Nutzenerwartungswert und Bernoulli-Regel

Entscheidungen unter Risiko

Ein Entscheidungsproblem bei *Unsicherheit* wird mit Hilfe einer Regel gelöst, die ausschließlich die Werte der Nutzenmatrix verarbeitet (vgl. den Abschnitt "Entscheidungen bei Unsicherheit"). Dazu hatten wir eine Entscheidungsregel durch Angabe einer Wertfunktion w auf der Menge A der Alternativen definiert. Die Lösungsmenge $S_w(A)$ des Entscheidungsproblems besteht dann aus allen $a \in A$, für die $w(a)$ maximal ist (Optimalitätsprinzip).

Bei Entscheidungen unter *Risiko* gehen wir in derselben Weise vor. In diesem Fall ist zusätzlich eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über der Menge B der Bedingungen gegeben, d.h. es ist bekannt, mit welchen Wahrscheinlichkeiten $p_j = P(b_j)$ die Umweltbedingungen b_j eintreten ($j = 1, 2, \ldots, n$), wobei gilt:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$$

Der Nutzenerwartungswert. Bernoulli-Regel

■ Eine Wertfunktion, die Wahrscheinlichkeiten berücksichtigt

Es liegt nahe, die zusätzliche Information über die Bedingungen in einer Wertfunktion zu verarbeiten. Im Falle von Unsicherheit (d.h. ohne Kenntnis von Wahrscheinlichkeiten) bot sich kein allgemein plausibles Verfahren an, aus den Nutzenwerten $u_1, \ldots, u_n$ einer Alternative a einen "Gesamtwert" zu ermitteln. Kennt man jedoch die Wahrscheinlichkeiten, mit der die b_j eintreten (und die Nutzenwerte u_j realisiert werden), so bietet sich die gewichtete Summe

$$\mathrm{EU}(a) := p_1 u_1 + p_2 u_2 + \ldots + p_n u_n$$

als ein solcher Gesamtwert an. Es handelt sich um den Erwartungswert des Nutzens von a, auch **Nutzenerwartungswert** genannt; in der Bezeichnung EU ("Expected Utility") soll dies zum Ausdruck kommen.

Wählt man EU als Wertfunktion auf der Alternativenmenge, so erhalten wir damit ein einfaches Entscheidungsverfahren. Wir indizieren die Wertfunktion w mit dem Namen "Bernoulli" (auf den diese Anwendung des Erwartungswerts zurückgeht).

Die folgende Formulierung setzt voraus:

- eine Alternativenmenge: $A = \{a_1, ..., a_m\}$
- eine Menge von Bedingungen $B = \{b_1, ..., b_n\}$
- eine Nutzenmatrix $U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & ... & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & ... & u_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ u_{m1} & u_{m2} & ... & u_{mn} \end{pmatrix}$
- eine W-Verteilung $(p_1, ..., p_n)$ auf B.

Damit lautet die Bernoulli'sche Wertfunktion:

$$w_{\text{Bernoulli}}(a_i) = \text{EU}(a_i) = p_1\, u_{i1} + p_2\, u_{i2} + ... + p_n\, u_{in}$$

Beim praktischen Rechnen empfiehlt es sich, die Daten in eine Nutzen-Tabelle einzutragen. Der Wert $w_{\text{Bernoulli}}(a_i)$ ist dann ans Ende jeder Zeile $i = 1, 2, ..., m$ zu notieren; anschließend sucht man die Zeilen mit maximalem Nutzenerwartungswert.

■ Beispiel 1

Wie schon im Fall von Entscheidungen bei Unsicherheit wollen wir das Verfahren an dem Beispiel "Der passende Wein" illustrieren.

Die Nutzenmatrix lautet: $U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0.5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Die eingeladene Person schätze die Wahrscheinlichkeit für Rindfleisch mit 60 %, die von Fisch mit 10 %. Dann lautet die W-Verteilung: $p_1 = P(\text{Huhn}) = 0.3,\ p_2 = P(\text{Rindfleisch}) = 0.6,\ p_3 = P(\text{Fisch}) = 0.1$.

Damit können die drei Alternativen für die Wahl der Weinart bewertet werden:

$$\text{EU}(a_1) = p_1 \cdot 1 + p_2 \cdot (-1) + p_3 \cdot 1 = -0.2$$
$$\text{EU}(a_2) = p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 1 + p_3 \cdot (-1) = 0.5$$
$$\text{EU}(a_3) = p_1 \cdot 0.5 + p_2 \cdot 0 + p_3 \cdot (-1) = 0.05$$

Es ergibt sich folgende Präferenzordnung: $a_2 > a_3 > a_1$, d.h. der Gast entscheidet sich für Rotwein.

Bemerkung: Die Laplace-Regel (vgl. den Abschnitt "Entscheidungen bei Unsicherheit") hatte bei diesem Beispiel eine andere Präferenz ergeben. Der Grund ist in der dabei unterstellten Gleichverteilung $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ zu sehen.

Tatsächlich ist allgemein die Laplace-Wertfunktion w_{Laplace} *Spezialfall* der Bernoulli-Wertfunktion $w_{\text{Bernoulli}}$ für $p_1 =. .. = p_n = \frac{1}{n}$. Bei Gleichverteilung geht der Nutzenerwartungswert in das arithmetische Mittel der Nutzenwerte über.

■ Beispiel 2

Für das Beispiel "Auflagenhöhe für ein Buch" (vgl. diesen Abschnitt) hatten wir bereits mit einer W-Verteilung für die 6 Bedingungen gearbeitet:

$$p_1 = 0.1,\ p_2 = 0.15,\ p_3 = 0.15,\ p_4 = 0.3,\ p_5 = 0.2,\ p_6 = 0.1$$

Zu jeder der drei Alternativen wurde der Nutzenerwartungswert berechnet:

$$\mathrm{EU}(a_1) = 13500$$

$$\mathrm{EU}(a_2) = 13750$$

$$\mathrm{EU}(a_3) = -250$$

Die maximal bewertete Alternative a_2 (Auflage von 7000 Exemplaren) ergibt sich somit als Lösung.

Verfolgt der Verleger neben dem Ziel "Gewinnmaximierung" zusätzlich das Ziel "Vermeidung von Nachfrageüberhang" (und zwar im Gewichtungsverhältnis 2 : 1), so erhält man folgende (normierte) Nutzenmatrix (vgl. Übungen):

$$U = \begin{pmatrix} \frac{31}{45} & \frac{37}{45} & \frac{133}{180} & \frac{59}{90} & \frac{103}{180} & \frac{22}{45} \\ \frac{23}{45} & \frac{29}{45} & \frac{7}{9} & \frac{41}{45} & \frac{149}{180} & \frac{67}{90} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{15} & \frac{3}{5} & \frac{11}{15} & \frac{13}{15} & 1 \end{pmatrix};$$

Das *Mathematica*-Paket **`Entscheidungsregeln.m`** bietet neben den klassischen Regeln für Entscheidungen bei Unsicherheit auch eine automatisierte Berechnung der Lösungsmenge nach dem Bernoulli-Verfahren:

```
<< Modellbildung`Entscheidungsregeln`
```

```
pvert = {0.1, 0.15, 0.15, 0.3, 0.2, 0.1};
Bernoulli[U, pvert]
```

```
{2}
```

Die Berücksichtigung eines weiteren Ziels hat in diesem Fall keinen Einfluss auf die Lösung des Entscheidungsproblems.

Ist die Bernoulli-Regel rational?

Es wurde bereits darauf hingewiesen, dass die klassischen Regeln für Entscheidungen bei Unsicherheit (Maximin, Maximax, Niehans-Savage, Laplace) kritischen Fragen nach ihrer Rationalität schwerlich standhalten (vgl. die ergänzenden Bemerkungen "Rationalität der Regel" im Abschnitt "Entscheidungen bei Unsicherheit").

Demgegenüber befinden wir uns bei der Anwendung des Nutzenerwartungswerts in einer besseren Lage. Sie erweist sich nämlich als logisch zwingend, *sofern man bestimmte plausible Axiome rationalen Verhaltens akzeptiert.* Wir werden auf diese und verwandte Begründungsfragen nicht näher eingehen und verweisen auf die umfangreiche Literatur zu diesem Thema.

Axiome der Vollständigkeit, Stetigkeit und Unabhängigkeit für Präferenzordnungen erörtert Eisenführ/Weber: *Rationales Entscheiden*. Springer Verlag: Berlin; Heidelberg; New York 1999, S. 212 f. Eine etwas andere, aber gleichwertige Grundlegung findet man bei Luce/Raiffa: *Games and Decisions*. Wiley: New York 1957, Chap. 2.

Das St. Petersburger Spiel

Peter betätigt sich als Bankhalter. Er wirft eine Münze solange, bis *Zahl* erscheint. Einem Spieler (den wir Paul nennen) sichert er für den Einsatz $e > 0$ die Auszahlung von $(2^m + 1)\, e$ zu, wenn *Zahl* beim m-ten Münzwurf auftritt. Der Reingewinn beträgt dann für Paul $2^m\, e$.

Bei diesem sog. *St. Petersburger Spiel* handelt es sich um eine Wette vom Pauschaltyp, deren Quote von der Wartezeit eines bestimmten Ereignisses (hier: Zahlseite der Münze) abhängt (vgl. Abschnitt "Multiwetten"). Paul gewinnt, wenn er und Peter den Ablauf der Wartezeit noch erleben. Theoretisch, d.h. bei unbegrenzter Versuchslänge, gewinnt Paul aber immer. Die Wette ist somit für keinen Einsatzbetrag fair. Dabei ist Paul's Gewinnerwartung sogar positiv unendlich:

$$E(G) = \frac{1}{2} \cdot 2\, e + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2^2\, e + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 2^3\, e + \ldots = e + e + e + \ldots = \infty$$

Die Konsequenz daraus scheint paradox. Paul müsste nämlich die Teilnahme an der Petersburger Wette einem sicheren Geldgeschenk (von beliebiger Höhe!) vorziehen. Dass er das, gerade wenn er sich rational entscheidet, niemals tun würde, liegt unter anderem daran, dass die wirklich großen Gewinne extrem unwahrscheinlich sind.

Offenbar stellt der Erwartungswert der Gewinnbeträge im Allgemeinen nicht unbedingt ein geeignetes Kriterium dar, mit dem rationale Entscheidungen zu treffen sind.

Es gibt mindestens zwei Ansätze, den paradoxen Charakter der Wette zu mildern bzw. zum Verschwinden bringen: a) durch Begrenzung der Wartezeit, und b) durch Einführung einer Nutzenfunktion.

■ Begrenzung der Wartezeit

Wir nehmen an, die Münze werde höchstens s-mal geworfen. Für den damit verbundenen Reingewinn G_s ergibt sich dann der endliche Erwartungswert:

$$E(G_s) = \sum_{m=1}^{s} \frac{1}{2^m} \cdot 2^m\, e + \frac{1}{2^s}\,(-e) = \left(s - \frac{1}{2^s}\right) e$$

Offenbar ist die Wette für alle $s \geq 1$ günstig (und daher niemals fair). Angenommen, Paul wettet 100 Euro. Dann ist für $s > 10000$ die Wette etwas mehr als 1 Mio Euro wert? Nichtsdestoweniger wird man vernünftigerweise den sicheren Betrag (1 Mio €) der Teilnahme an der Wette vorziehen.

Bei niedriger Wartezeitschranke sieht die Sache anders aus. Zum Beispiel ergibt sich für $s = 10$ bei einem Einsatz von 1 Euro: $E(G_{10}) = 10 - \frac{1}{2^{10}} \approx 9.99902$. In diesem Fall wird die Gewinnerwartung genau dann übertroffen, wenn die Wartezeit ≥ 4 beträgt. Die Wahrscheinlichkeit dafür liegt bei 0.124, ist also nicht so klein, dass der sichere Zugewinn von 10 Euro einer Teilnahme an der Wette von vornherein vorzuziehen wäre. Ob eine Person dazu neigt, das jeweilige Risiko einzugehen, hängt davon ab, in welcher Weise sie Gewinne (Geldbeträge) bewertet. Durch Einführung einer Nutzenfunktion ist es möglich, das entsprechende Verhaltensmuster mathematisch auszudrücken.

■ Einführung einer Nutzenfunktion

Auf Bernoulli geht die Idee zurück, dem Spieler Paul eine logarithmische Nutzenfunktion zuzuschreiben (vgl. Abschnitt "Logarithmischer Nutzen"):

$$u(c) = k \log c + k_0$$

Unter dieser Voraussetzung lässt sich zeigen:

> Der Nutzenerwartungswert der Petersburger Wette ist gleich dem Nutzenwert des 4-fachen Einsatzes.

Beweis: Für Paul's Reingewinn $c = 2^m\, e$ erhalten wir den Nutzen $u(2^m\, e) = k\, m \log 2 + u(e)$, und damit:

$$\text{EU} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m u(2^m\, e) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{k\, m \log 2}{2^m} + \frac{u(e)}{2^m}\right)$$

Der erste Teil der Summe liefert $(k \log 2) \cdot \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{2^{m-1}} = 2\, k \log 2$; der zweite Teil ist gleich $u(e)$. Insgesamt ergibt sich für den Nutzenerwartungswert:

$$\text{EU} = 2\, k \log 2 + k \log e + k_0 = k(\log 4 + \log e) + k_0 = u(4\, e)$$

■

Folgerung: Wenden Peter und Paul dieselbe (logarithmische) Nutzenfunktion auf alle Geldbeträge an, so wird das Petersburger Spiel (mit unbegrenzter Wartezeit) genau dann zu einer fairen Wette, wenn $\text{EU} = u(4\, e) = 0$. Der Einsatz von Paul beträgt dann $\frac{1}{4} \exp\left(-\frac{k_0}{k}\right)$. Falls $k_0 = 0$ (d.h. falls 1 Geldeinheit den Nutzen 0 hat), ergibt sich $e = 0.25$.

Anmerkung: Auch andere als logarithmische Nutzenfunktionen führen zu vergleichbaren Ergebnissen. Ist z.B. $u(c) = k \sqrt{c} + k_0$, so gilt $\text{EU} = u\left(\left(3 + 2\sqrt{2}\right) e\right)$ (Beweis als Übung!) – Auch in diesem Fall ergibt sich aus $\text{EU} = 0$ ein Einsatzbetrag $e > 0$, für den die Wette fair wird: $e = \left(\frac{k_0}{k}\right)^2 \left(3 - 2\sqrt{2}\right)$.

Spatz oder Taube:
Das Sicherheitsäquivalent

■ Spatz oder Taube?

Der Schütze Theobald trifft erfahrungsgemäß 50 % aller Tauben, die auf dem Dach sitzen. Der sprichwörtliche Spatz in der Hand (a_1) steht für eine kleines, aber sicheres Gut; die ebenso sprichwörtliche Taube auf dem Dach (a_2) steht für größeres, aber unsicheres Gut. Um eine Entscheidung zwischen den beiden Alternativen zu treffen, bewerten wir "Spatz" mit dem Nutzenwert 1, "Taube" mit 3 und die Möglichkeit, leer auszugehen, mit -1.

Damit erhalten wir folgende Nutzenmatrix:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Theobald wird sich zwischen a_1 und a_2 vor dem Hintergrund der beiden Bedingungen

$b_1 = \text{Taube getroffen}$

$b_2 = \text{Taube nicht getroffen}$

entscheiden. Ihre Wahrscheinlichkeiten sind bekannt: $p_1 = P(b_1) = 0.5$, $p_2 = P(b_2) = 0.5$. Es ergeben sich damit die Nutzenerwartungswerte:

$\mathrm{EU}(a_1) = 0.5 \cdot 1 + 0.5 \cdot 1 = 1$

$\mathrm{EU}(a_2) = 0.5 \cdot 3 + 0.5 \cdot (-1) = 1$

Handelt Theobald gemäß der Bernoulli-Regel, so ist keine Alternative bevorzugt (er könnte also eine Laplace-Münze werfen, um die Entscheidung zufällig zu treffen).

■ Das Sicherheitsäquivalent

Das Besondere an dieser Patt-Situation (Indifferenz) liegt darin, dass eine der beiden Alternativen auf einer sicheren Konsequenz beruht, genauer: Der <u>Nutzenerwartungswert der risikobehafteten Alternative</u> a_2 (= *auf die Taube schießen*) <u>ist gleich dem Nutzenwert einer sicheren Konsequenz</u> c^* (= *Spatz*):

$$\mathrm{EU}(a_2) = u(c^*)$$

Der Spatz in der Hand wird daher als Sicherheitsäquivalent der Risikoalternative Taube auf dem Dach bezeichnet.

Der Begriff lässt sich auf einfache Weise allgemein definieren:

Definition

Sei $a \in A$ irgendeine Handlungsalternative. Eine Konsequenz $c^* \in C$ heißt *Sicherheitsäquivalent von a*, wenn $u(c^*) = \mathrm{EU}(a)$.

Die Existenz eines Sicherheitsäquivalents ist nicht in allen Fällen garantiert (im obigen Beispiel etwa, wenn "Taube" den Nutzenwert 2 erhält). Gibt es genau ein c^* mit $u(c^*) = \mathrm{EU}(a)$, so verwenden wir die Bezeichnung

$$c^* =: \mathrm{SE}(a)$$

Ist die Konsequenzenmenge C ein reelles Intervall und $u : C \longrightarrow \mathbb{R}$ eine umkehrbare Funktion, dann ist c^* eindeutig bestimmt, und es gilt:

$$\mathrm{SE}(a) = u^{-1}(\mathrm{EU}(a))$$

■ Beispiel

Ist a die Teilnahme am St. Petersburger Spiel mit dem Einsatzbetrag $e > 0$ und $u(c) = k \cdot \log c + k_0$ die gemeinsame Nutzenfunktion von Spieler und Gegenspieler, so gilt: $\mathrm{EU}(a) = u(4\, e)$ (vgl. den Abschnitt "Das St. Petersburger Spiel"). Es ist daher unmittelbar nach Definition: $\mathrm{SE}(a) = 4\, e$, d.h. der 4-fache Einsatz ist das Sicherheitsäquivalent für die risikobehaftete Teilnahme an der Wette.

Nutzenfunktionen als Modelle von Risikoeinstellungen

In diesem Abschnitt geht es um die Frage, wie man das Entscheidungsverhalten einer Person, genauer: ihre Einstellung zum Risiko, mathematisch beschreiben kann.

Die Risikoprämie

Die einfachste Vorgehensweise besteht darin, der Person eine Wette a (häufig auch *Lotterie* genannt) anzubieten und sie um Angabe eines (persönlichen) Sicherheitsäquivalents $\mathrm{SE}(a)$ zu bitten. Liegt $\mathrm{SE}(a)$ unterhalb der (objektiven) Gewinnerwartung, so drückt sich darin eine Scheu vor dem Risiko aus. Ist umgekehrt die Gewinnerwartung kleiner als das Sicherheitsäquivalent, so bedeutet dies Risikofreudigkeit.

Wir betrachten ein einfaches Beispiel:

Die Wette a habe zwei gleichwahrscheinliche Ausgänge b_1, b_2 (die hier für die "Umweltbedingungen" im allgemeinen Entscheidungsschema stehen) und die Konsequenzen (Reingewinne) $c_1 = 100$, $c_2 = -10$. Dann lautet der Erwartungswert des Reingewinns G_a:

$$E(G_a) = \tfrac{1}{2} \cdot c_1 + \tfrac{1}{2} \cdot c_2 = 45$$

Gibt nun jemand als sein Sicherheitsäquivalent $\mathrm{SE}(a) = 30$ € an, so hat dies zur Folge, dass er einen sicheren Geldbetrag ab 30 € der Teilnahme an der Lotterie a vorzieht.

Die Differenz $E(G_a) - \mathrm{SE}(a) =: \mathrm{RP}(a)$ wird *Risikoprämie* genannt. Im Beispiel beträgt sie 15 €. Sie ist gerade derjenige Betrag, auf den man *a priori* verzichtet, wenn man die sichere Alternative der risikobehafteten Alternative vorzieht.

■ Fazit

> Das Entscheidungsverhalten einer Person bezüglich einer Handlungsalternative a mit unsicherem Ausgang ist risikoscheu (risikoneutral, risikofreudig), wenn die zugehörige Risikoprämie $\mathrm{RP}(a) > 0$ ($= 0$, < 0) ist.

■ Teilnahme an einer Wette mit negativer Gewinnerwartung

Bei vielen unsicheren Handlungen a (insbesondere bei allen Glückspielen) kann man nicht nur gewinnen, sondern (auch im Mittel) verlieren. Lässt sich jemand darauf ein, so zeigt er damit Risikofreudigkeit. Wir wollen dies begrifflich exakt nachvollziehen.

Die in Betracht kommenden Konsequenzen seien reelle Zahlen (als Reingewinne interpretiert). Sei nun $E(G_a) < 0$. Entscheidet sich jemand für die Alternative a, so präferiert er sie gegenüber der sicheren Konsequenz 0; sein Sicherheitsäquivalent $\mathrm{SE}(a)$ muss somit erst recht > 0 sein! Daraus ergibt sich für die Risikoprämie:

$$\mathrm{RP}(a) = E(G_a) - \mathrm{SE}(a) < 0$$

was gleichbedeutend ist mit risikofreudigem Entscheidungsverhalten.

■ Abschluss einer Versicherung

Wer eine Versicherung abschließt, zeigt eine Scheu vor dem Risiko. Er zieht die von ihm zu leistende sichere Einzahlung (mithin ein <u>negatives</u> Sicherheitsäquivalent) für die Versicherungsprämie der Hinnahme eines riskanten Schadens vor, dessen erwarteter (mittlerer) Verlust geringer als die Versicherungsprämie ist. Das hat zur Folge, dass die Risikoprämie > 0 ausfällt.

In vielen Lebensbereichen kann ein versicherbarer Schaden erheblich negative, bisweilen sogar ruinöse Auswirkungen für den Einzelnen haben. Es ist daher nicht unvernünftig, in solchen Handlungsfeldern risikoaversiv zu entscheiden. Dieselbe Person kann sich gleichwohl anderen Risiken gegenüber weniger zurückhaltend zeigen (z.B. bei der Geldanlage oder auch nur bei der wöchentlichen Teilnahme an der Staatlichen Lotterie). Ein Widerspruch entsteht dadurch nicht. *Die Modellierung der Risikoeinstellung bezieht sich immer nur auf ein spezifisches Entscheidungsfeld.*

Typen von Nutzenfunktionen

Die Information über das Entscheidungsverhalten einer Person für ein gegebenes Konsequenzen-Intervall $C = [c_{\min}; c_{\max}]$ steckt in der mit ihr assoziierten Nutzenfunktion, genauer: in ihrem Krümmungsverhalten über dem Intervall C.

Wir wollen diesen Sachverhalt an verschiedenen Beispieltypen zunächst anschaulich erörtern. Dabei wird (zwecks Vergleichbarkeit) stets vorausgesetzt, dass die auftretenden Nutzenfunktion <u>normiert</u> sind. Ferner mögen (ohne Einschränkung der Allgemeinheit) nur <u>streng monoton wachsende</u> Nutzenverläufe in Betracht kommen.

Für die grafische Darstellung werden die zu bewertenden Konsequenzen (Gewinne, Geldbeträge, etc.) durch reelle Zahlen zwischen $c_{\min} = 1$ und $c_{\max} = 100$ wiedergegeben.

■ Linearer Nutzen

Eine Funktion vom Typ

$$u_{\mathrm{Lin}}(x) = k_0 + k_1\, x$$

nennen wir *lineare Nutzenfunktion*. Der Nutzen von x wird (bis auf eine lineare Skalentransformation) durch x gemessen. (Es wird gleich deutlich werden, dass u_{Lin} *risikoneutrales* Entscheidungsverhalten beschreibt.)

Wir verschaffen uns eine Darstellung der Funktion in normierter Gestalt ($k_0 = -\frac{1}{99}$, $k_1 = \frac{1}{99}$):

```
<< Modellbildung`Normierung`
```

```
UfuncLin[x_] := Normiere[x, 1, 100]
```

```
UfuncLin[x]
```

$$-\frac{1}{99} + \frac{x}{99}$$

■ Logarithmischer Nutzen

Die (von Bernoulli verwendete) Funktion

$$u_{\text{Log}}(x) = k_0 + k_1 \log x$$

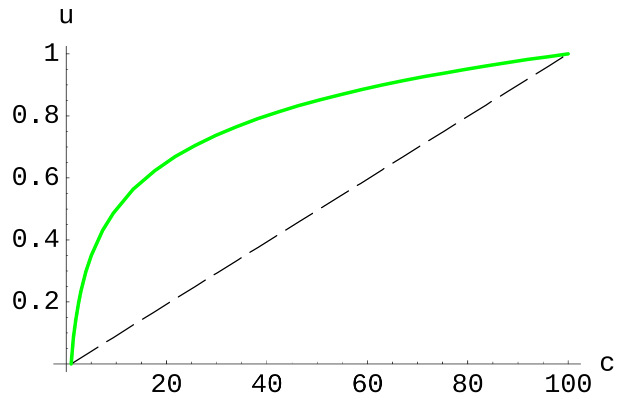
(im Abschnitt "Logarithmische Nutzenfunktion" aus plausiblen Annahmen hergeleitet) lautet in normierter Form ($k_0 = 0$, $k_1 = \frac{1}{\log 100}$):

```
UfuncLog[x_] := Normiere[Log[x], Log[1], Log[100]];
UfuncLog[x]
```

$$\frac{\text{Log}[x]}{\text{Log}[100]}$$

Zunächst ein grafischer Vergleich von logarithmischem und linearem Nutzen:

```
Graph1 = Plot[{UfuncLin[x], UfuncLog[x]}, {x, 1, 100},
   PlotStyle → {{Dashing[{0.06, 0.02}], RGBColor[0, 0, 0]},
     {Thickness[0.007], RGBColor[0, 1, 0]}}, AxesLabel → {"c", "u"}];
```



Dem Graphen lässt sich anschaulich entnehmen: Einem Nutzenwert (den wir uns am besten als Nutzenerwartungswert vorstellen) entspricht ein kleinerer Geldbetrag (den wir als Sicherheitsäquivalent deuten), wenn wir eine logarithmische anstelle einer linearen Nutzenfunktion verwenden. Dies deutet auf *Risikoaversion* hin.

Bemerkung: Einen qualitativ vergleichbaren Krümmungsverlauf (genauer: von unten konkav) zeigen die Nutzenfunktionen des Typs $u_{\text{Rad}}(x) = k_0 + k_1 \sqrt{x}$, auf die hier aber nicht weiter eingegangen werden soll.

■ Quadratischer Nutzen

Die allgemeine Form einer quadratischen Funktion lautet:

$$u_{\text{Quad}}(x) = k_0 + k_1\, x + k_2\, x^2$$

Durch die Normierung werden nur zwei der Koeffizienten festgelegt. Für unsere Zwecke genügt es, wenn wir $k_2 > 0$ voraussetzen und $k_1 = 0$ spezialisieren. Dann ist u_{Quad} streng monoton wachsend und (von unten) konvex.

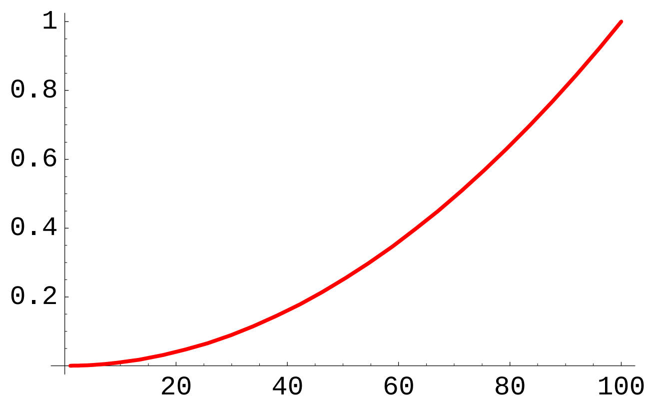
Wir erhalten:

```
UfuncQuad[x_] := -1 / 9999 + x^2 / 9999
UfuncQuad[x]
```

$$-\frac{1}{9999} + \frac{x^2}{9999}$$

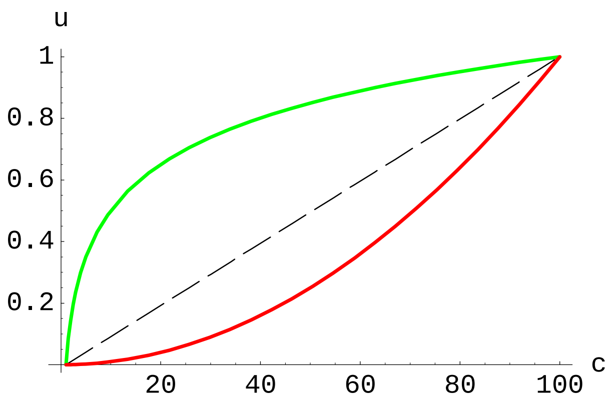
Die resultierende Kurve besitzt die oben verlangten Eigenschaften:

```
Graph2 = Plot[UfuncQuad[x], {x, 1, 100},
   PlotStyle → {{Thickness[0.007], RGBColor[1, 0, 0]}}];
```



Nun die Zusammenschau der drei Funktionsverläufe:

```
Show[Graph1, Graph2];
```



Ergänzend zu der früheren Beobachtung lässt sich sofort ablesen, dass ein gegebener Nutzenwert in diesem Fall für einen <u>größeren</u> Geldbetrag steht als bei Zugrundelegung der linearen (und erst recht der logarithmischen) Nutzenfunktion. Das deutet auf *Risikofreudigkeit* hin.

Risikoverhalten im Entscheidungsmodell

Der Zusammenhang zwischen den Krümmungseigenschaften einer Nutzenfunktion u und dem Verhalten bei riskanten Entscheidungen, das jemand zeigt, der u als Nutzenfunktion besitzt und die Bernoulli-Regel befolgt, wurde bisher (lediglich auf anschaulicher Grundlage) vermutet. Im Folgenden wollen wir diesen Sachverhalt innerhalb unseres Entscheidungsmodells präzisieren und streng beweisen.

■ Voraussetzungen und Hilfsbehauptungen

Die risikobehaftete Handlung a finde unter den einander ausschließenden Bedingungen $b_1, \ldots, b_n$ statt, wobei $p_j = P(b_j)$ die Wahrscheinlichkeit für die j-te Bedingung und c_j die bei b_j realisierte Konsequenz (am einfachsten als reellwertigen Geldbetrag vorzustellen) bezeichnet ($1 \leq j \leq n$).

Aus diesen Voraussetzungen folgt:

$p_1 + \ldots + p_n = 1$ und $E(G_a) = \sum_{j=1}^{n} p_j\, c_j$ (Erwartungswert des Gewinns bei Entscheidung für a).

Wir legen eine beliebige Nutzenfunktion u zu Grunde, die (1) im Konsequenzen-Intervall C streng monoton wächst und (2) eine eindeutige Umkehrfunktion u^{-1} besitzt; diese ist dann ebenfalls streng monoton wachsend (Begründung!).

Aus der Analysis werden folgende Aussagen herangezogen (gelegentlich in der Literatur auch als Definitionen verwendet):

<u>**1.**</u> Eine Funktion f ist **linear** gdw. $f(s_1\, x_1 + \ldots + s_n\, x_n) = s_1\, f(x_1) + \ldots + s_n\, f(x_n)$

Eine Funktion f auf C ist (von unten)

2. konkav gdw. $f(s_1\, x_1 + ... + s_n\, x_n) > s_1\, f(x_1) + ... + s_n\, f(x_n)$

3. konvex gdw. $f(s_1\, x_1 + ... + s_n\, x_n) < s_1\, f(x_1) + ... + s_n\, f(x_n)$

jeweils für alle $x_1, ..., x_n \in C$ und für alle reellen $s_j \geq 0$ mit $s_1 + ... + s_n = 1$.

Man mache sich etwa 2. anschaulich an dem Spezialfall $n = 2$, $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$ klar: $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

■ Satz über den Zusammenhang von Krümmung und Risikoverhalten

(1) u linear $\Longrightarrow \mathrm{RP}(a) = 0$

(2) u konkav $\Longrightarrow \mathrm{RP}(a) > 0$

(3) u konvex $\Longrightarrow \mathrm{RP}(a) < 0$

Beweis:

Zu (1). Es ist $\mathrm{EU}(a) = \sum p_j\, u(c_j) = u(\sum p_j\, c_j) = u(E(G_a))$ aufgrund der Linearität von u (vgl. obige Aussage Nr. 1). Daraus ergibt sich für das Sicherheitsäquivalent: $\mathrm{SE}(a) = u^{-1}(\mathrm{EU}(a)) = E(G_a)$, und schließlich für die Risikoprämie: $\mathrm{RP}(a) = E(G_a) - \mathrm{SE}(a) = 0$.

Zu (2). Wendet man obige Aussage Nr. 2 auf u an, so folgt: $\mathrm{EU}(a) = \sum p_j\, u(c_j) < u(\sum p_j\, c_j) = u(E(G_a))$. Da auch u^{-1} auf C streng monoton wächst, hat man $\mathrm{SE}(a) = u^{-1}(\mathrm{EU}(a)) < E(G_a)$ und daher $\mathrm{RP}(a) > 0$.

Zu (3). Analog (2). – Als Übung! ■

Will man den Satz anwenden, so muss gesichert sein, dass die in Betracht gezogene Nutzenfunktion (auf der Konsequenzenmenge C) linear oder konkav oder konvex ist. Anstatt der hier im Beweis verwendeten Eigenschaften lassen sich dazu Kriterien verwenden, welche auf der Differenzierbarkeit von u beruhen (i.a. von der Schule her bekannt im Zusammenhang mit sog. Kurvendiskussionen):

Ist u auf C zweimal differenzierbar und $u''(x) \geq 0$ (≤ 0) für alle $x \in C$, so ist u konvex (bzw. konkav).

Wir zeigen mit diesem Kriterium, dass u_{Log} konkav ist. Es ist $u_{\mathrm{Log}}'(x) = \frac{1}{x \log 100}$ und $u_{\mathrm{Log}}''(x) = -\frac{1}{x^2 \log 100} < 0$ für $x \in [1; 100]$. Man mache sich die *geometrische* Bedeutung dieser Relation klar: Der Anstieg der logarithmischen Nutzen-Kurve nimmt ab, wenn x das Intervall von 1 bis 100 durchläuft!

Noch einfacher ergibt sich $u_{\mathrm{Quad}}''(x) = \frac{2}{9999} > 0$ und damit die Konvexität der quadratischen Nutzenfunktion.

■ Eine Abschätzung für das Sicherheitsäquivalent

Nach Definition ist das Sicherheitsäquivalent c^* einer risikobehafteten (unsicheren) Alternative a Lösung der Gleichung $u(c^*) = \mathrm{EU}(a)$.

Ist statt des Nutzenerwartungswertes $\mathrm{EU}(a)$ lediglich der Erwartungswert $\mu := E(G_a)$ bekannt, so kann man das Sicherheitsäquivalent $\mathrm{SE}(a)$ immerhin noch durch ein Intervall einfangen. Wir führen die einfache Überlegung für den Fall einer konkaven Nutzenfunktion u durch. Sowohl u als auch u_{Lin} werden als normiert und streng monoton wachsend vorausgesetzt.

Dem Beweis des obigen Satzes entnehmen wir (vgl. (2)) zunächst: $\mathrm{EU}(a) < u(\mu)$. Da $u(c) > u_{\mathrm{Lin}}(c)$ für alle betrachteten Konsequenzenwerte c gilt, hat man:

$$\mathrm{EU}(a) = \sum p_j\, u(c_j) > \sum p_j\, u_{\mathrm{Lin}}(c_j) = u_{\mathrm{Lin}}(\sum p_j\, c_j) = u_{\mathrm{Lin}}(\mu)$$

Insgesamt ergibt sich aus beiden Ungleichungen:

$$u_{\mathrm{Lin}}(\mu) < \mathrm{EU}(a) < u(\mu)$$

Mit u ist auch u^{-1} monoton wachsend. Anwendung der Umkehrfunktion auf die letzte Ungleichung liefert daher die beidseitige Abschätzung für das Sicherheitsäquivalent:

$$\boxed{u^{-1}(u_{\mathrm{Lin}}(\mu)) < \mathrm{SE}(a) < \mu}$$

Im Fall einer konvexen Nutzenfunktion hat man lediglich die Richtung der Ungleichung umzukehren, d.h. $<$ durch $>$ zu ersetzen (Beweis als Übung).

Sensitivitätsanalyse

■ Allgemeine Problemstellung

Trifft man eine Entscheidung unter Risiko nach der Bernoulli-Regel, so benutzt man Wahrscheinlichkeiten $p_1, \ldots, p_n$ für die Berechnung der zu maximierenden Wertfunktion:

$$\mathrm{EU}(a_i) = p_1\, u_{i\,1} + \ldots + p_n\, u_{i\,n}$$

Vielfach handelt es sich dabei nicht um objektive Wahrscheinlichkeiten (wie man sie aus physikalischen Symmetrien oder Massenversuchen mit relativen Häufigkeiten gewinnt), sondern um Werte, die auf subjektiven Einschätzungen nach vorliegendem Wissensstand beruhen (epistemische Wahrscheinlichkeiten).

Derartige Annahmen können sich ändern, wenn neue Informationen über die Umweltbedingungen $b_1, \ldots, b_n$ bekannt werden. Ist $(p_1', \ldots, p_n')$ eine *geänderte* W-Verteilung, so liegt die Frage nahe, wie sich dies auf die zugehörigen Nutzenerwartungswerte $p_1'\, u_{i\,1} + \ldots + p_n'\, u_{i\,n}$ auswirkt, und vor allem: auf die Lösung des Entscheidungsproblems. Am meisten wird man sich dafür interessieren, ob eine einmal getroffene Entscheidung (oder Präferenzordnung) zu revidieren ist.

In einer Sensitivitätsanalyse werden Spielräume für die Wahrscheinlichkeiten ermittelt, innerhalb derer die Lösung eines Entscheidungsproblems sich nicht ändert. Dabei treten naturgemäß Schwellenwerte auf, deren Über- oder Unterschreitung zu einer anderen Lösung führt.

■ Noch einmal: Spatz oder Taube?

Wir wollen das grundsätzliche Vorgehen bei der Sensitivitätsanalyse an dem Beispiel "Spatz oder Taube" (vgl. den Abschnitt "Spatz oder Taube: Das Sicherheitsäquivalent") erläutern. Dazu werde die (leicht abgeänderte) Nutzenmatrix

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

zu Grunde gelegt und die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ (für die Treffwahrscheinlichkeit des Schützen Theobald) durch die Variable p ersetzt. Die Alternative $a_1(= \textit{sich mit dem sicheren Spatz begnügen})$ behält natürlich ihren Nutzenerwartungswert 1. Für $a_2(= \textit{auf die Taube schießen})$ gilt nun aber

$$\mathrm{EU}(a_2) = p \cdot 4 + (1 - p) \cdot (-1) = 5\,p - 1$$

Zunächst fragen wir nach der Wahrscheinlichkeit p, für die Indifferenz besteht:

$$1 = \mathrm{EU}(a_1) = \mathrm{EU}(a_2) = 5\,p - 1$$

Es ergibt sich der sog. *Break-Even*-Wert $p = 0.4$. Man erkennt sofort, dass $\mathrm{EU}(a_2) > \mathrm{EU}(a_1)$ genau dann, wenn $p > 0.4$. D.h., trifft Theobald mehr als 40 % seiner (vergleichbaren) Ziele, so sollte er sich für die Taube entscheiden, bei weniger als 40 % entsprechend für den Spatz.

Optimales Stoppen

■ Situation und Problemstellung

Wir erhalten eine Folge von sich nacheinander anbietenden Gelegenheiten $G_1, G_2, \ldots, G_n$; für eine von ihnen müssen wir uns entscheiden. Es kann sich dabei um Kaufangebote handeln, Parkplätze (an denen wir suchend vorbeifahren), Stellenbewerbungen, und dgl. mehr. Nachdem eine Gelegenheit geprüft wurde, können wir anhalten und zugreifen; andernfalls ist sie verpasst und kehrt nicht wieder.

Gegenstand der Untersuchung ist die folgende Auswahlmethode:

Stoppregel

Zunächst werden die Gelegenheiten $G_1, \ldots, G_{s-1}$ geprüft und die beste von ihnen vorgemerkt. Von den nachfolgenden Gelegenheiten wird nun die erste ausgewählt, die besser ist als die beste unter den ersten $s-1$.

■ Das Entscheidungsproblem in Normalform

Das Entscheidungsproblem besteht in der Frage, für welchen Wert von s die obige Stoppregel optimal ist. Aus der geschilderten Verfahrensweise ergeben sich n Handlungsalternativen $a_1, \ldots, a_n$, wobei a_i bedeutet:

Benutze die Stoppregel für $s = i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

Betrachten wir a_1. In diesem Fall findet offenkundig keine Vorprüfung statt, d.h. die erste Gelegenheit G_1 wird in jedem Fall gewählt.

Nun zu den Umweltbedingungen $b_1, \ldots, b_n$, auf die wir mit unseren Alternativen treffen. Es sind dies gerade die n (sich gegenseitig ausschließenden) Möglichkeiten b_j, die besagen, dass G_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) die beste unter den n Gelegenheiten ist. Dabei wird unterstellt, dass es *genau eine* beste Gelegenheit gibt. Für die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten wollen wir $p_j = P(b_j) = \frac{1}{n}$ $(1 \leq j \leq n)$ annehmen.

Schließlich benötigen wir eine Nutzenmatrix U. Wir definieren den Nutzen u_{ij} als die Wahrscheinlichkeit, dass bei Ausführung von a_i die Gelegenheit G_j ausgewählt wird. Entscheidet man sich nämlich unter der Bedingung b_j für die Alternative a_i, so ist u_{ij} ein Maß dafür, mit G_j die beste Gelegenheit auszuwählen.

■ Aufstellung der Nutzenmatrix

Aus den vorangegangenen Überlegungen ergibt sich zunächst die erste Zeile der Nutzenmatrix $U: u_{11} = 1$, $u_{12} =. .. = u_{1n} = 0$.

Für das Folgende werde $2 \leq i \leq n$ vorausgesetzt.

Wir beobachten: Es ist keinesfalls sicher, dass wir mit der Stoppregel Erfolg haben und die beste Gelegenheit erwischen. Befindet sich diese nämlich unter den ersten $i-1$, d.h. tritt eine der Bedingungen $b_1, \ ..., b_{i-1}$ ein, so gehen wir bei den späteren Prüfungen leer aus, es wird also $u_{ij} = 0$ für $1 \leq j \leq i-1$.

Somit bleibt u_{ij} für $j \geq i$ zu berechnen. Die Gelegenheit G_j wird genau dann ausgewählt, wenn die beste der ersten $j-1$ Gelegenheiten sich schon unter den ersten $i-1$ befindet. Andernfalls würde nämlich gerade *diese* Gelegenheit schon ausgewählt, bevor G_j überhaupt geprüft wird. Die Wahrscheinlichkeit u_{ij} ergibt sich daher als Verhältnis der $i-1$ günstigen zu den $j-1$ möglichen Fällen:

$$u_{ij} = \frac{i-1}{j-1}$$

Die i-te Zeile ($i \geq 2$) von U lautet daher:

$$\left(\underbrace{0, \ ..., 0}_{i-1}, 1, \ \frac{i-1}{i}, \ \frac{i-1}{i+1}, \ ..., \ \frac{i-1}{n-1}\right)$$

U ist somit eine obere Dreiecksmatrix; in ihrer Hauptdiagonalen stehen lauter Einsen, darunter lauter Nullen.

■ Der Nutzenerwartungswert und seine Deutung

Es bezeichne E_{ij} das Ereignis, dass

a) G_j die beste Gelegenheit ist *und*

b) G_j ausgewählt wird, wenn wir gemäß a_i vorgehen (d.h. die Stoppregel mit $s = i$ anwenden).

Da a) und b) voneinander unabhängig sind, ergibt sich nach der Produktregel:

$$P\,(E_{ij}) = p_j \cdot u_{ij} = \frac{1}{n} \cdot u_{ij}$$

Zur Lösung des Entscheidungsproblems berechnen wir die Nutzenerwartungswerte der a_i. Offenbar ist $\text{EU}(a_i) = \sum_{j=1}^{n} P(E_{ij}) = P(E_{i\,1} + ... + E_{i\,n})$, d.h. der Nutzenerwartungswert von a_i lässt sich als Wahrscheinlichkeit des Ereignisses deuten, dass bei a_i die beste Gelegenheit gefunden wird.

Es gilt $\text{EU}(a_1) = \frac{1}{n}$ und für $i \geq 2$:

$$\text{EU}\,(a_i) = p_1\, u_{i\,1} + ... + p_n\, u_{i\,n} = \frac{1}{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{i-1}{j-1}$$

Wir kürzen die rechts vom Gleichheitszeichen stehende Summe sinngemäß mit $p(i, n)$ ab und erhalten

$$p(i,\ n) = \frac{i-1}{n}\left(\frac{1}{i-1} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right) \text{ für } 2 \leq i \leq n$$

$$\text{und } p(1,\ n) = \frac{1}{n}$$

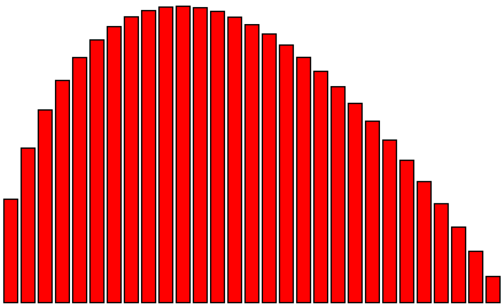
■ Lösung des Entscheidungsproblems

Wir bestimmen i so, dass $\mathrm{EU}(a_i)$ ($= p(i,\ n)$) maximal wird.

Machen wir uns ein Bild von der Situation bei $n = 10$ Gelegenheiten. Zunächst eine Tabelle der Werte $p(i,\ n)$ für $i = 2,\ \ldots,\ 10$:

2	0.282897
3	0.365794
4	0.39869
5	0.398254
6	0.372817
7	0.327381
8	0.265278
9	0.188889
10	0.1

Es ist $i_{\max} = 4$. Für $n = 30$ betrachten wir ein Histogramm:



Rechnerisch ergibt sich $i_{\max} = 12$. (Man beachte, dass $i_{\max}$ jeweils von n abhängt.) Wir tabellieren die Werte n, $i_{\max}$, $p(i_{\max},\ n)$ in drei Spalten:

2	2	0.5
3	2	0.5
4	2	0.458333
5	3	0.433333
10	4	0.39869
20	8	0.384209
30	12	0.378651
40	16	0.375743
50	19	0.374275
100	38	0.371043
500	185	0.368512
1000	369	0.368196

Es fällt auf, dass sich das Maximum der $p(i, n)$ in der Nähe von 0.37 zu stabilisieren scheint. Gleichzeitig liegt aber auch der Anteil $\frac{i_{\max}}{n}$ bei diesem Wert. In der Tat lässt sich durch eine genauere Analyse nachweisen:

$\frac{i_{\max}}{n} \sim \frac{1}{e}$ und $p(i_{\max}, n) \sim \frac{1}{e}$, wobei e die Eulersche Zahl ist (= 2.71828...)

Dabei bezeichnet $\sim$ die sog. asymptotische Gleichheit, welche besagt, dass der Quotient aus linker und rechter Gleichungsseite gegen 1 strebt (für $n \to \infty$). Für Einzelheiten der Analyse vgl. Arthur Engel [*Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*. Band 2. Klett: Stuttgart 1976, S. 201 f].

■ Fazit

Das Modell liefert uns eine praktische Faustregel, mit der wir unser Auswahlverhalten optimieren können. Sie lautet: Wende die Stoppregel für $s = \frac{n}{e} \approx 0.368 \cdot n$ an, oder noch gröber: Lasse zunächst ein gutes Drittel (knapp 37 %) der Gelegenheiten passieren und wähle danach die erste bessere Gelegenheit.