ferner ψ eine stetige, bijektive und ungerade Funktion. Offensichtlich ist dann $g_2 := g_1 \circ \psi$ ebenfalls stetig und bijektiv. Es bleibt somit noch zu zeigen, dass sich die Involution f auch mittels g_2 auf die behauptete Weise zerlegen lässt: $f = g_2 \circ (-\text{id}) \circ \overline{g_2}$. In der Tat erhalten wir aufgrund der Umkehrregel (Satz I.2) und der Ungeradheit von ψ sofort

$$\begin{aligned} g_2 \circ (-\text{id}) \circ \overline{g_2} &= g_1 \circ \psi \circ (-\text{id}) \circ \overline{\psi} \circ \overline{g_1} \\ &= g_1 \circ (-\text{id}) \circ \psi \circ \overline{\psi} \circ \overline{g_1} \\ &= g_1 \circ (-\text{id}) \circ \overline{g_1} = f. \end{aligned}$$

14-§ 3. (a) Für die Homomorphie zeigt man zunächst durch Induktion nach n , dass für alle $m, n \geq 0$ gilt: $s(m+n) = s(m) + s(n)$. – Der Induktionsanfang $n = 0$ ist klar. Induktionsschritt $n \rightarrow n+1$:

$$\begin{aligned} s(m+n+1) &= s(m+n) + 1 && \text{(nach Definition)} \\ &= s(m) + s(n) + 1 && \text{(Induktionsannahme)} \\ &= s(m) + s(n+1) && \text{(nach Definition)}. \end{aligned}$$

Der Fall $m, n < 0$ lässt sich hierauf wie folgt zurückführen:

$$\begin{aligned} s(m+n) &= -s(-m-n) && \text{(nach Definition)} \\ &= -(s(-m) + s(-n)) && \text{(wegen } -m, -n > 0) \\ &= -s(-m) - s(-n) \\ &= s(m) + s(n) && \text{(nach Definition)}. \end{aligned}$$

Die beiden übrigen Fälle, in denen m, n verschiedene Vorzeichen haben, erledigen sich durch die für alle $m, n \geq 0$ gültige Gleichung $s(m-n) = s(m) - s(n)$, die sich wie folgt beweisen lässt: Ist $m \geq n$, so ergibt sich $s(m-n) + s(n) = s(m-n+n) = s(m)$, und wir sind fertig. Im Fall $m < n$ erhalten wir nach Definition $s(m-n) = -s(-(m-n)) = -s(n-m) = -(s(n) - s(m)) = s(m) - s(n)$.

(b) Injektivität von s : Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $n \neq m$, etwa $n > m$. Dann gilt auch $s(n) \neq s(m)$. Denn anderenfalls hätten wir $s(n) = s(m)$ und damit $s(n-m) = s(n) - s(m) = 0$, d. h. \mathbb{F} hätte eine positive Charakteristik (Widerspruch).

15-§ 3. (a) Beweis zu (I.9): Mit Axiom (F2) ergibt sich $0 \circ f = (0 + 0) \circ f = (0 \circ f) + (0 \circ f)$ und daraus $0 \circ f = 0$.

(b) Beweis zu (I.10): Mit (F2) und unter Verwendung von Teil (a) hat man $((-f) \circ g) + (f \circ g) = (-f + f) \circ g = 0 \circ g = 0$. Somit gilt $(-f) \circ g = -(f \circ g)$.

16-§3. Wir zeigen die Behauptung durch Induktion: 0 ist eine Konstante ($0 \circ 0 = 0$) und daher $s(0) = 0 \in \mathbb{K}$. Sei nun $n \geq 0$ und $s(n) \in \mathbb{K}$ vorausgesetzt. Es folgt unmittelbar $s(n+1) = s(n) + 1 \in \mathbb{K}$. – Für $n < 0$ hat man nach Definition $s(n) = -s(-n)$ und daraus wegen $s(-n) \in \mathbb{K}$ auch $s(n) \in \mathbb{K}$.

17-§3. Seien $p = a_0 + a_1X + \cdots + a_mX^m$ und $q = b_0 + b_1X + \cdots + b_nX^n$ Polynome $\in \mathbb{K}[X]$. Es ist dann $p \circ q = a_0 + a_1q + \cdots + a_mq^m$. Die Potenzen q^j ($0 \leq j \leq m$) sind Polynome über \mathbb{K} (die sich mit Hilfe der Polynomialformel auf Normalform bringen lassen), daher auch $p \circ q \in \mathbb{K}[X]$. Die Anwendung von (F2), (F3) und (I.12) liefert hieraus

$$\begin{aligned} E_{p \circ q}(t) &= a_0 + a_1E_q(t) + \cdots + a_mE_q(t)^m \\ &= (a_0 + a_1t + \cdots + a_mt^m) \circ E_q(t) \\ &= E_p(t) \circ E_q(t). \end{aligned}$$

18-§3. Mit den Axiomen (F2), (F5) und (I.12) erhält man $(g^{-1} \circ h) \cdot (g \circ h) = (g^{-1} \cdot g) \circ h = 1 \circ h = 1$.

19-§3. Wir stellen f und g als Quotienten ganz-rationaler Funktionen $\in P(\mathbb{R})$ dar:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad g(x) = \frac{r(x)}{s(x)}, \quad (*)$$

wo $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$ und $q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n \neq 0$ und $s(x) \neq 0$. Alle hebbaren Unstetigkeiten seien in (*) bereits gehoben.

Ist f eine Konstante, so gilt $f \circ g = f$, und wir sind fertig. Andernfalls ist $m \geq 1$ oder $n \geq 1$. Unter der Annahme $m \geq n$ erhalten wir den folgenden Bruch mit ganz-rationalen Funktionen im Zähler und im Nenner:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= \frac{a_0 + a_1 \frac{r(x)}{s(x)} + \cdots + a_m \frac{r(x)^m}{s(x)^m}}{b_0 + b_1 \frac{r(x)}{s(x)} + \cdots + b_n \frac{r(x)^n}{s(x)^n}} \\ &= \frac{a_0s(x)^m + a_1r(x)s(x)^{m-1} + \cdots + a_mr(x)^m}{b_0s(x)^m + b_1r(x)s(x)^{m-1} + \cdots + b_nr(x)^ns(x)^{m-n}}. \end{aligned}$$

Für den Fall $n \geq m$ ergibt sich ein ähnlicher Ausdruck.

Zu den Polstellen von $f \circ g$ gehören sicher die Polstellen von f der Form $g(a)$ mit $a \in D_g$. Alle übrigen Polstellen von $f \circ g$ sind solche von g , jedoch im Allgemeinen nicht umgekehrt.

20 – § 3. Es ist $(g \circ f \circ h)(z) = (\exp(\frac{1}{z}) - 1)^{-1}$. Die Funktion hat Pole bei $z = 0$ sowie bei $z = 1/2\pi ik$ für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Diese Polstellen haben 0 als Häufungspunkt und bilden somit *keine diskrete Menge*. Folglich ist $g \circ f \circ h$ nicht meromorph.

21 – § 4. (a): Zu (D1): $\tilde{D}(f+g) = \theta \cdot D(f+g) = \theta D(f) + \theta D(g) = \tilde{D}(f) + \tilde{D}(g)$.
Zu (D2): $\tilde{D}(f \cdot g) = \theta(D(f)g + fD(g)) = (\theta D(f)) \cdot g + f \cdot \theta D(g) = \tilde{D}(f)g + f\tilde{D}(g)$.
Somit ist \tilde{D} eine Derivation auf \mathbb{F} .

(b): Natürlich erfüllt θD für $\theta = 1$ die Kettenregel. Es gelte nun umgekehrt $\tilde{D}(f \circ g) = (\tilde{D}(f) \circ g) \cdot \tilde{D}(g)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \theta \cdot D(f \circ g) &= ((\theta \cdot D(f)) \circ g) \cdot \theta \cdot D(g) \\ &= (\theta \circ g) \cdot (D(f) \circ g) \cdot \theta \cdot D(g). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung hat man $D(f \circ g) = (D(f) \circ g) \cdot D(g)$. Mit der Kürzungsregel erhält man also aus dem Vorangehenden $\theta = (\theta \circ g) \cdot \theta$ und wegen $\theta \neq 0$ auch $\theta \circ g = 1$ für alle $g \in \mathbb{F}$. Speziell für $g = \iota$ ergibt sich $\theta = 1$.

22 – § 4. Beweis durch Induktion. $n = 1$: klar. $-n \rightarrow n+1$: Unter Anwendung der Produktregel (D2) und der Induktionsannahme ergibt sich

$$\begin{aligned} D(f_1 \cdots f_n f_{n+1}) &= D(f_1 \cdots f_n) f_{n+1} + f_1 \cdots f_n D(f_{n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^n (f_1 \cdots D(f_k) \cdots f_n f_{n+1}) + f_1 \cdots f_n D(f_{n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} f_1 \cdots D(f_k) \cdots f_{n+1}. \end{aligned}$$

23 – § 4. Nach der verallgemeinerten Produktregel und der Potenzregel hat man

$$D(f_1^{j_1} \cdots f_n^{j_n}) = \sum_{k=1}^n j_k f_1^{j_1} \cdots f_{k-1}^{j_{k-1}} f_k^{j_k-1} D(f_k) f_{k+1}^{j_{k+1}} \cdots f_n^{j_n}.$$

Da \mathbb{F}^\times eine Gruppe ist, gilt nach Voraussetzung $g := f_1^{j_1} \cdots f_n^{j_n} \in \mathbb{F}^\times$. Multiplikation der Gleichung mit $1/g$ liefert dann die Behauptung.

24 – § 4. Seien $f = a_0 + a_1 \iota + a_2 \iota^2 + \cdots$ und $g = b_0 + b_1 \iota + b_2 \iota^2 + \cdots$ beliebige Polynome aus $\mathbb{K}[\iota]$. Um der Übersicht willen betrachten wir die jeweiligen Koeffizienten von ι^k (vgl. dazu Aufgabe 3-§1), die wir hier »allgemeine Koeffizienten« (a. K.) nennen wollen. Für die Derivierten gilt: $\partial(f) = a_1 + 2a_2 \iota + \cdots$ und $\partial(g) = b_1 + 2b_2 \iota + \cdots$. Der a. K. von $\partial(f) + \partial(g)$ lautet daher $(k+1)a_{k+1} + (k+1)b_{k+1}$, was offensichtlich mit $(k+1)(a_{k+1} + b_{k+1})$ (= a. K. von $\partial(f+g)$) übereinstimmt. Somit ist (D1) erfüllt.

Zu (D2): Der a. K. von fg ist $a_0b_k + a_1b_{k-1} + \cdots + a_kb_0$; wir haben dann

$$\text{a. K. von } \partial(fg) : (k+1)(a_0b_{k+1} + a_1b_k + \cdots + a_{k+1}b_0), \quad (1)$$

$$\text{a. K. von } \partial(f)g : a_1b_k + 2a_2b_{k-1} + \cdots + (k+1)a_{k+1}b_0, \quad (2)$$

$$\text{a. K. von } f\partial(g) : (k+1)a_0b_{k+1} + ka_1b_k + \cdots + a_kb_1. \quad (3)$$

Man bestätigt sofort, dass (1) die Summe von (2) und (3) ist. Somit gilt auch (D2).

25-§4. (a): Für $c, d \in \mathbb{K}_D$ hat man $D(c) = D(d) = 0$ und damit sowohl $D(c-d) = D(c) - D(d) = 0$, das heißt $c-d \in \mathbb{K}_D$, als auch $D(cd) = D(c)d + cD(d) = 0$, mithin $cd \in \mathbb{K}_D$. Somit ist \mathbb{K}_D ein Unterring von \mathbb{F} ; natürlich ist er kommutativ und wegen $1 \in \mathbb{K}_D$ auch unitär.

(b): ∂ ist auf $\mathbb{K}[\iota]$ so definiert, dass für $f = a_0 + a_1\iota + \cdots + a_n\iota^n \in \mathbb{K}[\iota]$ gilt: $\partial(f) = a_1 + 2a_2\iota + \cdots + na_n\iota^{n-1}$. Ist $a_j = 0$ für $j \geq 1$, d. h. $f = a_0$, so wird $\partial(f) = 0$ und man hat $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}_{\partial}$. Gilt umgekehrt $\partial(f) = 0$, so resultiert $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ (vgl. Aufgabe 2-§1) und somit $f = a_0 \in \mathbb{K}$, was $\mathbb{K}_{\partial} \subseteq \mathbb{K}$ beweist.

26-§4. Sei $f = a_0 + a_1\iota + \cdots + a_n\iota^n \in \mathbb{K}_D[\iota]$ und $g \in \mathbb{F}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} D(f \circ g) &= D(a_0 + a_1g + \cdots + a_ng^n) \\ &= D(a_0) + D(a_1g) + \cdots + D(a_ng^n) \\ &= a_1D(g) + a_2D(g^2) + \cdots + a_nD(g^n) \\ &= a_1D(g) + 2a_2gD(g) + \cdots + na_ng^{n-1}D(g) \quad (\text{nach (I.19)}) \\ &= (a_1 + 2a_2g + \cdots + na_ng^{n-1}) \cdot D(g) \\ &= (\partial(f) \circ g) \cdot D(g) \\ &= (D(f) \circ g) \cdot D(g). \end{aligned} \quad (\text{nach (I.23), } D(\iota) = 1)$$

27-§4. Sei zunächst $m \geq 0$ angenommen. Für $m = 0$ (Induktionsanfang) ist die Behauptung $1 \circ f = 1$ trivialerweise richtig. Der Induktionsschritt $m \rightarrow m+1$ vollzieht sich wie folgt:

$$\begin{aligned} D(\bar{f})^{m+1} \circ f &= (D(\bar{f})^m \cdot D(\bar{f})) \circ f \\ &= (D(\bar{f})^m \circ f) \cdot (D(\bar{f}) \circ f) \quad (\text{Axiom (F3)}) \\ &= D(f)^{-m} \cdot D(f)^{-1} \quad (\text{Induktionsannahme, (I.25)}) \\ &= D(f)^{-(m+1)}. \end{aligned}$$

Im Fall $m < 0$ haben wir nach dem soeben Gezeigten $D(f)^m = D(\bar{f})^{-m} \circ f$ und damit

$$D(f)^{-m} = \frac{1}{D(\bar{f})^{-m} \circ f} = \frac{1}{D(\bar{f})^{-m}} \circ f = D(\bar{f})^m \circ f.$$

28 – § 4. Wir notieren das betreffende Polynom P laut Voraussetzung in der Normalform

$$P = \sum c_{r_1 \dots r_n} X_1^{r_1} \cdots X_n^{r_n},$$

worin die Summation über eine gewisse Indexmenge von n -Tupeln (r_1, \dots, r_n) nichtnegativer Zahlen erfolgt, für die $r_1 + \dots + r_n = k$ ist. Damit erhalten wir der Reihe nach die folgenden Identitäten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial X_j} &= \sum r_j c_{r_1 \dots r_n} X_1^{r_1} \cdots X_j^{r_j-1} \cdots X_n^{r_n} \\ X_j \frac{\partial P}{\partial X_j} &= \sum r_j c_{r_1 \dots r_n} X_1^{r_1} \cdots X_n^{r_n} \\ \sum_{j=1}^n X_j \frac{\partial P}{\partial X_j} &= \sum_{j=1}^n r_j \sum c_{r_1 \dots r_n} X_1^{r_1} \cdots X_n^{r_n} = \sum_{j=1}^n r_j P = k \cdot P. \end{aligned}$$

29 – § 4. Die Anzahl möglicher Folgen der Länge k , deren Plätze mit irgendeinem von n Objekten belegt werden kann, beträgt n^k . Ohne Einschränkung denke man sich die n Objekte dabei durch die Ziffern $1, 2, \dots, n$ repräsentiert. Kommt in einer k -gliedrigen Folge die Ziffer ν genau j_ν -mal vor, so gilt $j_1 + j_2 + \dots + j_n = k$. Jede Lösung (j_1, \dots, j_n) dieser diophantischen Gleichung in nichtnegativen Zahlen j_ν repräsentiert also ein Muster für die möglichen Wiederholungen der Ziffern und liefert mit $k!/(j_1! \cdots j_n!)$ die Anzahl der Folgen, die dieses Muster aufweisen. Daher ist die über sämtliche Lösungstupel (j_1, \dots, j_n) sich erstreckende Summe dieser Anzahlen gleich der Anzahl aller k -Permutationen von $1, 2, \dots, n$ mit Wiederholung.

30 – § 4. Um Fallunterscheidungen bezüglich der Indizes zu vermeiden, notieren wir lediglich andeutungsweise die in P vorkommenden Unbestimmten als X_1, X_2, \dots . Nach Voraussetzung wird dann aus der rechten Seite der Behauptung

$$P(Q_1(R_1, \dots, R_{q(1)}), Q_2(R_1, \dots, R_{q(2)}), \dots). \quad (*)$$

Die Auswertung der linken Seite liefert zunächst $P \circ Q_\# = P(Q_1, Q_2, \dots)$ und damit schließlich

$$(P \circ Q_\#) \circ R_\# = P(Q_1 \circ R_\#, Q_2 \circ R_\#, \dots),$$

was offensichtlich dasselbe ist wie $(*)$.

31 – § 4. (a): Induktionsanfang $n = 0$: Auf beiden Seiten der behaupteten Gleichung steht $f \cdot g$. – Induktionsschritt $n \rightarrow n + 1$: Der Reihe nach wendet man die Induktionsannahme, die Summen- und die Produktregel an und erhält:

$$D^{n+1}(fg) = D \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} D^j(f) D^{n-j}(g) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} D(D^j(f)D^{n-j}(g)) \\
&= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} D^{j+1}(f)D^{n-j}(g) + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} D^j(f)D^{n-j+1}(g) \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} D^j(f)D^{n-j+1}(g) + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} D^j(f)D^{n-j+1}(g) \\
&= D^{n+1}(f)g + \sum_{j=1}^n \left(\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} \right) D^j(f)D^{n+1-j}(g) \\
&\qquad\qquad\qquad + D^0(f)D^{n+1}(g) \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} D^j(f)D^{n+1-j}(g).
\end{aligned}$$

(b): Zum Beweis von (I.32) führen wir eine Induktion nach der Anzahl s der Faktoren durch. Für $s = 1$ ist die Behauptung klar. – Induktionsschritt $s \rightarrow s + 1$: Nach der in (a) bereits bewiesenen Regel von Leibniz (I.12) gilt

$$D^n((f_1 \cdots f_s)f_{s+1}) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} D^i(f_1 \cdots f_s)D^{n-i}(f_{s+1}),$$

wobei laut Induktionsannahme

$$D^i(f_1 \cdots f_s) = \sum_{j_1 + \cdots + j_s = i} \frac{i!}{j_1! \cdots j_s!} D^{j_1}(f_1) \cdots D^{j_s}(f_s).$$

Setzen wir nun $j_{s+1} = n - i$, so wird $j_1 + \cdots + j_s + j_{s+1} = i + (n - i) = n$ und damit

$$\binom{n}{i} \cdot \frac{i!}{j_1! \cdots j_s!} = \frac{n!}{j_1! \cdots j_s! j_{s+1}!},$$

was zu zeigen war.